

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: [mathmod.esrae.ru/34-126](http://mathmod.esrae.ru/34-126)

Ссылка для цитирования этой статьи:

Шаронов П.А., Ивженко С.П., Умнова Е.Г., Вагарина Н.С., Мельникова Н.И.  
Интервальный метод расчета неопределенностей в экспериментальных исследованиях тензодатчиков // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2021. № 2

УДК 62:389: 398.14: 53.08

DOI: 10.24412/2541-9269-2021-2-01-15

## ИНТЕРВАЛЬНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ В ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ ТЕНЗОДАТЧИКОВ

Шаронов П.А.<sup>1</sup>, Ивженко С.П.<sup>2</sup>, Умнова Е.Г.<sup>3</sup>,  
Вагарина Н.С.<sup>4</sup>, Мельникова Н.И.<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,  
Саратов, Россия, [stalker-scharonov@mail.ru](mailto:stalker-scharonov@mail.ru)

<sup>2</sup>Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,  
Саратов, Россия, [sarvizir@mail.ru](mailto:sarvizir@mail.ru)

<sup>3</sup>Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,  
Саратов, Россия, [eg-umnova@mail.ru](mailto:eg-umnova@mail.ru)

<sup>4</sup>Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,  
Саратов, Россия, [v-n-s@yandex.ru](mailto:v-n-s@yandex.ru)

<sup>5</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
имени Н.Г. Чернышевского, Россия, Саратов, [nimelnikova@gmail.com](mailto:nimelnikova@gmail.com)

*Аннотация.* Представлен анализ неопределенности измерительных систем на основе тензодатчиков, использующих четверть-, полу- или полную мостовые схемы в качестве формирователя сигналов. В качестве инструмента для анализа предложен подход на основе интервального исчисления. Для расчета неопределенностей используется центрированное интервальное расширение функции. Результаты анализа сравниваются с классическими методами расчета неопределенностей. Показано, что предлагаемый подход не уступает им по эффективности при небольшом числе исследуемых входных параметров.

*Ключевые слова:* интервальный анализ, анализ неопределенность измерения, тензодатчики, интервальная оптимизация, измерительная система, алгоритм.

## INTERVAL METHOD FOR UNCERTAINTY CALCULATION IN EXPERIMENTAL MEASUREMENTS OF STRAIN GAUGES

P.A. Sharonov<sup>1</sup>, S.P. Ivzhenko<sup>2</sup>, E.G. Umnova<sup>3</sup>, N.S. Vagarina<sup>4</sup>,  
N.I. Melnikova<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia, [stalker-scharonov@mail.ru](mailto:stalker-scharonov@mail.ru)

<sup>2</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia,

*sarvizir@mail.ru*

<sup>3</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia, *eg-umnova@mail.ru*

<sup>4</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia, *v-n-s@yandex.ru*

<sup>5</sup>Saratov State University, Russia, Saratov, *nimelnikova@gmail.com*

*Abstract.* An uncertainty analysis of measuring systems using strain gauges and based on quarter-, half- or full bridge circuits as a signal conditioner are presented. An interval calculus approach is proposed as a tool for analysis. The centered interval expansion of the function is used to calculate the uncertainties. The analysis results are compared with classical methods for calculating uncertainties. It is shown that the proposed approach is not inferior to them in efficiency with a small number of studied input parameters.

*Keywords:* interval analysis, measurement uncertainty analysis, strain gauges, interval optimization, measuring system, algorithm.

### **Введение**

В технике тензодатчики играют важную роль и широко используются в различных измерительных системах. Исторически при разработке тензодатчиков использовалось множество различных подходов. Такие датчики были разработаны на основе самых разнообразных физических принципов: механических, оптических, электрических, акустических и даже пневматических [1–3]. Тензодатчик электрического сопротивления почти оптимально удовлетворяет всем требованиям, обычно предъявляемым к подобным датчикам. Поэтому он широко используется при анализе механических напряжений, а также в качестве чувствительного элемента (ЧЭ) во многих других приложениях. Самые незначительные изменения размеров элементов датчика под действием механических нагрузки, давления, силы и напряжения вызывают изменение сопротивления тензодатчика. В качестве формирователя сигнала датчика, как правило, используется мостовая схема Уитстона [4, 5] для преобразования изменения сопротивления в выходное напряжение рассогласования моста. Хотя подобный тензодатчик относительно прост в использовании и не дорог, необходимо следить за тем, чтобы он был должным образом приклеен к испытываемому образцу, выровнен по направлению измерения, как можно менее чувствителен к воздействию температуры, а источник питания должен быть стабильным во времени и с малым собственным сопротивлением. Кроме того, что более важно, сопротивление соединительных проводов должно быть крайне мало и не влиять на баланс мостовой схемы.

Широко используемыми топологиями мостовых схем для тензодатчиков являются следующие конфигурации: четверть-мостовая, полумостовая и полная мостовая [6]. Все эти схемы измерения деформаций имеют некоторые присущие им неопределенности измерения (НИ). Понимание природы этих неопределенностей, оказывающих прямое влияние на выводы и решения,

принимаемые на основе измерений, лежит в основе понимания проблемы. Анализ НИ с использованием классических методов для электрических и электронных схем можно найти в [7–15]. Анализ НИ с использованием интервальной арифметики более надежен, поскольку не опирается на статистические методы исследования и может одновременно обрабатывать неопределенности сразу нескольких параметров, влияющих на итоговый результат измерения. В интервальном методе предполагается, что неопределенные параметры остаются неизвестными, но они ограничены и имеют свои верхний и нижний пределы, устанавливаемые без использования вероятностных методов. Поскольку для интервального метода требуется меньше информации о неопределенности, он представляется достаточно привлекательным и перспективным в инженерных приложениях. Предлагаемый метод является альтернативным классическим методам. Вместе с тем это действенный способ вычисления и исследования точности измерительной системы в зависимости от вариации исследуемых параметров. Более того, интервальные методы могут доказать (или опровергнуть) с достаточной математической строгостью существование желаемых решений. Они использовались для анализа неопределенностей пассивных и активных электрических цепей, силовых кабелей, гражданских и механических сооружений [11–20]. В предлагаемой работе проводится анализ неопределенности тензометрических схем с использованием интервальных и некоторых классических методов.

### 1. Экспериментальная установка

На рис. 1 схематично показана экспериментальная установка для измерения деформации консольной балки из алюминия. Деформация на неподвижном конце балки измеряется с использованием трех различных конфигураций ЧЭ тензометрического датчика.

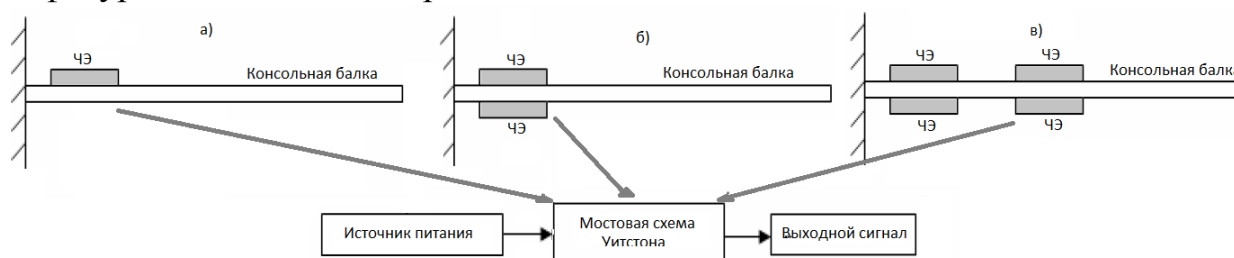


Рисунок 1 – Схема экспериментальной установки для измерения деформации консольной балки: а), б) и в) — конфигурации с одним, двумя и четырьмя ЧЭ, соответственно

Схемы формирования измерительного сигнала, а именно четверть-мостовая, полумостовая и полная мостовая, показаны на рис. 2. Измерительные цепи возбуждаются постоянным напряжением 5 В от высокостабильного источника питания. Сопротивление тензодатчика (ЧЭ) в недеформированном состоянии равно 350 Ом, сопротивление постоянных резисторов, не являющихся ЧЭ (в четверть-мостовой схеме это резисторы  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ , а в

полумостовой —  $R_3, R_4$ ), при нормальных условиях тоже равны 350 Ом. Сопротивление проводников, соединяющих ЧЭ с мостовой схемой, равно 1,21 Ом. Нестабильность источника питания составляет  $\pm 0,0025$  В, возможный разброс сопротивлений постоянных резисторов  $R_2, R_3, R_4$  составляет  $\pm 10\%$ , а сопротивлений соединительных проводников —  $\pm 1\%$ .

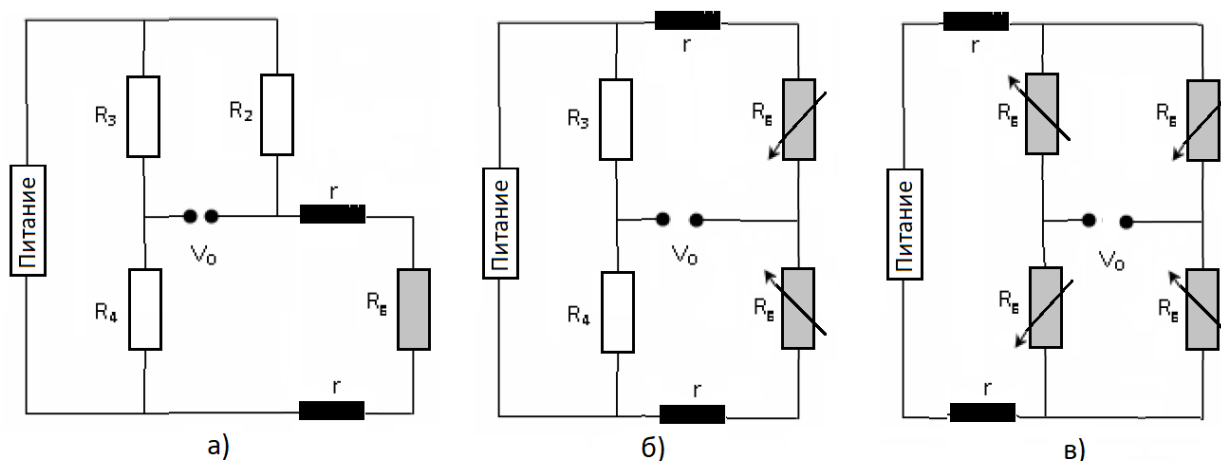


Рисунок 2 — Схемы измерения деформации:  $R_G$  — тензодатчики (ЧЭ);  $r$  — сопротивления соединительных проводников;  $R_2, R_3, R_4$  — сопротивления плеч моста, не содержащих ЧЭ; а) четверть-мостовая схема; б) полумостовая схема; в) полная мостовая схема

## 2. Анализ неопределенности методами интервального анализа

При измерении деформации НИ датчиком может возникать в самом процессе измерения. Причем факторами, влияющими на нее, могут быть: разброс параметров тензодатчика, температура окружающей среды, погрешности используемой модели датчика, отсутствие баланса мостовой схемы, влияние соединительных проводников и, наконец, погрешности отображения измеренных данных в устройстве их записи, хранения и визуализации [1, 2, 6, 9]. По сравнению с классическими методами интервальный метод учитывает все источники неопределенности и производит оценку результирующей НИ механического напряжения или деформации консольной балки с помощью процедуры оценивания, состоящей из одного шага [21, 22]. На основании этого можно сделать вывод, что интервальный метод является жизнеспособным и альтернативным инструментом для анализа неопределенностей тензометрических измерительных схем.

Четверть-мостовая схема, показанная на рис. 2,а, использует один активный ЧЭ, имеющий сопротивление  $R_G$ . Она часто применяется для измерения статической и динамической деформации, если формирователю не требуется температурная компенсация. Остальные три сопротивления плеч мостовой схемы выбраны так, чтобы максимизировать ее чувствительность в состоянии равновесия моста, что эквивалентно условию  $R_G R_3 = R_2 R_4$ . Если сопротивление соединительных проводников равно  $r$ , то функциональная зависимость выходного сигнала мостовой схемы от всех учитываемых параметров равна [23]:

$$V_0 = \left\{ \frac{\frac{[V_{in}] \Delta R_G}{4 [R]}}{1 + \frac{\Delta R_G}{2[R]} + 2 \frac{[r]}{[R]}} \right\} = \frac{[V_{in}] \Delta R_G}{2(2[R] + \Delta R_G + 4[r])}. \quad (1)$$

В полумостовой схеме, показанной на рис. 2,б, используются два активных тензодатчика в положениях  $R_1$  и  $R_2$ , они обозначены как  $R_G$ , а зависимость выходного сигнала схемы от тех же параметров будет [23]:

$$V_0 = \left\{ \frac{\frac{[V_{in}] \Delta R_G}{2 [R]}}{1 + 2 \frac{[r]}{[R]}} \right\} = \frac{[V_{in}] \Delta R_G}{2([R] + 2[r])}. \quad (2)$$

В полной мостовой конфигурации используются четыре активных тензодатчика, как показано на рис. 2,в. Когда датчики размещаются на консольной балке, то при ее изгибе датчики, расположенные сверху (в мостовой схеме 1 и 3), испытывают деформацию растяжения, а датчики на нижней части (в мостовой схеме 2 и 4) — деформацию сжатия. Тогда, если сопротивление подводящих проводников по-прежнему остается  $r$ , то выходной сигнал будет:

$$V_0 = \left\{ \frac{\frac{[V_{in}] \Delta R_G}{[R]}}{1 + 2 \frac{[r]}{[R]}} \right\} = \frac{[V_{in}] \Delta R_G}{[R] + 2[r]}. \quad (3)$$

В выражениях (1)–(3):  $V_0$  — выходное напряжение мостовой схемы;  $V_{in}$  — постоянное напряжение питания; сопротивление резисторов, не являющихся ЧЭ, обозначаются как  $R_2 = R_3 = R_4 = R$ ;  $\Delta R_G$  — изменение сопротивления ЧЭ-тензорезистора под действием механического напряжения или деформации консольной балки. В этих выражениях все параметры  $V_{in}$ ,  $R$  и  $r$  даны в квадратных скобках, чтобы отразить возможные отклонения данных параметров от приписываемых им значений вследствие нестабильности источника и разброса значений сопротивлений, о которых говорилось в разделе 1.

В соответствии с основной теоремой интервальной арифметики [24] функциональные зависимости для четверть-, полу- и полной мостовых схем измерения деформации, указанные в соотношениях (1)–(3), выражаются в виде естественных интервальных расширений путем замены в этих выражениях неопределенных входных параметров интервалами значений, в которых эти неопределенные параметры могут находиться. В работе выбраны следующие интервалы для неопределенных входных параметров:  $V_{in} = [4,9975; 5,0025]$  В,  $R = [315; 385]$  Ом и  $r = [1,1979; 1,2221]$  Ом.

Интервалы выходных напряжений для четверть-, полу- и полной мостовых схем при массе 0,1 кг консольной балки рассчитываются с помощью

выражений из работы [25]: [0,6448; 0,7849] мВ, [1,2868; 1,5808] мВ и [2,5787; 3,1516] мВ, соответственно. Относительные значения НИ для всех трех схем приведены в таблице 1.

Таблица 1— Относительная погрешность схем измерения деформации

| Мостовая схема измерения | Номинальное выходное напряжение (мВ) | Выходное напряжение в интервальной форме (мВ) | Средняя точка интервала (мВ) | Радиус интервала (мВ) | Относительная неопределенность |
|--------------------------|--------------------------------------|---|------------------------------|-----------------------|--------------------------------|
| Четверть-                | 0,7284                               | [0,6448; 0,7849]                              | 0,7149                       | 0,0701                | 0,09806                        |
| Полу-                    | 1,4188                               | [1,2868; 1,5808]                              | 1,4338                       | 0,1470                | 0,1025                         |
| Полная                   | 2,8375                               | [2,5787; 3,1516]                              | 2,8652                       | 0,2865                | 0,0999                         |

### 3 Анализ с использованием алгоритма на основе централизованного интервального расширения

Для анализа НИ деформации всеми предложенными мостовыми схемами авторы использовали алгоритм оптимизации, основанный на дифференциальной централизованной форме интервального расширения функции [24]. Это специальная форма метода ветвей и границ для алгоритма интервальной оптимизации, который основан на генерации многомерных параллелепипедов (названных в монографии [24] «брусками», а в иностранной литературе [21, 26] «боксами» (*boxes*)), принудительном дроблении этих брусков на «подбрусмы» и отбраковке бесперспективных «подбрусков». Дробление бруска заключается в представлении его в виде набора вложенных в него подбрусков меньших размеров. Нижняя и верхняя границы набора вложенных подбрусков должны быть нижней и верхней границами исходного бруска, соответственно.

Форма централизованного интервального расширения — это специальная форма расширения интервала, которая применима к произвольной функции, обладающей непрерывными частными производными первого порядка по исследуемым параметрам. Пусть  $g$  функция от  $n$  переменных такая, что  $g: R^n \rightarrow R$ ;  $\mathbf{X}$  — интервальный вектор, а  $\mathbf{m} = m(\mathbf{X})$  — некоторая точка внутри интервального вектора.

Теорема о централизованном интервальном расширении [21, 24, 26] утверждает, что для любого  $\mathbf{y} \in \mathbf{X}$ , если  $g'_i$  обозначает интервальное расширение частной производной  $\partial g / \partial x_i = g'_i$  на  $\mathbf{X}$ , то:

$$g(\mathbf{y}) = g(\mathbf{m}) + \sum_{i=1}^n g'_i(y_i - m_i). \quad (4)$$

Правая часть уравнения (4) называется централизованным интервальным расширением функции  $g$  на  $\mathbf{X}$  и задается как:

$$G_C(\mathbf{x}) = g(\mathbf{m}) + \sum_{i=1}^n G_i(x_i - m_i), \quad (5)$$

где  $G_i$  — оценки соответствующих интервальных расширений производных.

Центрированное интервальное расширение (5) является монотонным по включению [24, 26] и обеспечивает более точное оценивание интервала по

сравнению с функцией естественного интервального расширения  $g(\mathbf{x})$  для достаточно узкого исходного бруса  $\mathbf{X}$ . В процессе оптимального поиска интервала неопределенности для заданных функций преобразования (1)–(3) параллельно решаются две задачи безусловного поиска глобального минимума, а именно:

$$\begin{cases} g_L^* = \min g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbf{X}; \\ g_U^* = \min [-g(\mathbf{x})], & \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \end{cases}$$

где  $g_L^*$ ,  $g_U^*$  — минимальное и максимальное значения функции преобразования  $g(\mathbf{x})$  на интервальном векторе  $\mathbf{X}$ , соответственно. Эти величины вычисляются последовательно для трех функций  $V_0 = g(\Delta R_G, \mathbf{x})$ , задаваемых выражениями (1)–(3), методом централизованного интервального расширения, где вектор  $\mathbf{x}$  определяется следующим образом:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{in} \\ R \\ r \end{pmatrix} \subset \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [V_{in}] \\ [R] \\ [r] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [4,9975; 5,0025] \\ [315; 385] \\ [1,1979; 1,2220] \end{pmatrix}.$$

Сама процедура минимизации производится с помощью следующего алгоритма. *Входные данные:* интервальное расширение  $g$  функции  $g(\Delta R_G, \mathbf{x})$ , задаваемой одним из выражений (1)–(3), и требуемая точность оценивания  $\varepsilon$ . *Выходные данные:* оценка  $g_L^*$  глобального минимума функции  $g(\Delta R_G, \mathbf{x})$  на брус  $\mathbf{X}$ .

1. Разбить заданный интервальный вектор  $\mathbf{X}$  неопределенностей входных параметров (компонентами которого являются неопределенности источника питания схемы  $V_{in}$ , постоянных резисторов в плечах моста  $R$  и сопротивления соединительных проводов  $r$ ) на  $M$  одинаковых подбрус  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_M$  меньших размеров.
2. Вычислить  $y_i = g(\Delta R_G, \mathbf{x})$  для  $\mathbf{x} \in \mathbf{Y}_i$  ( $i = 1, \dots, M$ ), и поместить триады  $\{\mathbf{Y}_i, y_i, c_i\}$  в список  $L$ , отсортированный по возрастанию второго параметра. Параметр  $c_i$  является счетчиком числа разбиений подбруса с номером  $i$ . На этом этапе все  $c_i = 1$ . Триада, стоящая первой в этом списке, называется «ведущим подбрусом» списка [24], который обозначим  $\{\mathbf{Y}_S, y_S, c_S\}$ .
3. Организовать цикл с постусловием, последовательно обрабатывающий элементы списка  $L$ , начиная с ведущего подбруса.
  - а) Вычислить оценку снизу для текущего подбруса по формуле (5):

$$G_L(\mathbf{Y}_S) = g(\mathbf{m}_S) + \sum_{j=1}^3 G_j(y_j - m_j),$$

где:  $\mathbf{m}_S$  — вектор, координаты которого являются серединами отрезков, составляющих вектор  $\mathbf{Y}_S$  (средняя точка  $\mathbf{m}_S = \text{mid}(\mathbf{Y}_S)$ ).

- б) Взять произвольную точку  $\mathbf{y}_a \in \mathbf{Y}_S$  в окрестности  $\mathbf{m}_S$  и вычислить  $g_a = g(\Delta R_G, \mathbf{y}_a)$ .
- в) Сравнить  $G_L(\mathbf{Y}_S)$  и  $g_a$ .

Если  $G_L(\mathbf{Y}_S) > g_a$ , удалить из списка ведущий элемент  $\{\mathbf{Y}_S, y_S, c_S\}$ , сделать ведущим следующий элемент в списке и продолжить вычисления, начиная с шага 3а.

Иначе вычислить разность  $G_L(\mathbf{Y}_S) - g_a$  и проверить выполнение неравенства:  $|G_L(\mathbf{Y}_S) - g_a| \leq \varepsilon$ . Если оно справедливо, то запомнить  $g_a$  и выйти из цикла.

В противном случае перейти к шагу 3d.

d) Разбить интервал  $\mathbf{Y}_S$  на  $M(c_S)$  одинаковых подбрусков  $\mathbf{Y}_{S1}, \dots, \mathbf{Y}_{SM(c_S)}$  меньших размеров.

e) Вычислить  $y_{Si} = g(\Delta R_G, \mathbf{x})$  для  $\mathbf{x} \in \mathbf{Y}_{Si}$  ( $i = 1, \dots, M(c_S)$ ), увеличить параметр  $c_S$  на единицу, удалить элемент  $\{\mathbf{Y}_S, y_S, c_S\}$  из списка  $L$  и поместить триады  $\{\mathbf{Y}_{Si}, y_{Si}, c_S\}$  в список  $L$ , сохраняя в нем сортировку по возрастанию второго параметра.

f) Выбрать новый ведущий подбрус в списке  $L$ .

4. Присвоить  $g_L^* = g_a$ . Это выходные данные алгоритма: нижняя граница интервала неопределенности оценки величины выходного напряжения моста Уитстона.

5. Конец работы алгоритма.

Далее необходимо повторить процедуру поиска минимума с помощью описанного алгоритма для функции  $-g(\Delta R_G, \mathbf{x})$ . Найденный минимум этой функции будет соответствовать верхней границе  $g_U^*$  интервала неопределенности оценки величины выходного напряжения моста Уитстона.

Процедуру поиска интервала неопределенности необходимо провести для всех трех возможных схем моста Уитстона, когда выходной сигнал схемы описывается одним из выражений (1)–(3).

Сами разбиения интервального вектора на подбрусы и дальнейшие разбиения подбрусков на более мелкие части производятся в соответствии с рекомендациями Мура (*R.E. Moore*) и Скембо (*S. Skelboe*) [21, 22, 24]. Каждый интервал, являющийся компонентом исходного вектора  $\mathbf{X}$ , описывающего неопределенности рассматриваемых параметров, входящих в выражения (1)–(3), разбивается на равные части. Но различные компоненты вектора могут разбиваться на разное количество одинаковых подынтервалов. Дело в том, что исходная неопределенность в знании сопротивлений мостовой схемы  $R$  составляет порядка 10 % от этой величины, а неопределенности соединительных проводов  $r$  и величины входного напряжения  $V_{in}$  — 1 % и 0,1 % соответственно. Поэтому разбиение исходного вектора и получающихся в результате разбиений подбрусков производятся на равные части в соответствии с таблицей 2.

В частности из таблицы следует, что при первом разбиении исходного вектора неопределенностей он разбивается на 32 равных подбруска, причем по второму компоненту происходит разбиение на 8 равных частей, а по третьему компоненту — на 4. При этом разбиение по первому компоненту не



производится. Получающиеся в результате первого разбиения подбрусы вставляются в список  $L$ , с параметром  $c = 1$ .

Таблица 2 — Разбиение подбрусов на равные части в зависимости от номера разбиения

| Параметр, интервал вариации которого разбивается | Порядковый номер разбиения |         |         |            |
|--|----------------------------|---------|---------|------------|
|  | $c = 0$                    | $c = 1$ | $c = 2$ | $c \geq 3$ |
| Входное напряжение питания $V_{in} = x_1$        | 0                          | 2       | 2       | 2          |
| Сопротивление плеч мостовой схемы $R = x_2$      | 8                          | 5       | 4       | 2          |
| Сопротивление подводящих проводников $r = x_2$   | 4                          | 3       | 2       | 2          |
| Общее количество получающихся подбрусов $M(c)$   | 32                         | 30      | 16      | 8          |

Если некоторые из этих подбрусов подвергаются в процессе работы алгоритма следующему разбиению, то по первому компоненту они разбиваются на две равные части, по второму и третьему компонентам — на 5 и 3 части, соответственно, а общее число более мелких подбрусов, на которые разбивается такой подбрус, равно после второго разбиения 30, и т.д.

Результаты расчета с алгоритмом для входных данных из таблицы 2 и точностей  $\varepsilon = 10^{-3}$  и  $10^{-7}$  приведены в таблицах 3 и 4, соответственно.

Таблица 3. Неопределенность выходного напряжения с использованием централизованного интервального расширения (Точность  $\varepsilon = 0,001$ )

| Схема измерения | Диапазон входных параметров |                      |                  | Диапазон $V_0$ (мВ) |
|-----------------|-----------------------------|----------------------|------------------|---------------------|
|                 | $V_{in}$ (В)                | $R$ (Ом)             | $r$ (Ом)         |                     |
| Четверть-       | [4,9975; 4,9976]            | [348,9996; 352,9923] | [1,1970; 1,1988] | [0,7095; 0,7116]    |
| Полу-           | [4,9977; 4,9974]            | [349,9498; 352,8894] | [1,1982; 1,1978] | [1,4114; 1,4232]    |
| Полная          | [4,9980; 4,9971]            | [349,9587; 352,6789] | [1,1976; 1,1964] | [2,8123; 2,8368]    |

Таблица 4. Неопределенность выходного напряжения с использованием централизованного интервального расширения (Точность  $\varepsilon = 0,0000001$ )

| Схема измерения | Диапазон входных параметров |                      |                  | Диапазон $V_0$ (мВ) |
|-----------------|-----------------------------|----------------------|------------------|---------------------|
|                 | $V_{in}$ (В)                | $R$ (Ом)             | $r$ (Ом)         |                     |
| Четверть-       | [4,9977; 4,9916]            | [349,9996; 352,9923] | [1,1968; 1,1999] | [0,7109; 0,7106]    |
| Полу-           | [4,9980; 4,9872]            | [350,9276; 352,5494] | [1,1986; 1,1928] | [1,4145; 1,4212]    |
| Полная          | [4,9985; 4,9856]            | [351,2387; 352,9999] | [1,1993; 1,2064] | [2,8196; 2,8343]    |

#### 4. Анализ классическими методами

##### 4.1 Метод наилучшего случая

Анализ наихудшего случая или анализ допусков [6] — это метод анализа части конструкции с использованием верхнего и нижнего пределов разброса допусков для каждого параметра/переменной. Подобное исследование предельных случаев позволяет разработчикам предсказать, будут ли рабочие характеристики спроектированной системы оставаться в желаемых пределах при всех возможных комбинациях изменения исследуемых параметров. Основная цель такого анализа заключается в определении гарантированных границ изменения всех критически важных параметров, к которым особенно чувствительна разрабатываемая система, чтобы в данных пределах аппаратное обеспечение надежно и безотказно функционировало в полевых условиях в течение длительного срока. Анализ наихудшего случая также позволяет вычислить математически чувствительность характеристик системы к этим переменным и предоставляет как статистические, так и нестатистические методы обработки входных данных о переменных, влияющих на функционирование системы. Одно из основных ограничений анализа наихудшего случая состоит в том, что он не дает однозначного решения проблемы, поскольку для анализа используется разложение в ряд Тейлора, учитывающее только члены первого порядка. Кроме того, возможны случаи, когда несколько комбинаций значений входных ошибок отдельных параметров дают одинаковую общую неопределенность выходной переменной. Наконец, в вычислительном отношении это может привести к комбинаторному взрыву (необходимости рассмотрения огромного числа сочетаний входных значений параметров) в сложных системах, где количество этих параметров велико [15].

В работе изменение выходного напряжения схем измерения деформации вычисляется с использованием разложения в ряд Тейлора первого порядка:

$$|\Delta V_0| = \left| \frac{\partial V_0}{\partial V_{in}} \right| |\Delta V_{in}| + \left| \frac{\partial V_0}{\partial R} \right| |\Delta R| + \left| \frac{\partial V_0}{\partial r} \right| |\Delta r|,$$

где  $|\Delta V_0|$  — совокупное изменение выходного напряжения из-за допусков отдельных компонентов. Выходное номинальное напряжение ( $V_{0n}$ ) четверть-, полу- и полной мостовых схем рассчитывается из соотношений (1), (2) и (3) и равно для 0,1 кг массы, размещенной на свободном конце консольной балки, 0,7084; 1,4188 и 2,8375 мВ, соответственно. Изменение выходного напряжения  $\Delta V_0$  для этих схем составляет 0,1431; 0,2834 мВ и 0,5668 мВ, соответственно. С учетом неопределенности диапазоны выходного напряжения этих схем составляют в мВ [0,5653; 0,8515], [1,3540; 1,7022] и [2,2707; 3,4043], соответственно.

#### 4.2 Метод моментов

Это статистический метод оценки параметров [27], при котором вероятностные моменты распределений неопределенных параметров приравниваются к соответствующим выборочным моментам, а неизвестный параметр оценивается. Этот метод, как правило, обеспечивает состоятельные, но не столь эффективные оценки, как оценки максимального правдоподобия.

Однако, в отличие от метода максимального правдоподобия, метод моментов позволяет получить результат с помощью менее сложных в вычислительном отношении расчетов. Но этому методу свойственны следующие концептуальные ограничения: 1) при расчете любого выборочного момента оцениваемого параметра происходит потеря разрешения; 2) точное определение закона распределения вероятности неопределенного параметра очень затруднено; 3) даже небольшое отклонение от реального распределения вероятностей может вызвать большую ошибку в расчетах.

В работе номинальное значение  $V_0$ , дисперсия  $\sigma^2(V_0)$  и неопределенность выходного напряжения  $u(x_i)$  четверть-, полу- и полной мостовых схем измерения деформации рассчитываются из соотношений [12–15]:

$$\sigma^2(V_0) \approx \sum_{i=1}^3 d_i^2 u^2(x_i), \quad (6)$$

где:  $d_i = \partial V_0 / \partial x_i$ ;  $x_1 = V_{in}$ ;  $x_2 = R$ ;  $x_3 = r$ ;  $u(x_i) = (x_{i\max} - x_{i\min}) / 6$ ;  $x_{i\max}$  и  $x_{i\min}$  — максимальное и минимальное значения параметра  $x_i$ , соответственно.

Дисперсии выходных напряжений четверть-, полу- и полной мостовых схем, рассчитанные с использованием соотношения (6), равны в мВ<sup>2</sup>: 0,0166; 0,0702 и 0,0993, соответственно. Диапазон выходного напряжения четверть-, полу- и полной мостовой схем с учетом неопределенности вычисляется в мВ как: [0,6918; 0,7250], [1,3486; 1,4890] и [2,7382; 2,9368], соответственно.

#### 4.3 Метод Монте-Карло

Метод Монте-Карло основан на выборке результатов измерения [28–33]. Прежде всего, он дает полное распределение относительных частот выпадения значений выходной переменной в зависимости от случайно выбранной (неопределенной) входной переменной. Таким образом, это дает общее представление о возможных комбинациях входных неопределенных параметров. Точность может быть повышена за счет увеличения объема рассматриваемой выборки и, следовательно, требует определенных временных ресурсов. В принципе, этот метод выявляет некоторые потенциально приводящие к ошибкам комбинации, обнаруживаемые при анализе наихудшего случая. Метод Монте-Карло позволяет находить приемлемые решения в большинстве измерительных приложений, поскольку обладает следующими достоинствами:

1) вероятностные распределения изменений параметров могут быть легко и гибко смоделированы без необходимости их аппроксимации;

2) относительно просто смоделировать взаимосвязи и зависимости выходной величины от входных параметров, и исследование может быть проведено с большой скоростью;

3) существует большое количество стандартных пакетов программ, реализующих моделирование и автоматизацию задач, связанных с этим методом.

Основной недостаток этого метода — достижение высокой точности решения требует большой выборки данных и значительного времени.

В статье количество испытаний выбрано равным 100000, при этом предполагается, что неопределенные входные параметры, а именно  $V_{in}$ ,  $R$  и  $r$  для всех трех схем измерения деформации, имеют равномерное распределение в пределах установленных границ допусков. Диапазон выходного напряжения для четверть-, полу- и полной мостовых схем при действии массы 0,1 кг, приложенной к свободному концу балки, составляет в мВ: [0,6453; 0,7868], [1,2912; 1,5746] и [2,5461; 3,1506], соответственно.

### Выводы

В работе анализируются характеристики измерителя механических напряжений и деформаций, основанного на тензодатчиках и использовании четверть-, полу- и полной мостовых схем в качестве формирователя сигналов. В частности исследуется зависимость неопределенности выходного напряжения схемы от входных параметров, известных с некоторой неопределенностью, а именно, напряжения питания, сопротивлений плеч мостовой схемы и сопротивления соединительных проводов ( $V_{in}$ ,  $R$ ,  $r$ ). В качестве инструмента для исследования предложен интервальный анализ, хорошо соответствующий задаче в данной постановке. Зависимости выходной величины от входных рассматриваются как интервальные расширения соответствующих функциональных зависимостей (1)–(3), где диапазоны неопределенностей входных параметров характеризуются интервальным вектором.

В соответствии с рекомендациями теории расчет неопределенностей выходной величины производится на основе централизованного интервального расширения. Разработан соответствующий алгоритм оптимального поиска интервала неопределенностей выходной величины, который описан в работе. Алгоритм основан на разбиении исходного интервального вектора на более мелкие подбрусы, причем число подбрусов, на которые разбиваются исходные подбрусы, зависит от номера последовательного разбиения.

Результаты работы алгоритма сравниваются с классическими методами расчета НИ: методами наихудшего случая, моментов и Монте-Карло. Показано, что предлагаемый алгоритм дает более точные результаты расчета интервала неопределенности, с которыми может сравниться только метод моментов. Также показано (таблицы 3 и 4), что результирующий интервал неопределенности сужается при увеличении точности расчетов  $\varepsilon$ . При увеличении числа подблоков разбиения и увеличении числа рассматриваемых параметров эффективность предлагаемого алгоритма существенно снижается.

### Библиографический список

1. Раянов, Т.А. Математическое моделирование тензометрической системы измерения в программе MATLAB SIMULINK / Т.А. Раянов // Транспортные системы и технологии. – 2020. – Т. 6. – № 2. – С. 85–93. doi: 10.17816/transsyst20206285-93

2. Hoffmann, K. An Introduction to Measurements using Strain Gages / K. Hoffmann. – Darmstadt: Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH, 1989. – 273 p.
3. Hoffmann, K. Practical Hints for the Installation of Strain Gages / K. Hoffmann. – Darmstadt: Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH, 2011. – 63 p.
4. Ким, К.К. Средства электрических измерений и их поверка / К.К. Ким, А.И. Чураков, Г.Н. Анисимов. – М.: Лань, 2018. – 316 с.
5. Львов, А.А. Линейная петлевая схема точной обработки сигналов с датчиков / А.А. Львов, В.А. Пыльский // Вестник Саратовского государственного технического университета, 2004. – № 2(3). – С.102-112.
6. Bently, J.P. Principles of Measurement Systems / J.P. Bently. – Harlow, England: Pearson Education Ltd, 2005. – 522 p.
7. Statistical Circuit Analysis Based on SABER / D. Li, X. He, J. Zhang et al. // Proc. of IEEE Power Conversion Conf. – Osaka, Japan: IEEE, 2002. –Vol. 2. – P. 743-748.
8. Bajcsy, J. Resulting Error of Measurement Chain / J. Bajcsy, P. Bajcsy // Proc. of the 1st ISA/IEEE Sensors for Industry Conf.. – Rosemont, U.S.A.: IEEE, 2001. – P. 296-298.
9. Hall, B.D. Propagating uncertainty in instrumentation systems / B.D. Hall // IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement, 2005. – Vol. 54. – No. 6. – P. 2376-2380.
10. Измерения длины в Древней Греции: неопределенность стандартов в золотой век Олимпийских игр / О.М. Балабан, В.В. Балабан, А.А. Львов, М.С. Светлов // Проблемы управления, обработки и передачи информации (УОПИ-2018): сб. тр. VI Междунар. науч. конф.- Саратов: ООО СОП «Лоди», 2019. – С. 611 -620.
11. Применение метода неопределенности для анализа погрешностей многополюсного рефлектометра / А.А. Солопекина, А.А. Львов, Н. Семежев, Н.С. Вагарина // Надежность и качество: тр. Междунар. симп.: в 2 т. – Пенза: ПГУ, 2017. – Т. 2. – С. 136-139.
12. Solopekina, A.A. Calculation of Measurement Uncertainties of Multi-port Transmission Line Reflectometer / A.A. Solopekina, A.A. L'vov, N. Semezhev // Proc. 2014 Int. Conf. on Actual Problems of Electron Devices Engineering. Saratov, Russia: IEEE, 2014. – P. 356-362.
13. Львов, А.А. Расчет неопределенностей измерения характеристик многозондовой измерительной линии / А.А. Львов, А.А. Солопекина, Н.Семежев // Компьютерные науки и информационные технологии: материалы Междунар. науч. конф. – Саратов: Издат. центр «Наука», 2016. – С. 396-400.
14. Application of the Uncertainty Method for Analysis of Multi-Port Correlator Accuracy /A.A. Solopekina, N. Semezhev, A.A. L'vov et al. // Proc. 2017 IEEE Russia Section Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering Conf. – St. Petersburg, Russia: IEEE, 2017. – P. 505-509.

15. Анализ модели многозондовой измерительной линии и расчет неопределенностей измерения с ее помощью / А.А. Львов, Н. Семежев, А.А. Солопекина, О.М. Глухова // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика, 2019. - № 4. – С. 141-151.
16. Wang, S. Power System Transient Stability Simulation under Uncertainty Based on Interval Method / S. Wang, Z. Zheng, C. Wang // Proc. of the 2006 Int. Conf. on Power System Technology. – Chongqing, China: IEEE, 2006. – P. 1-6. DOI: 10.1109/ICPST.2006.321587.
17. Kolev, L.V. Worst-Case Tolerance Analysis of Linear DC and AC Electric Circuits / L.V. Kolev // IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 2002. – Vol. 49. – Iss. 12. – P. 1693 – 1701.
18. Leenaerts, D.M.W. Application of Interval Analysis for Circuit Design / D.M.W. Leenaerts // IEEE Trans. on Circuits and Systems, 1990. –Vol. 37. – No. 6. – P. 803-807.
19. Cirillo, A. Calculation of Internally Controlled Switching Instants in Switched RLC Circuits Using Interval Analysis / A. Cirillo, N. Femia // IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems Connecting the World. – Atlanta, U.S.A.: IEEE, 1996. Vol. 1. – P. 593-596.
20. Al-Othman, A.K. A Comparative Study of Two Methods for Uncertainty Analysis in Power System State Estimation / A.K. Al-Othman, M.R. Irving // IEEE Trans. on Power Systems, 2003. – Vol. 20. – No. 2. – P. 1181-1182.
21. Skelboe, S. True Worst Case Analysis of Linear Electrical Circuits by Interval Arithmetic / S. Skelboe // IEEE Trans. on Circuits and Systems, 1979. – Vol. 26. – P. 874-879.
22. Moore, R.E. Introduction to Interval Analysis / R.E. Moore, R.B. Kearfott, M.J. Cloud. – Philadelphia, U.S.A.: SIAM, 2009. – 223 p.
23. Fiorillo, A.S. Theory, Technology and Applications of Piezoresistive Sensors: A Review / A.S. Fiorillo, C.D. Critello, S.A. Pullano // Sensors and Actuators A: Physical, 2018. – Vol. 281. – No. 1. – P. 156-175.
24. Шарый, С.П. Конечномерный интервальный анализ / С.П. Шарый. – Новосибирск: издательство «XYZ». 2019. – 630 с.
25. Kolev, L.V. Interval Methods for Circuit Analysis / L.V. Kolev, Interval Methods for Circuit Analysis, Advanced series on circuits and systems. Vol. 1. Complex Systems Advances Series.. – World Scientific, 1993. –307 p..
26. Хансен, Э. Глобальная оптимизация с помощью методов интервального анализа / Э. Хансен, Дж.У. Уолстер. – Ижевск-Москва: Издательство «РХД», 2010. – 508 с.
27. Львов, А.А. Основы статистической обработки измерительной информации в задачах автоматического управления: учеб. пособие для студ. вузов / А.А. Львов. – Саратов: СГТУ, 2005. – 84 с.
28. Львов, А.А. Высокоточные измерения переменного тока, основанные на применении метода Монте-Карло / А.А. Львов, В.А. Машкин // Вестник

- 
- Саратовского государственного технического университета, 2009. –№ 4(43).– С.41-45.
29. Kulkov, O.A. Optimization of Multi-port Reflectometers Using Mathematical Simulation / O.A. Kulkov, M.T. Klyuchnikova, A.A. L'vov // Proc. of Int. Conf. On Actual Problems of Electron Devices Engineering. – Saratov, Russia: IEEE, 2004. – P. 427 - 431. DOI: 10.1109/APEDE.2004.1393602.
30. Львов, А.А. Оптимизация структуры, повышение точности и моделирование характеристик двухканальных цифровых формирователей сигнала и измерителей импеданса / А.А. Львов, В.А. Пыльский // Вестник Саратовского государственного технического университета, 2008. – № 4(36)ю – С.85-92.
31. Львов, А.А. Особенности моделирования одночастотных сетей цифрового телерадиовещания стандарта DVB-T / А.А. Львов, В.В. Киселев, М.С. Светлов // Вестник Саратовского государственного технического университета, 2010. –№ 3(4). – С.145-149.
32. Львов, А.А. Численное моделирование и анализ воздействия искажений на OFDM/QAM-сигнал / А.А. Львов, В.В. Киселёв // Изв. Саратовского университета. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2013. – Т. 13. – Вып. 3. – С. 102-108.
33. Львов, А.А. Исследование движения электропневматического протеза бедра с использованием методов математического моделирования / А.А. Кулик, А.А. Кирсанов, В.П. Глазков, А.А. Львов // Вестник Саратовского государственного технического университета, 2014. – № 4 (77). – С. 161-166.