Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках http://mathmod.esrae.ru/ **2021, №3 ISSN 2541-9269**

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: mathmod.esrae.ru/35-130
Ссылка для цитирования этой статьи:
Шаронов П.А., Умнова Е.Г., Вагарина Н.С., Львов А.А., Светлов М.С. Альтернативный подход к выражению неопределенности измерения в эксперименте // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2021. № 3

УДК 62:389: 398.14: 53.08 DOI: 10.24412/2541-9269-2021-3-10-26

АЛЬТЕРНАТИВНЫЙ ПОДХОД К ВЫРАЖЕНИЮ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ В ЭКСПЕРИМЕНТЕ

Шаронов П.А.[1], Умнова Е.Г.[2], Вагарина Н.С.[3], Львов А.А.[4], Светлов М.С.[5]
[1]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Саратов, Россия, *stalker-scharonov@mail.ru,*
[2]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Саратов, Россия, *eg-umnova@ mail.ru,*
[3]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Саратов, Россия, , *v-n-s@yandex.ru,*
[4]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Саратов, Россия, *alvova@mail.ru*
[5]Институт проблем точной механики и управления РАН
Саратов, Россия, svetlovms*@yandex.ru*

Аннотация. Анализируется результат измерения, представленный в виде математической модели неполных знаний. Показано, как его можно рассматривать в рамках теории доказательств. Введены случайные нечеткие переменные, которые используются для выражения результата измерения вместе в совокупности с его неопределенностью. Рассмотрено применение приведенных теоретических сведений для представления неопределенности результата измерения в конкретном примере, что доказывает практическую полезность предлагаемого подхода.

Ключевые слова: теория доказательств, неопределенность, доверительный интервал, вероятность, случайные нечеткие переменные.

ALTERNATIVE APPROACH FOR UNCERTAINTY REPRESENTATION IN EXPERIMENTAL MEASUREMENTS

P.A. Sharonov[1], E.G. Umnova[1], N.S. Vagarina[1], A.A. L'vov[1], M.S. Svetlov[2]
[1]Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia, *stalker-scharonov@mail.ru,*
[2]Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia, *eg-umnova@ mail.ru*
[3]Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia, *v-n-s@yandex.ru*
[4]Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia, *alvova@mail.ru*
[5]Institute of Precision Mechanics and Control of RAS Saratov, Russia, svetlovms*@yandex.ru*

Abstract. The measurement result presented in the form of a mathematical model of incomplete knowledge is analyzed. The authors show how it can be considered within the theory of evidence framework. Random fuzzy variables are introduced, which are used to express the measurement result together with its uncertainty. The application of the considered theoretical information to represent the uncertainty of the measurement result in a specified example is considered, which proves the practical usefulness of the proposed approach.

Keywords: theory of evidence, uncertainty, confidence interval, probability, random fuzzy variables.

Введение и историческая справка

Одна из самых сложных частей измерительной деятельности, возможно, наиболее сложных, — это квалификация полученного результата измерения, то есть оценка того, насколько этот результат отличается от фактического значения измеряемой величины.

С самого начала научной экспериментальной деятельности исследователям стало ясно, что любой процесс измерения может обеспечить только приблизительное значение измеряемой величины из-за ряда неидеальных ситуаций, влияющих на используемые измерительные инструменты и устройства, принятый метод измерения, условия измерения, модель, с помощью которой описывается измеряемая величина, самого оператора-метролога и т.д. В общем, все известное или неизвестное может взаимодействовать с процессом измерения, влияя на его результат.

Также вскоре стало ясно, что любой результат измерения без оценки того, насколько он отличается от фактического значения измеряемой величины, является малопригодным для практического использования, если не абсолютно бесполезным. Для получения полезных результатов измерений измерительная наука с самого начала занималась фундаментальной проблемой того, как можно выразить и оценить неточность результата измерения [1, 2].

Эта проблема демонстрирует еще одну сложность, связанную с тем, что многие физические величины не измеряются прямым способом, а могут быть вычислены только на основании других величин, измеренных прямыми методами. Следовательно, результат измерения должен быть не только выражен так, чтобы можно было оценить его отклонение от значения измеряемой величины, но также необходимо найти способ объединить эти оценки, чтобы результат косвенных измерений также мог быть квалифицированным.

Еще три-четыре десятилетия назад эта проблема решалась детерминированным образом с помощью используемой концепции погрешности измерения.

Концепция погрешности была основана на фундаментальном предположении, что истинное значение измеряемой величины может быть известно, так что ошибка измерения может быть выражена как разница между результатом измерения и истинным значением, в качестве которого выступало так называемое действительное значение измеряемой величины.

Обычный способ квалифицировать результат измерения был основан на оценке максимальной ошибки, а затем на оценке интервала, сосредоточенного вокруг результата измерения и показывающего ширину, равную удвоенной расчетной максимальной погрешности. Распространение ошибки измерения, когда учитывались косвенные измерения, могло быть получено путем применения математики интервалов к интервалам, определенным для каждого отдельного результата измерения.

Совсем недавно этот подход отвергли; при этом, в частности, весьма критически были рассмотрены два важных момента. Первый из них, который основан, скорее, на философских соображениях, а не на технических, связан с невозможностью познания истинного значения измеряемой величины. Второй указывал, что способ, которым теория ошибок оперирует при анализе их распространения, был корректным только в случаях, когда ошибки вызваны не скомпенсированными систематическими эффектами, но не учитывал возможные эффекты взаимной компенсации, которые могли иметь место, когда ошибки были вызваны случайными эффектами.

Это обсуждение привело к разработке Руководства по представлению неопределенности измерения (НИ) (*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, GUM) [3, 4], в которой приняли участие Международная организация по стандартизации (*International Organization for Standardization*, ISO), Международная электротехническая комиссия (МЭК, *International Electrotechnical Commission*, IEC). Международная организация законодательной метрологии (*International Organization of Legal Metrology*, OIML), Международное бюро мер и весов (МБМВ, *Bureau International des Poids et Mesures*, BIPM). Это Руководство представляет собой международно-признанный руководящий документ по метрологии и измерительной практике. Первая версия этого руководства была утверждена только в 1993 году, а еще почти через пятнадцать лет последняя версия легла в основу стандартов Российской Федерации, утвердивших понятие НИ [5–7] в нашей стране.

Основная философская посылка этой работы — отрицание концепции истинного значения, которая подразумевает и с теоретической, и с практической точек зрения невозможность узнать истинное значение измеряемой величины. Фактически, Руководство заявляет: «В настоящее время широко признано, что, когда все известные или предполагаемые компоненты погрешности были оценены и были применены соответствующие исправления, все еще остается неопределенность в отношении правильности заявленного результата, что есть сомнения в том, насколько хорошо результат измерения представляет значение измеряемой величины» [3, 4].

Следовательно, квалификация результата измерения больше не относится к оценке того, насколько он отличается от неизвестного и непознаваемого истинного значения измеряемой величины, а соответствует оценке новой измеряемой характеристики результата измерения, называемой НИ. Более того, в руководстве [3, 4] утверждается, что эта характеристика должна предоставлять метрологу «интервал, охватывающий результат измерения, в пределах которого можно ожидать, что значения, которые вполне обоснованно может принимать физическая величина, подлежащая измерению, будут лежать с высокой степенью достоверности».

И используемый ранее традиционный подход, базирующийся на исследовании ошибок измерения, и новый подход, опирающийся на расчет НИ, можно рассматривать с математической точки зрения как попытку выразить, в том числе с количественной точки зрения, неполные знания и неполную информацию об измеряемой величине. Всегда с математической точки зрения это означает, что нам нужна теория, чтобы оценить количественно, насколько не полна имеющаяся информация (полученная в результате измерения), и обработать эту неполную информацию для оценки того, насколько не полны знания об измеряемой величине, когда результат измерения получен на основе косвенных измерений.

До сих пор наиболее широко известной и хорошо зарекомендовавшей себя математической теорией, которая имеет дело с неполной информацией, является теория вероятностей: по этой причине она рассматривалась в Руководстве [3, 4] как основной математический инструмент для выражения и оценки НИ. Однако теория вероятностей охватывает только конкретную область неполного знания: а именно ту, в которой причиной неполноты знания является наличие исключительно случайных эффектов. По этой причине в Руководстве вынуждено делается оговорка: «предполагается, что результат измерения был скорректирован с учетом всех признанных значимых систематических эффектов» [3, 4]. Ограничения, вытекающие из такого утверждения, подробно обсуждаются в монографиях [8, 9] наряду с ограничениями, вытекающими из предположений, лежащих в основе закона распространения неопределенности, предложенного в [3]. Они лишь частично устранены в Приложении 1 к Руководству [10], которые сейчас находятся в процессе доработки.

Это обсуждение привело к выводу, что для работы с неполным знанием необходима более общая теория, способная учесть все виды воздействий на процесс измерения, а не только случайные. Такая более общая теория была предложена Г. Шафером (*G. Shafer*), и она известна как «теория доказательств» [11].

В предлагаемой статье кратко рассмотрены основы теории доказательств; показано, как аппарат теорий вероятностей и нечеткой логики может рассматриваться в качестве двух отдельных частных случаев теории доказательств; определены случайные нечеткие переменные (СНП, *Random Fuzzy Variables*, RFV), которые можно рассматривать как математический инструмент для выражения и обработки неполных знаний; показано, как эти переменные можно использовать для выражения результата измерения в совокупности с его неопределенностью.

1. Теория доказательств и выражение неопределенности

С математической точки зрения, правильное представление результата измерения и связанной с ним неопределенности требует математической теории, способной обрабатывать неполную информацию, даже если воздействия, ответственные за эту неполноту, не обязательно являются случайными. Безусловно, эта теория должна включать в себя в качестве частного случая и теорию вероятностей, которая естественным образом используется, когда на процесс измерения влияют исключительно случайные эффекты.

Результаты обсуждений, изложенные в предыдущем разделе, позволяют сделать вывод о том, что представление неполной информации наилучшим образом может быть реализовано на базе теории доказательств, предложенной в 70-х годах прошлого века Г. Шафером [11], а впоследствии развитой Л.А. Задехом (*L.A. Zadeh*) в приложении к нечеткой логике [12].

Теория доказательств — это математическая теория, базирующаяся на трех фундаментальных концепциях: основной функции присвоения вероятностей (m), мере доверия (B) и мере достоверности (P_l) [8, 9]. Эти величины определены на множестве $A \in P(X)$, где X — универсальное множество, а $P(X)$ — множество всех подмножеств множества X.

Основная функция присвоения вероятностей может быть определена [8] как:

$$m: P(X) \to [0, 1] \tag{1}$$

и удовлетворяет следующим отношениям:

$$m(\varnothing) = 0; \tag{2}$$

$$\sum_{A \in P(X)} m(A) = 1. \tag{3}$$

Каждое множество A, для которого $m(A) > 0$, называется фокальным элементом множества X [8, 9]. Для каждого множества $A \in P(X)$, $m(A)$ представляет уверенность в утверждении или доверие утверждению «элемент x принадлежит множеству A», которое вынесено на основании всех доступных исследователю сведений или данных. Это значение $m(A)$ относится только к множеству A и ничего не говорит о принадлежности элемента x к каким-либо подмножествам множества A [9].

Если основная функция присвоения вероятностей $m(A)$ (1)–(3) задана для каждого множества $A \in P(X)$, мера доверия и мера достоверности однозначно определяются следующим образом:

$$B(A) = \sum_{B | B \subseteq A} m(B); \tag{4}$$

$$P_l(A) = \sum_{B | A \cap B \neq \varnothing} m(B). \tag{5}$$

Соотношения (4) и (5) показывают, что, в то время как $m(A)$ характеризует степень уверенности или доверия тому, что рассматриваемый элемент принадлежит только множеству A (именно множеству A), $B(A)$ представляет собой меру уверенности или доверия утверждению, что рассматриваемый элемент принадлежит множеству A и его различным подмножествам. При этом $P_l(A)$ представляет собой не только меру уверенности или доверия утверждению, что рассматриваемый элемент принадлежит множеству A и всем его подмножествам, но также дополнительную меру уверенности или доверия тому, что рассматриваемый элемент x принадлежит множествам, которые пересекаются с множеством A. Другими словами, $m(A)$ — это степень уверенности или доверия имеющейся у нас информации о том, что рассматриваемый элемент принадлежит множеству A; $B(A)$ — это степень уверенности в утверждении, что рассматриваемый элемент принадлежит множеству A, вынесенном на основе информации, которая непосредственно подтверждает это утверждение, а $P_l(A)$ — это степень уверенности в утверждении, что рассматриваемый элемент принадлежит множеству A, вынесенном на основе информации, которая прямо не противоречит данному утверждению.

Теория вероятности может рассматриваться как частный случай теории доказательств, когда фокальные элементы вырождаются в множества, состоящие всего из одного элемента. В таком случае мера доверия и мера достоверности принимают одно и то же значение, называемое вероятностной мерой [8, 9]: $B(A) = P_l(A) = P_r(A)$. В рамках этой теории определены случайные величины.

Другим частным случаем теории доказательств является теория возможностей или теория нечеткой логики. В этом случае фокальные элементы удовлетворяют следующему соотношению [9]:

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n = X, \tag{6}$$

то есть все фокальные элементы являются вложенными. В рамках теории нечеткой логики меры доверия и достоверности называются мерой необходимости $N(A)$ и мерой возможности $P_o(A)$, соответственно, и получаются из (3)–(5):

$$N(A_N) = \sum_{k=1}^{N} m(A_k); \tag{7}$$

$$P_o(A_M) = \sum_{r=1}^{M} m(A_r). \tag{8}$$

Наиболее интересным приложением теории нечеткой логики в метрологии является одномерный случай, когда фокальные элементы становятся вложенными интервалами, что позволяет определить нечеткие переменные [8, 9, 13]. Известно, что нечеткая переменная определяется своей функцией принадлежности (ФП) $\mu_X(x)$ на множестве X, при этом $\mu_X(x)$ принимает все значения от 0 до 1 и является выпуклой [9].

Альтернативным способом нечеткая переменная может быть описана с помощью набора вложенных интервалов, называемых α-отрезками, таким образом, что при заданном значении α между 0 и 1 соответствующий α-отрезок представляет собой интервал, определяемый как:

$$X_\alpha = \{x | \mu_X(x) \geq \alpha\}; \tag{9}$$

На рис. 1 приведен пример нечеткой переменной с треугольной ФП. На этом же рисунке показаны два α-отрезка, соответствующие значениям α = 0,2 и α = 0,6. При этом отрезок, соответствующий α = 0,6, является вложенным в отрезок α = 0,2, поэтому они удовлетворяют соотношению (6).

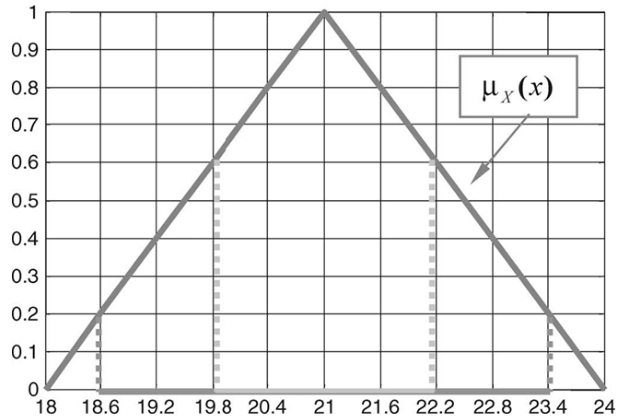

Рис. 1. Пример треугольной нечеткой переменной и двух α-отрезков

Поскольку α-отрезки являются вложенными фокальными элементами, то меры необходимости и возможности могут быть определены для каждого α-отрезка.

В частности, это:

$$N(X_\alpha)=1-\alpha; \quad P_o(X_\alpha)=1. \tag{10}$$

Более того, в монографии [9] доказано, что каждый α-отрезок X_α можно рассматривать как доверительный интервал, а соответствующая ему доверительная вероятность задается величиной $N(X_\alpha)$, которая является мерой необходимости для рассматриваемого α-отрезка.

Согласно (7), (8) и (10), нечеткая переменная может наиболее адекватным способом описывать неполные знания об измеряемой физической величине в случае, когда доступная измерительная информация показывает, что значение измеряемой величины попадает в заданный интервал, однако нет сведений о ее местонахождении внутри интервала и о вероятности попадания этой величины в данный интервал.

Такая ситуация типична, когда единственной доступной информацией об исследуемой физической величине является интервал, указанный производителем измерительного прибора или сертификатом его калибровки. Аналогичная ситуация возникает в случаях, когда процесс измерения отягощен присутствием неизвестной систематической составляющей. В иностранной литературе подобные ситуации получили название «полное незнание» (*total ignorance*) [11, 14–18]. Во всех этих случаях ассоциированная нечеткая переменная имеет прямоугольную ФП с шириной, равной заданному интервалу.

Математические операции с нечеткими переменными достаточно просты. На самом деле, рассматриваемые нечеткие переменные могут быть объединены, используя хорошо известную интервальную математику [28], применяемую к каждому α-отрезку, с одним и тем же значением α [8, 9]. Это означает, что, например, когда две нечеткие переменные суммируются (рис.2), для каждого значения α ширина α-отрезка суммы $A + B$ равна сумме ширин α-отрезков A и B.

В соответствии с приведенными выше рассуждениями можно сделать вывод, что в качестве альтернативы случайным переменным нечеткие переменные могут также представлять распределения значений результатов измерений. Более того, в двух разных теориях различны способы определения фокальных элементов: вложенные интервалы в одном случае и множества, состоящие из одного элемента, — в другом. Различны и описания двух типов переменных (интервальная математика в одном случае и теория вероятностей — в другом). Поэтому можно сказать, что эти теории представляют две различные дополняющие друг друга концепции представления неполной информации об измеряемой величине [8, 9].

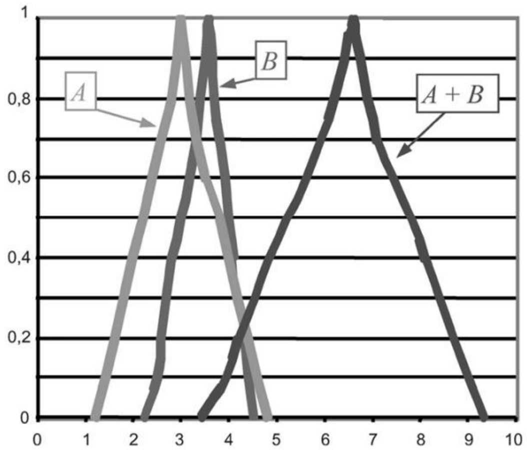

Рис. 2. Сумма двух нечетких переменных

В частности, случайная величина может адекватно и правильно использоваться для учета случайных воздействий на результат измерения. С другой стороны, нечеткая переменная может быть адекватно и правильно использоваться для учета неизвестных эффектов (случай «полного незнания»), в частности, некомпенсированных систематических воздействий на результат измерения.

Рассмотрим подробнее эту ситуацию. Пусть в процессе измерения присутствует неизвестный систематический эффект. Тогда единственным способом учесть его при оценке неопределенности является указание заданного интервала («полное незнание»), в который попадает измеряемое значение, поскольку это единственная доступная информация. Таким образом, очевидно, что если усреднить два результата измерения, на которые влияет одна и та же неизвестная систематическая составляющая, то среднее значение будет представлено прямоугольной нечеткой переменной, ширина которой такая же, как и у исходных двух измерений. Однако, если рассматриваемая систематическая составляющая не изменяется от измерения к измерению при полностью ее компенсирующей процедуре измерения (как в случае метода двойного взвешивания Гаусса, когда результаты двух взвешиваний на платформенных весах усредняются [20]), то будет доступна дополнительная информация, подтверждающая, что рассматриваемый систематический эффект больше не влияет на окончательный результат измерения. В этом случае использование интервальной математики не будет учитывать эту дополнительную доступную информацию, что приведет к завышенной оценке НИ. В таком конкретном случае имеющаяся информация позволяет сделать вывод, что систематический эффект не влияет на окончательное значение НИ, следовательно, результат измерения выражается не интервалом, а численным значением.

Поэтому, выражение НИ требует учета всех видов эффектов, как случайных, так и неизвестных. Хотя их можно рассматривать, как с помощью случайных величин, так и с помощью нечетких переменных, но подобное описание неудобно на практике. Следовательно, необходимо найти общую методику обработки всех эффектов — случайных и неизвестных, названных «полным незнанием».

Поскольку теория нечеткой логики (в которой определены нечеткие переменные) и теория вероятностей (в рамках которой определяются случайные переменные) имеют общие основания в теории доказательств, естественно определить новую более общую переменную в рамках этой более общей теории. Эта новая переменная должна синхронизировать поведение как нечетких, так и случайных величин и, следовательно, представлять различные виды вкладов в НИ. Она может быть названа СНП, так как подразумевает концептуально объединить две описанные выше переменные.

Определение этой переменной требует более детального рассмотрения фактических значений двух различных рассматриваемых распределений. Нечеткая переменная определяется ее ФП, значения которой варьируются от 0 до 1. С другой стороны, случайная величина определяется функцией плотности вероятности, площадь под которой равна единице. Это различие не позволяет объединить оба определения в едином математическом объекте. Следовательно, необходимо преобразовать функцию плотности вероятности в ФП или наоборот. Поскольку Руководство и стандарты [3–7] предполагают, что «идеальный метод для оценки и выражения НИ должен быть в состоянии предоставить … доверительный интервал», а нечеткая переменная просто определяется как набор доверительных интервалов, то преобразование функции плотности вероятности в ФП кажется более естественным [19].

В литературе было предложено несколько преобразований типа вероятность–возможность, от простого масштабирования до более сложных преобразований, основанных на различных принципах [14, 21–23]. Более простые из них не дают правильных результатов во всех возможных ситуациях, а наиболее сложные из них непросто применить на практике.

По этой причине авторы остановились на концепции, предложенной в работах [8, 9, 19], которая представляется довольно простой, и эффективно может быть объединена с традиционными понятиями доверительной вероятности и доверительного интервала, изложенными в Руководстве и стандартах [3–7]. Целью этой концепции является построение СНП, связанной с доступной измерительной информацией. СНП определяется двумя ФП, как показано в примере на рис. 3.

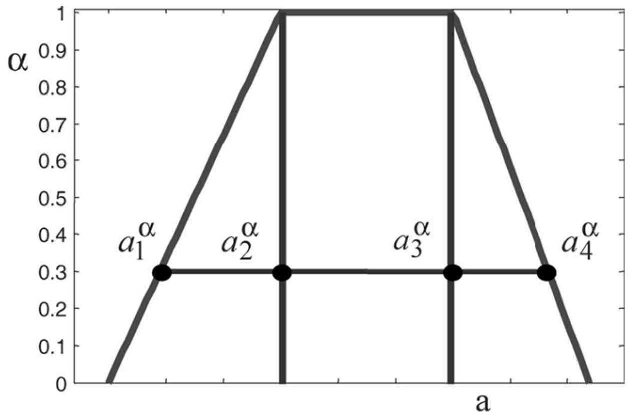

Рис. 3. Пример СНП

Когда результат измерения представлен СНП, его внутренняя ФП должна учитывать все вклады в НИ, а ее внешняя ФП должна учитывать все виды вкладов.

В частности, при построении СНП рассматриваются два отдельных этапа: на первом этапе учитываются разные виды вкладов по отдельности, что приводит к двум различным ФП; второй шаг объединяет их [8, 9, 19].

Что касается первого шага, результат измерения, на который влияют неизвестные факторы, обычно дается в терминах доверительного интервала, в пределах которого будет лежать результат измерения, при этом никакая другая информация недоступна. Эта ситуация «полного незнания» эффективно описывается прямоугольной нечеткой переменной [9]; поэтому сразу же задается внутренняя ФП окончательного СНП.

С другой стороны, результат измерения, на который влияют случайные факторы, обычно выражается в виде функции плотности вероятности. В этом случае ФП должна быть получена из заданного распределения вероятностей. Преобразование вероятность–возможность осуществляется непосредственно, если выполняются следующие условия:

1. Для функции плотности вероятности $p(x)$ уровень значимости q (где $0 \le q \le 1$), связанный с доверительным интервалом $[x_a,\ x_b]$, задается как $q = \int\limits_{x_a}^{x_b} p(x)dx$.

2. Для нечеткой переменной X уровень значимости $N(X_\alpha)$, связанный с характерным α-отрезком X_α, определяется выражением: $N(X_\alpha) = 1 - \alpha$.

ISSN 2541-9269

В монографии [8, 9] показано, что каждый интервал $\left[x_{a_k}, x_{b_k}\right]$, выбранный соответствующим образом на оси x кривой плотности $p(x)$, является α-отрезком соответствующей нечеткой переменной на уровне $\alpha_k = 1 - q_k$.

На втором этапе первая ФП (описывающая неизвестные эффекты) просто «вставляется» во вторую (отвечающую за случайные эффекты). Следовательно, первая ФП становится внутренней функцией СНП, в то время как вторая, которая надлежащим образом расширена, чтобы соответствовать первой, становится внешней ФП СНП [8].

Подобно нечеткой переменной, СНП также может быть определен набором вложенных α-отрезков, обозначенных четырьмя числами: $X_\alpha = \left[x_1^\alpha, x_2^\alpha, x_3^\alpha, x_4^\alpha\right]$, как показано на рис. 3 для α = 0,3.

Каждый α-отрезок $X_\alpha = \left[x_1^\alpha, x_4^\alpha\right]$ — это доверительный интервал, связанный с рассматриваемым уровнем значимости $N(X_\alpha) = 1 - \alpha$. Более детально, этот α-отрезок также определяет три подынтервала $\left[x_1^\alpha, x_2^\alpha\right]$, $\left[x_2^\alpha, x_3^\alpha\right]$ и $\left[x_3^\alpha, x_4^\alpha\right]$, которые предоставляют дополнительную информацию.

1) Внутренний интервал $\left[x_2^\alpha, x_3^\alpha\right]$ показывает вклад в неопределенность, вызванный действием неизвестных факторов, влияющих на результат измерения.

2) Внешние интервалы $\left[x_1^\alpha, x_2^\alpha\right]$ и $\left[x_3^\alpha, x_4^\alpha\right]$ показывают вклады в неопределенность, вызванные действием случайных факторов, влияющих на результат измерения.

3) Для внутреннего интервала ничего нельзя сказать о виде распределения значения измеряемой величины x, однако для внешних интервалов ее соответствующие распределения вероятностей известны.

Эти соображения приводят к выводу, что результат измерения может быть правильно выражен в терминах СНП, и эта переменная содержит полную информацию о возможных интервалах, «в пределах которых можно ожидать, что значения, которые вполне обоснованно может принимать физическая величина, подлежащая измерению, будут лежать с высокой степенью достоверности» [3, 4]. Фактически, с каждым из этих интервалов может быть связан определенный уровень значимости, а также могут действовать неизвестные и случайные вклады.

Для оценки величины неопределенности, когда результат получен при косвенном измерении, для СНП следует определить соответствующие математические правила. Эти правила могут различаться для разных интервалов на которые делится общий α-отрезок, в частности, внутренние и внешние интервалы, на которые делится α-отрезок, могут обрабатываться на основе различных правил. В приведенном примере (рис. 3) поскольку для центрального и боковых интервалов даны разные интерпретации, естественно определить для них отличные правила обработки.

2021, №3
ISSN 2541-9269

Что касается внутренних интервалов, по определению внутренняя ФП СНП является чистой нечеткой переменной; поэтому здесь применяется те же правила для нечетких переменных. Но когда рассматриваются внешние интервалы, то здесь исследователь располагает большей информацией, а именно, распределением вероятностей возможных значений измеряемой величины в пределах этих интервалов. Если бы внешние ФП были объединены с интервальной математикой, эта дополнительная информация не принималась бы во внимание, как и естественная компенсация случайных ошибок, которая возникает при их обработке. Поэтому правила обработки для внешних интервалов должны каким-либо способом учитывать функцию плотности вероятности, связанную с этим интервалом. Достаточно просто можно получить эти правила способом, излагаемым ниже, при этом также будут учтены предложения Руководства и стандартов [3–7].

Поскольку боковые интервалы каждого α-отрезка СНП были определены для учета чисто случайных вкладов, то предположим, что значения, попадающие в эти интервалы, имеют распределение Гаусса [24, 25]. Более того, естественно предположить, что на интервале $\left[x_1^\alpha, x_2^\alpha\right]$ случайный фактор подчиняется распределению, соответствующему левой половине гауссова распределения (для отрицательных значений x), а на интервале $\left[x_3^\alpha, x_4^\alpha\right]$ — соответствующему правой половине этого распределения (для положительных значений x).

Как известно, вероятность попадания случайной величины, имеющей распределение Гаусса, в интервал ± 3σ (σ — стандартное отклонение этой величины) примерно равна 0,99728 [24, 25]. Поэтому естественно считать, что вероятность попадания вне этого интервала примерно равна нулю. С учетом приведенных рассуждений можно полагать, что стандартное отклонение σ равно одной трети ширины интервалов $\left[x_1^\alpha, x_2^\alpha\right]$ или $\left[x_3^\alpha, x_4^\alpha\right]$.

Поскольку распределение суммы большого числа случайных величин стремится к нормальному закону, то можно считать, что распределение случайных факторов, влияющих на результат измерения, тоже имеет нормальное распределение. Поэтому вычислив стандартное отклонение этого распределения и умножив его на три, сразу можно оценить ширину двух боковых интервалов итоговой СНП. На рис. 4 показан пример суммы двух СНП с некоррелированными случайными вкладами.

Поэтому результаты измерений и связанные с ними неопределенности могут быть обработаны достаточно простым способом, чтобы оценить, как требуют стандарты [3–7], неопределенность косвенного измерения, надлежащим образом учтя вклады факторов различного типа.

2 Практический пример расчета неопределенности

Чтобы продемонстрировать справедливость предложенного подхода, рассматривается простой практический пример: оценка среднеквадратичного

ISSN 2541-9269

значения синусоидального напряжения с помощью методов цифровой обработки сигналов, описанных в работах [19, 26, 27].

Структурная схема цифрового измерительного прибора показана на рис. 5. Измеряемый синусоидальный сигнал задается прибором 5502А (фирмы *Fluke Corporation*, США). В качестве аналого-цифрового преобразователя (АЦП) использовался 12-разрядный AD7472 (фирмы *Analog Devices*, США) с тактовой частотой 500 кГц, который размещался на плате, встраиваемой в персональный компьютер. Алгоритм цифровой обработки оцифрованного сигнала был реализован на языке C++ и заключался в следующем.

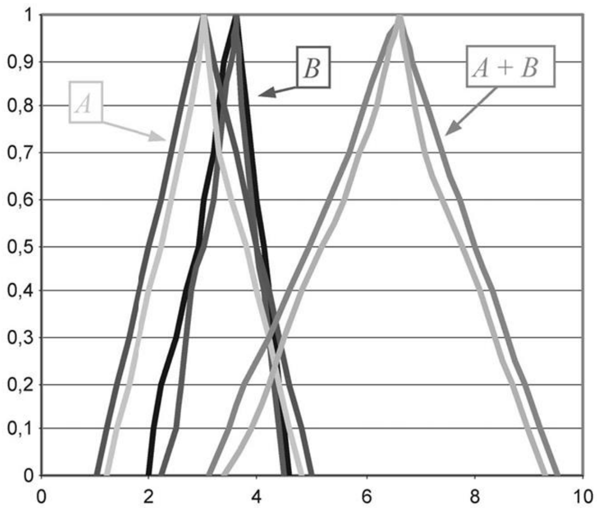

Рис. 4. Сумма двух СНП

Сначала каждый дискретный отсчет сигнала s_i ($0\le i \le N-1$, где N — число производимых отсчетов) преобразовывался в СНП с помощью соотношения:

$$S_i = \lfloor (s_i - E_q)/E_{gain} \rfloor - E_{off} , \quad (11)$$

где E_q, E_{gain} и E_{off} — вклады в неопределенность погрешности квантования, коэффициента усиления и напряжения смещения АЦП, соответственно.

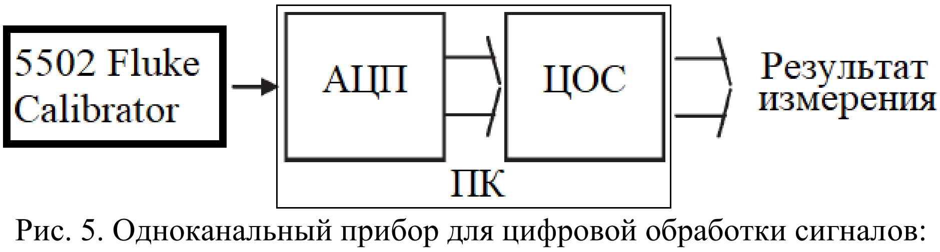

Рис. 5. Одноканальный прибор для цифровой обработки сигналов: ЦОС — программы цифровой обработки сигнала; ПК — персональный компьютер

После этого среднеквадратичное значение измеряемого напряжения получается из соотношения:

$$V_{rms} = \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} S_i^2} ,$$

где отсчеты S_i вычисляются из (11).

Величины неопределенностей, вносимые устройством квантования, усилителем АЦП и смещением АЦП определялись с помощью прецизионного автоматического измерителя, который позволяет проводить исследование сигнала в динамическом диапазоне от – 10 до 10 В с шагом 1 мВ. На рис. 6 показаны СНП вкладов усиления, смещения и погрешности квантования АЦП, полученные в результате процедуры его калибровки и выраженные в единицах СНП.

Результат измерения, представленный в единицах СНП, для входного синусоидального сигнала со среднеквадратическим значением 6,9 В, показан на рис. 7.

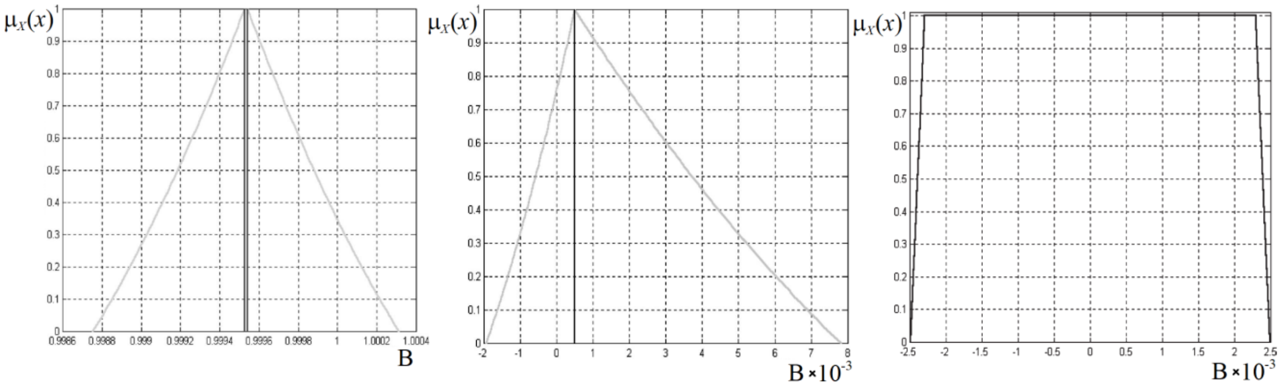

Рис. 6. ФП $\mu_X(x)$ в единицах СНП:
СНП, представляющие усиление АЦП (слева), смещение АЦП (в центре), погрешность квантования АЦП (справа). По оси абсцисс — напряжение в вольтах

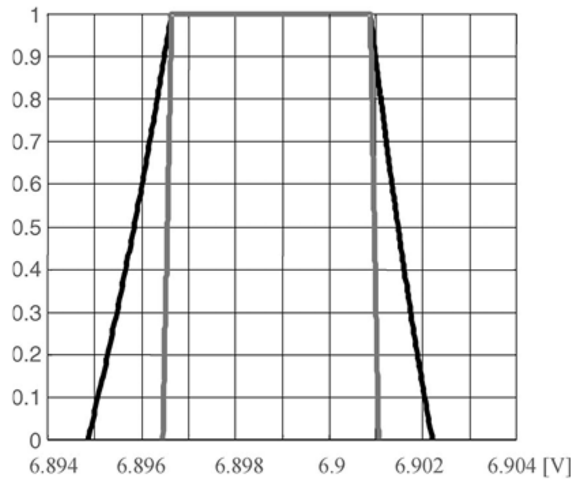

Рис. 7. Измеренное среднеквадратичное значение

Можно отметить, что значение (V_{rms} = 6,9 В) входного напряжения, обеспечиваемого калибратором, находится в пределах выходного СНП. Это доказывает, что все рассматриваемые источники неопределенности были правильно описаны в терминах СНП. Более того, согласно теоретическим соображениям, изложенным в предыдущем разделе, четко определены различные вклады в неопределенность, обусловленные случайными, систематическими и неизвестными эффектами.

Заключение

В работе показано, что результат измерения можно рассматривать с философской точки зрения как неполную информацию об измеряемой величине. Следовательно, оценка неопределенности измерения означает количественную оценку того, насколько неполной является эта информация. Согласно такой сформулированной концепции в работе представлен новый подход к выражению НИ, основанный на теории доказательств и полностью совместимый с теоретической основой стандартов, принятых Международной организацией по стандартизации.

Теория доказательств, которая включает в себя теорию вероятности и теорию возможностей как два разных частных случая, позволяет обрабатывать неполную информацию, порожденную всеми видами эффектов, и поэтому наилучшим образом подходит для выражения неопределенности в измерениях.

Библиографический список

1. Grubbs, F.E. Errors of Measurement, Precision, Accuracy and the Statistical Comparison of Measuring Instruments / F.E. Grubbs // Technometrics, 1973. – Vol. 15. – No. 1. – P. 53-66.
2. Походун, А.И. Экспериментальные методы исследований. Погрешности и неопределенности измерений / А.И. Походун. – СПб.: СПбГУ ИТМО, 2006. – 112 с.
3. BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, and OIML. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. – Geneva: ISO, 1995. – 118 p.
4. ISO/IEC GUIDE 98-3:2008. Uncertainty of Measurement — Part 3: Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. – Geneva: ISO, 2010. – 120 p.
5. ГОСТ Р 54500.1—2011/Руководство ИСО/МЭК 98-3:2008. Неопределенность измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределенности измерения. – М.: Стандартинформ, 2011. – 57 с.
6. ГОСТ Р 34100.1- 2017/ ISO/IEC Guide 98-1:2009. Неопределенность измерения. Часть 1. Введение в руководства по выражению неопределенности измерения. – М.: Стандартинформ, 2018. – 22 с.
7. ГОСТ Р 34100.1- 2017/ ISO/IEC Guide 98-1:2009. Неопределенность измерения. Часть 1. Введение в руководства по выражению неопределенности измерения. – М.: Стандартинформ, 2018. – 22 с.
8. Salicone, S. The Mathematical Theory of Evidence and Measurement Uncertainty – Comparison of Measurement Results Expressed in Terms of Random-Fuzzy Variables / S. Salicone // IEEE Instrum. & Meas. Mag., 2014. – Vol. 17. – No. 6. – P. 14-18. DOI: 10.1109/MIM.2014.6968924.
9. Salicone, S. Measurement Uncertainty: An Approach via the Mathematical Theory of Evidence / S. Salicone. – New York: Springer, 2007. – 228 p.
10. BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, and OIML. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. Supplement 1. Numerical Methods for the Propagation of Distributions. – Geneva: ISO, 2004. – 38 p.

11. Shafer, G. A Mathematical Theory of Evidence. Princeton / G. Shafer. – NJ: Princeton Univ. Press, 1976. – 300 p.
12. Zadeh, L.A. Fuzzy Logic and Approximate Reasoning / L.A. Zadeh // Synthese, 1975. – Vol. 30. – No. 1. – P. 407–428.
13. Ferrero, A. The Random-Fuzzy Variables: A New Approach for the Expression of Uncertainty in Measurement / A. Ferrero, S. Salicone // IEEE Trans. Instrum. Meas., 2004. – Vol. 53. – No. 5. – P. 1370–1377.
14. Klir, G.J. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications / G.J. Klir, B. Yuan. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1995. – 592 p.
15. Применение метода неопределенности для анализа погрешностей многополюсного рефлектометра / А.А. Солопекина, А.А. Львов, Н. Семежев, Н.С. Вагарина // Надежность и качество: тр. Междунар. симп.: в 2 т. – Пенза: ПГУ, 2017. – Т. 2. – С. 136-139.
16. Solopekina, A.A. Calculation of measurement uncertainties of multi-port transmission line reflectometer / A.A. Solopekina, A.A. L'vov, N. Semezhev // Proc. 2014 Int. Conf. on Actual Problems of Electron Devices Engineering. Saratov, Russia: IEEE, 2014. – P. 356-362.
17. Львов, А.А. Расчет неопределенностей измерения характеристик многозондовой измерительной линии / А.А. Львов, А.А. Солопекина, Н.Семежев // Компьютерные науки и информационные технологии: материалы Междунар. науч. конф. – Саратов: Издат. центр «Наука», 2016. – С. 396-400.
18. Application of the Uncertainty Method for Analysis of Multi-Port Correlator Accuracy /A.A. Solopekina, N. Semezhev, A.A. L’vov et al. // Proc. 2017 IEEE Russia Section Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering Conf. – St. Petersburg, Russia: IEEE, 2017. – P. 505-509.
19. Ferrero, A. A Method Based on Random Fuzzy Variables for On-line Estimation of the Measurement Uncertainty of DSP-Based Instruments / A. Ferrero, R. Gamba, S. Salicone // IEEE Trans. Instrum. Meas., 2004. – Vol. 53. – No. 5. – P. 1362–1369.
20. Davidson, S. The Measurement of Mass and Weight / S. Davidson, M. Perkin, M. Buckley. –Teddington, UK: National Physical Laboratory, 2004. – 29 p.
21. Mauris, G. A Fuzzy Approach for the Expression of Uncertainty in Measurement / G. Mauris, V. Lasserre, L. Foulloy // Measurement, 2001. – Vol. 29. – No. 3. – P. 165–177.
22. Mauris, G. A Simple Probability-Possibility Transformation for Measurement Error Representation: A Truncated Triangular Transformation / G. Mauris, V. Lasserre, L. Foulloy // Proc. World Congr. IFSA. – Prague, Czech Republic: IFSA, 1997. – P. 476–481.
23. Probability-Possibility Transformations, Triangular Fuzzy Sets, and Probabilistic Inequalities / D. Dubois, L. Foulloy, G. Mauris, H. Prade // Reliable Computing, 2004. – No. 10. – P. 273–297.

24. Львов, А.А. Основы статистической обработки измерительной информации в задачах автоматического управления: учеб. пособие для студ. вузов / А.А. Львов. – Саратов: СГТУ, 2005. – 84 с.
25. Мусатов, М.В. Анализ моделей метода наименьших квадратов и методов получения оценок / М.В. Мусатов, А.А. Львов // Вестник Саратовского государственного технического университета. –2009. – № 4(43). – С.137-141.
26. Львов, А.А. Линейная петлевая схема точной обработки сигналов датчиков / Львов А.А., Пыльский В.А. // Вестник Саратовского государственного технического университета, 2004. – № 2 (3). – С. 102-112.
27. Gureyev, V.V. Improvement of the Current Loop Circuit for AC and DC Applications Based on Digital Signal Processing / V.V. Gureyev, A.A. L'vov, V.A. Pylskiy // Proc. IEEE Instrum. Meas. Techn. Conf. – Sorrento, Italy: IEEE, 2006. – P. 1257-1261.
28. Интервальный метод расчета неопределенностей в эксперименальных исследованиях тензодатчиков / П.А. Шаронов, С.П. Ивженко, Е.Г. Умнова и др. // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках, 2021. – № 2; URL: mathmod.esrae.ru/34-126.