

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: mathmod.esrae.ru/37-132

Ссылка для цитирования этой статьи:

Бахшиев Т.Д., Сопенко А.А. Сложные колебания пологих оболочек под действием переменной во времени нагрузки и сжимающих усилий // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2022. №1

УДК 539.3; 541.1 DOI: 10.24412/2541-9269-10.24412/2541-9269-2022-1-01-11

СЛОЖНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОЙ ВО ВРЕМЕНИ НАГРУЗКИ И СЖИМАЮЩИХ УСИЛИЙ

Бахшиев Т.Д.¹, Сопенко А.А.²

¹ Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, bakhshievtd@mail.ru

² Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, saasar@mail.ru

COMPLEX OSCILLATIONS OF SHALLOW SHELLS UNDER THE INFLUENCE TIME VARIABLE LOADING AND COMPRESSIVE FORCES

Bakhshiev T.D.¹, Sopenko A.A.²

¹ Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, bakhshievtd@mail.ru

² Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, saasar@mail.ru

Аннотация. В работе рассматриваются сложные колебания пологих оболочек под действием переменной во времени равномерно распределённой по плану нагрузки и сжимающих усилий. Рассматривается смена форм колебаний оболочки в зависимости от приложенных нагрузок. Рассматривается влияние динамической потери устойчивости на формы колебаний оболочки.

Ключевые слова: сложные колебания, пологие оболочки, динамическая потеря устойчивости, переменная во времени нагрузка, сжимающие усилия.

Abstract. The work deals with problem of complex oscillations of shallow shells under the influence time variable loading and compressive forces. The change of shell oscillation forms depending on the applied loads is considered. The influence of dynamic loss of stability on the shell oscillation forms is considered.

Keywords: complex oscillations, shallow shells, dynamic loss of stability, time variable loading, compressive forces.

Задача изучения сложных колебаний тонких пластин и оболочек под действием продольных и поперечных нагрузок многократно являлась объектом исследований, укажем в качестве примера на работы [1-3]. На наш взгляд, было бы достаточно интересно проследить динамику пологих оболочек, в частности, сценарии перехода более простых форм колебаний в более сложные при комбинированном воздействии различных видов нагрузки. Обычно поперечные нагрузки принимаются либо постоянными во времени, либо изменяющимися по некоторому известному закону, например, $p = p_0 \sin \omega t$. Продольные нагрузки часто считаются постоянными во времени. В [4] рассматриваются сжимающие усилия, линейно зависящие от времени. В настоящей работе рассматриваются колебания гибкой пологой сферической прямоугольной в плане оболочки под действием поперечной равномерно распределенной по плану нагрузки, изменяющейся во времени по закону $q = q_0 \sin \omega t$, и постоянных во времени сжимающих усилий p_1 и p_2 .

Динамика гибких пологих, прямоугольных в плане оболочек, находящихся под действием продольных и поперечных нагрузок, в смешанной форме в рамках модели Кирхгофа - Лява в безразмерном виде, согласно [4], описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12(1-\nu^2)} \nabla^4 w - L(w, F) - \nabla_k^2 F + p_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + p_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \\ & + k_1 \lambda^2 p_1 + k_2 \lambda^{-2} p_2 - q + k(\ddot{w} + \varepsilon \dot{w}) = 0, \\ & \nabla^4 F + \nabla_k^2 w + \frac{1}{2} L(w, w) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $k = \frac{a^2 b^2 \rho \alpha^2}{Eh^6}$.

Здесь F - функция усилий, w - прогиб в направлении, перпендикулярном срединной поверхности, a , b , h - размеры оболочки вдоль осей x_1 , x_2 , x_3 соответственно, E и ν - модуль Юнга и коэффициент Пуассона, ρ - плотность.

При этом для (1) использовались следующие безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 = \frac{x_1}{a}, \quad \bar{x}_2 = \frac{x_2}{b}, \quad \bar{x}_3 = \frac{x_3}{h}, \quad \bar{w} = \frac{w}{h}, \quad \bar{F} = \frac{F}{Eh^3}, \quad \lambda = \frac{a}{b}, \quad \bar{t} = \frac{t \cdot \alpha}{h^2}, \\ \bar{q} = q \frac{a^2 b^2}{Eh^4}, \quad \bar{k}_1 = k_1 \frac{a^2}{h}, \quad \bar{k}_2 = k_2 \frac{b^2}{h}, \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon \frac{h^2}{\alpha}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь чёрточки, опущенные в (1) для удобства, стоят над безразмерными переменными. \bar{k}_1 , \bar{k}_2 - безразмерные параметры кривизны, α - коэффициент температуропроводности. Комплекс программ, подготовленный и использованный для численного решения системы (1), включает в себя также блоки для решения физически нелинейных задач, задач, позволяющих

учитывать температурные нагрузки путем решения трехмерного уравнения теплопроводности с использованием произвольных краевых условий, также набор программ позволяет учитывать эффект связанности полей деформаций и температуры. Это объясняет неожиданное появление коэффициента температуропроводности α в (2) для приведения времени к безразмерному виду. Большинство из представленных ниже задач были также решены при учете влияния связанности деформаций и температуры, но в данных задачах это не оказало сколько-нибудь существенного влияния на их решения. Разогрев оболочки за счет учета связанности не превышал 6 градусов, а учет внешних тепловых нагрузок пока не планировался. Поэтому полученные результаты решения связанных задач в данной работе не приводятся.

Под дифференциальным оператором $L(\cdot, \circ)$ понимается

$$L(\cdot, \circ) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2(\circ)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2(\circ)}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2(\circ)}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (3)$$

Некоторые другие использованные обозначения, в том числе для широко известных дифференциальных операторов, используемых в (1), полностью совпадают с приведенными в [5].

В качестве граничных условий выбрано шарнирное опирание по контуру оболочки на гибкие, нерастяжимые в касательной плоскости ребра. На границах $x_1 = 0; 1$ (в безразмерном виде) использованы следующие граничные условия:

$$w = \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0, \quad \varepsilon_{22} = 0, \quad F = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = p_1. \quad (4)$$

Аналогичные граничные условия ставятся на границах $x_2 = 0; 1$. На внешней поверхности оболочки $z = -\frac{1}{2}$ ($z = -\frac{h}{2}$ в размерном виде) действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q = q_0 \sin \omega t$, при расчетах частота ω выбиралась близкой к собственной частоте колебаний конструкции.

В начальный момент времени оболочка находится в покое, в качестве начальных условий использованы соотношения $w|_{t=0} = 0, \quad \dot{w}|_{t=0} = 0$.

Первое уравнение (1) после дискретизации производных по пространственным переменным при помощи метода конечных разностей второго порядка точности сводилось к системе обыкновенных дифференциальных уравнений по времени. Второе уравнение системы (1) после такой же дискретизации сводилось к системе линейных алгебраических уравнений относительно функции усилий F , которая решалась методом Гаусса на каждом шаге по времени. Интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений осуществлялось при помощи схемы Адамса-Бэшфорта [6], заключающейся в комбинации явного (экстраполяционного) и

неявного (интерполяционного) методов Адамса 3-го и 4-го порядка точности соответственно, что означает использование двух итераций.

Численные эксперименты показали, что для устойчивости вычислительного процесса вышеуказанную схему желательно дополнить третьей итерацией с использованием неявного метода Адамса 5-го порядка точности. Использование метода 5-го порядка не требует ещё одного вычисления правых частей уравнений, хотя время счета, безусловно, увеличивается за счет увеличения количества вычислительных операций на одном шаге времени.

Использование данной схемы решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений обусловлено алгоритмом решения задачи, при котором данные с одного шага по времени используются на следующем. В частности, подобная схема весьма удобна при решении связанных задач термоупругости, где сам алгоритм требует малого шага по времени. И чтобы избежать влияния различных численных методов на решение, подобная же схема была использована для интегрирования по времени несвязанных задач. Эффективность и устойчивость данной схемы проверялась на модельных задачах, выбором шага интегрирования по времени, обеспечивающим устойчивость полученного численного решения.

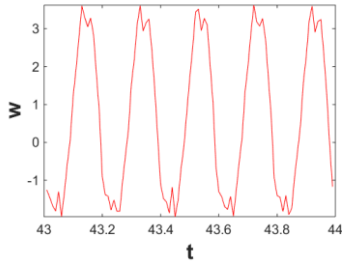
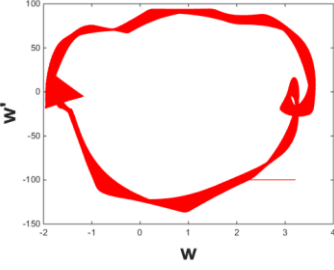
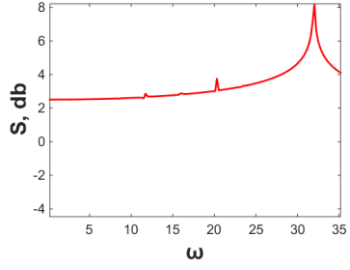
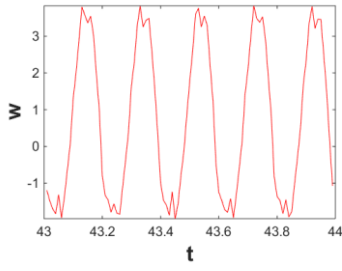
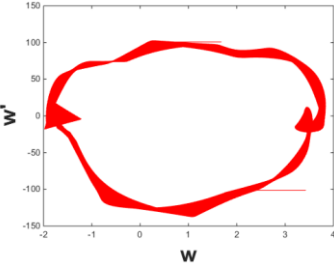
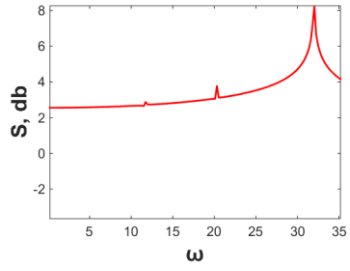
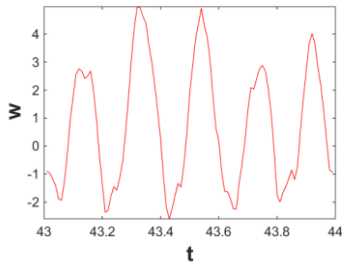
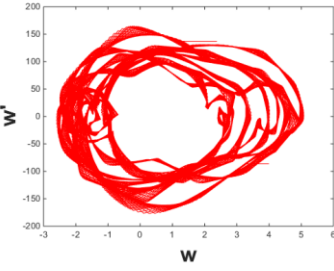
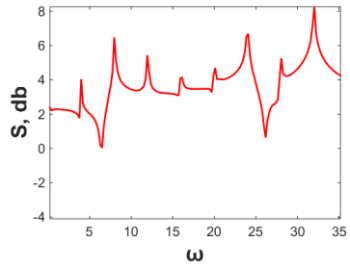
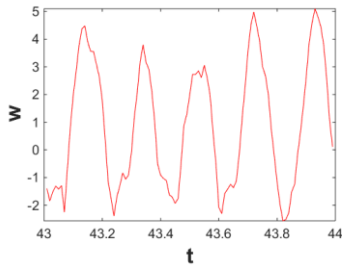
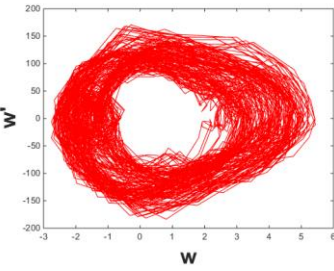
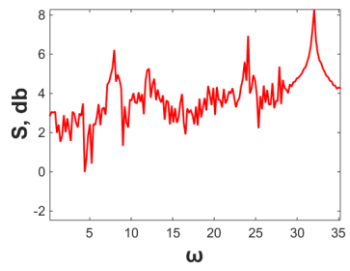
Для сравнения полученных результатов с результатами [5] рассматривалась оболочка с теми же геометрическими и физическими параметрами: квадратная в плане пологая оболочка, изготовленная из сплава АМц, $a=b=0.1$ м, отношение $a/h=100$. Безразмерные параметры кривизны $k_1=k_2=24$. Оболочка имеет физические параметры: $E=69$ ГПа, $\nu=0,3$, $\rho=2800$ кг/м³, $\alpha=6,4 \cdot 10^{-5}$ м²/сек. На оболочке на поверхности $x_3=-h/2$ в начальный момент начинает действовать распределённая нагрузка $q=q_0 \sin \omega t$, и постоянные сжимающие усилия p_1 и p_2 . Частота вынуждающей нагрузки $\omega=32$ выбиралась такой же, как и в [5], близкой к собственной частоте колебаний данной оболочки. Численно частоту собственных колебаний определяли при помощи следующей процедуры. После выведения оболочки из положения равновесия под действием малой нагрузки, эта нагрузка снималась, а полученная при свободных колебаниях зависимость прогибов в центральной точке плана оболочки от времени подвергалась быстрому преобразованию Фурье. Полученную собственную частоту колебаний при необходимости можно было уточнить, просчитывая поведение оболочки под действием переменной во времени поперечной нагрузки, указанной в постановке задачи. Нагрузка, действующая с частотой, совпадающей с собственной, обеспечивала оболочке максимальную амплитуду колебаний. Сравнивая, в частности, численно полученные частоты собственных колебаний пластинок с частотами, полученными при помощи известной формулы теоретической механики, получали различие менее 1%.

Далее все результаты приводятся в безразмерном виде.

Рассмотрим колебания полой оболочки с указанными параметрами под действием переменной поперечной нагрузки и постоянных сжимающих усилий различной величины.

$$k_1 = 24, k_2 = 24, a/b = 1, \omega = 32, P_1 = P_2 = 2$$

Таблица 1

	Сигнал	Фазовый портрет	Спектр мощности
80			
92			
97.2			
100			

Продолжение таблицы 1

	Сигнал	Фазовый портрет	Спектр мощности
105			
160			

Естественно, что при малых значениях сжимающих усилий p_1 и p_2 (меньше, чем 0.3) колебания оболочки очень напоминают результаты, полученные для $p_1 = p_2 = 0$ в [5]. Наблюдается переход от гармонических колебаний к квазипериодическим, возникновение узкого диапазона значений нагрузки q с хаотическими колебаниями, возврат к квазипериодическим и окончательный переход к хаотическим, что соответствует сценарию Помо-Манневиля. Здесь также можно провести аналогию с явлением модуляционной неустойчивости, приводящей к разбиению периодических волн на последовательность квазипериодических или локализованных волновых пакетов в цилиндрических оболочках [7].

При $p_1 = p_2 = 2$ гармонические колебания наблюдались только при достаточно малых значениях $q < 20$, тогда как в [5] до значения $q = 40$. Далее до значения $q = 97$ наблюдались квазипериодические колебания примерно в одном диапазоне прогибов w . Увеличение нагрузки q более чем в три раза не приводило к существенному изменению значений w (табл. 1).

В табл. 1 и других нижеприведенных таблицах приведены зависимости сигнала $w(t)$ для небольшого “окна” во времени, фазовый портрет и спектр мощности, построенные для центральной точки плана оболочки.

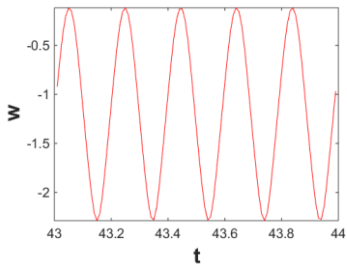
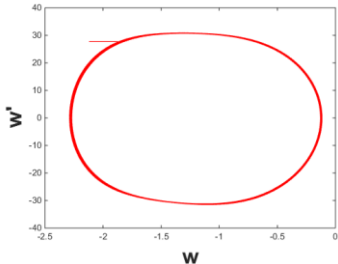
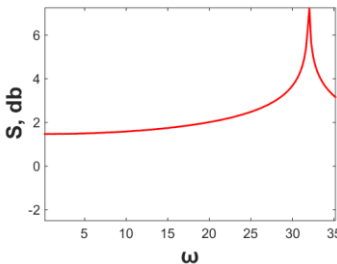
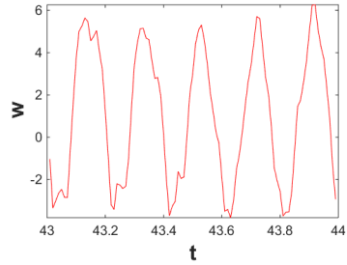
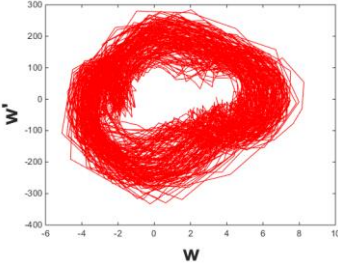
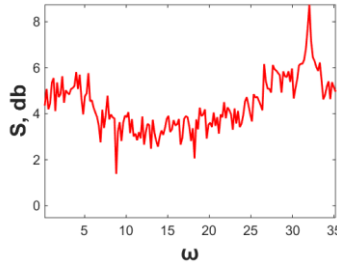
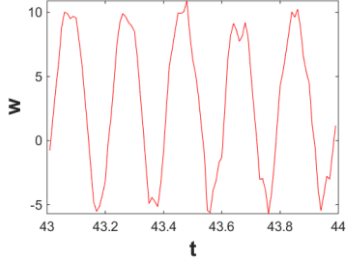
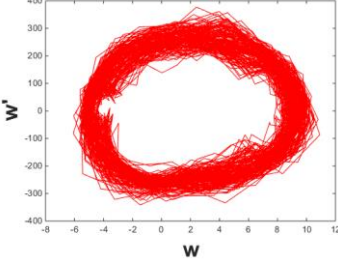
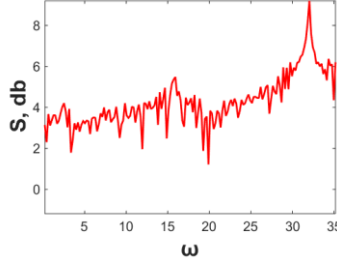
При $q = 97.2$ наблюдалось появление большого количества новых

независимых частот и далее наблюдался очень короткий диапазон значений q , вызывающих хаотические колебания. Форма колебаний, как и в [5], влияет на диапазон w . Так, при $q=100$ и хаотических колебаниях прогиба w больше, чем при $q=105$, когда наблюдался возврат к квазипериодическим колебаниям.

Следует отметить, это окончательное возникновение хаотических колебаний наступает в окрестностях значения $q=160$ при полном прохлопывании оболочки, что можно связать согласно [4] с динамической потерей устойчивости. Отметим, что квазипериодические колебания оболочки в интервале значений $q=105-155$ происходили в качественно похожем диапазоне w . Аналогично хаотические колебания при $q=160-180$ также происходили примерно в одинаковом интервале значений прогиба w .

$$k_1 = 24, k_2 = 24, a/b = 1, \omega = 32, P_1 = P_2 = 5$$

Таблица 2

	Сигнал	Фазовый портрет	Спектр мощности
75			
76			
78			

Продолжение таблицы 2

	Сигнал	Фазовый портрет	Спектр мощности
80			
110			

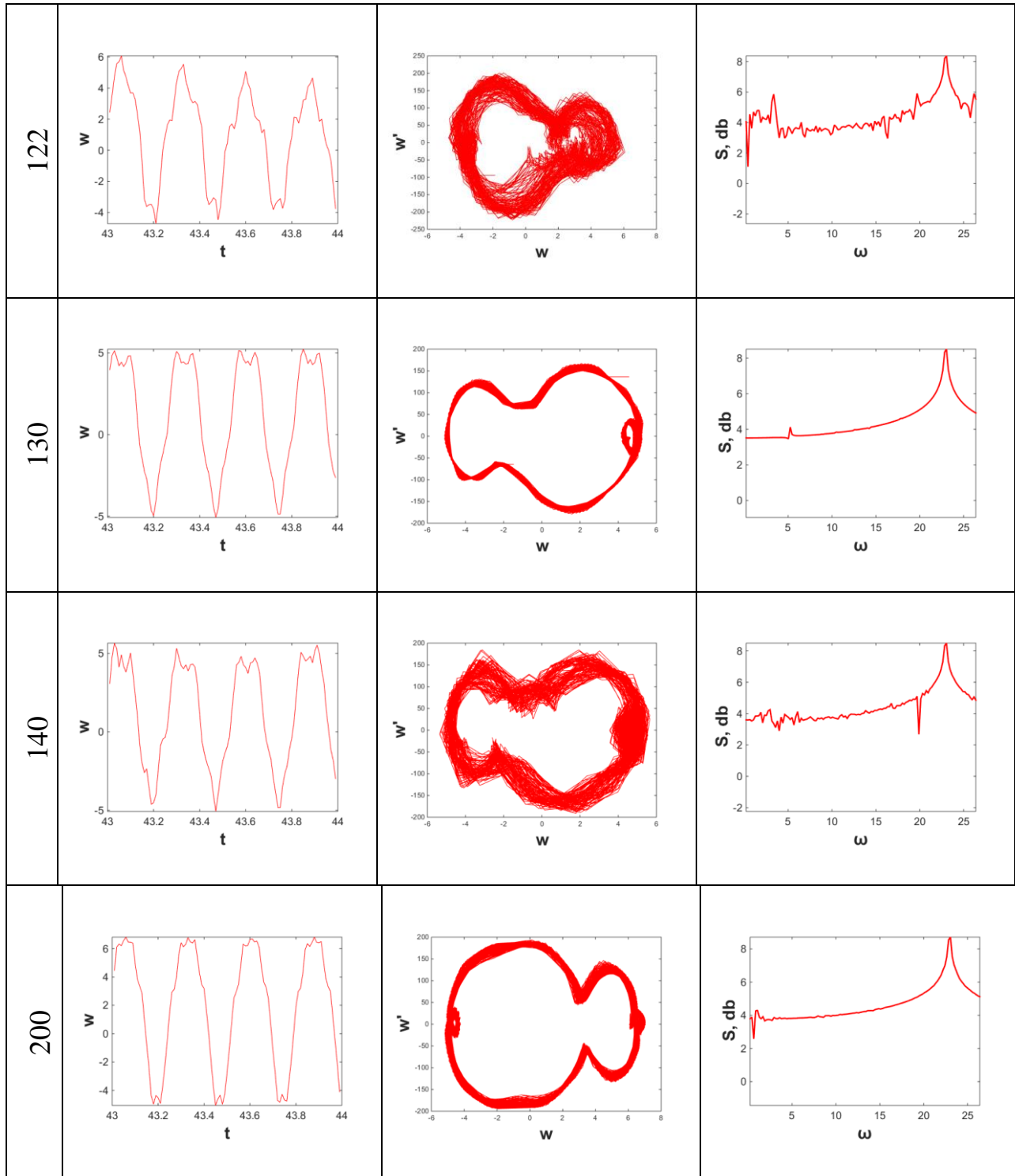
При значении $p_1 = p_2 = 5$ и совпадающих остальных геометрических и физических параметрах оболочки, характер её колебаний качественно меняется. При изменении q от $q = 75$ до $q = 76$ происходил переход от гармонических колебаний к хаотическим, минуя стадию квазипериодических колебаний (табл. 2). При этом наступление хаотических колебаний, как и ранее, совпадало с прохлопыванием оболочки

$$k_1 = 16, k_2 = 16, a/b = 1, \omega = 22.95, P_1 = P_2 = 5$$

Таблица 3

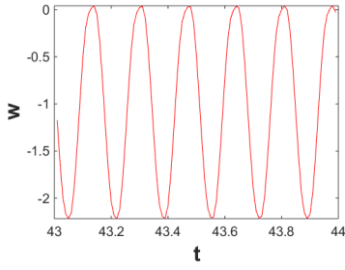
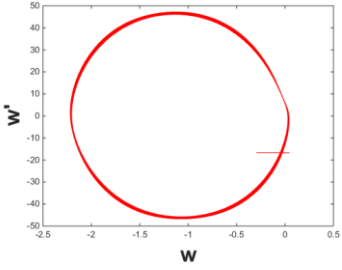
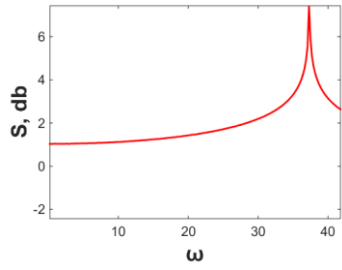
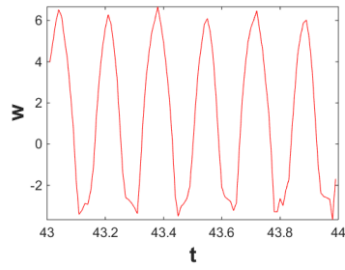
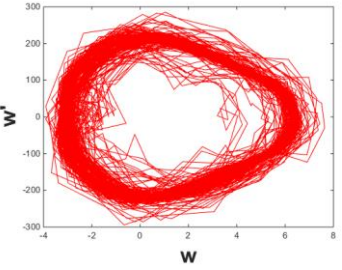
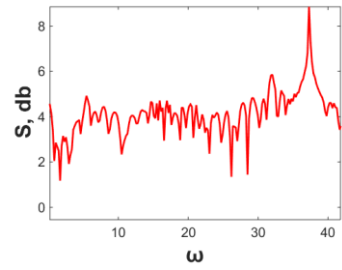
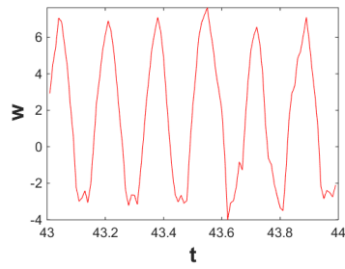
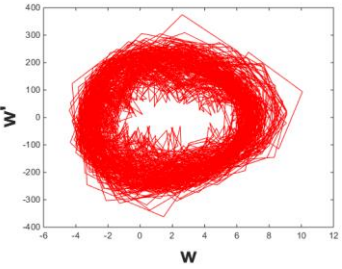
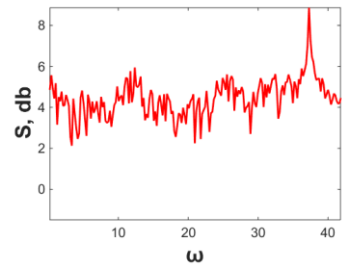
	Сигнал	Фазовый портрет	Спектр мощности
120			

Продолжение таблицы 3



$$k_1 = 32, k_2 = 32, a/b = 1, \omega = 37.33, P_1 = P_2 = 5$$

Таблица 4

	Сигнал	Фазовый портрет	Спектр мощности
115			
118			
160			

В табл. 3 и табл. 4 приведены результаты по численному исследованию динамического поведения оболочки при $p_1 = p_2 = 5$ для безразмерных параметров кривизны $k_1 = k_2 = 16$ и $k_1 = k_2 = 32$ соответственно. При этом частота вынуждающей нагрузки опять выбиралась близкой к численно определяемым собственным частотам данных конструкций: $\omega = 22.95$ и $\omega = 37.33$ соответственно.

Отметим, что при $k_1 = k_2 = 16$ наблюдался переход от гармонических колебаний к колебаниям более сложных форм при возникновении сменяющихся зон хаотических и квазипериодических колебаний, что соответствует сценарию Помо-Манневилля. Но даже первый переход от гармонических колебаний к квазипериодическим и хаотическим совпадает с прохлопыванием оболочки, т.е. с динамической потерей устойчивости.

При $k_1 = k_2 = 32$ сценарий перехода от гармонических колебаний к хаотическим качественно отличается от сценария Помо-Манневиля. Происходит безвозвратный переход от гармонических колебаний к хаотическим, совпадающий с динамической потерей устойчивости оболочкой и её прохлопыванием.

Выводы. Показано, что при совместном воздействии продольных и поперечных сил могут возникать новые сценарии перехода от гармонических колебаний к хаотическим. Также показано, что во всех рассмотренных задачах возникновение безвозвратных хаотических колебаний, а иногда и хаотических колебаний, переходящих с ростом амплитуды поперечной нагрузки в квазипериодические, связано с динамической потерей устойчивости рассматриваемой конструкции.

Литература

1. Баженов В.Г., Рябов А.А., Птицын С.О. Динамическая потеря устойчивости и закритическая деформация цилиндрических оболочек // Проблемы прочности и пластичности. 2017. Т. 80. №2. С. 209-218.
2. Грачёв В.А., Найштут Ю.С. Задачи устойчивости тонких упругих оболочек // Компьютерные исследования и моделирование. 2018. Т. 10. №6. С. 775-787.
3. Коган Е.А., Юрченко А.А. Нелинейные колебания трехслойных и многослойных пластин и оболочек при периодических воздействиях (обзор) // Известия МГТУ МАМИ. 2014. Т. 4. №1(19). С. 55-70.
4. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
5. Сопенко А.А., Майорова О.А., Черепанов М.Д. Сложные колебания геометрически и физически нелинейных пологих оболочек // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2016. № 3. URL: mathmod.esrae.ru/3-16.
6. Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир. 1979. 312 с.
7. Землянухин А.И., Бочкарёв А.В. Осесимметричные нелинейные модулированные волны в цилиндрической оболочке // Акустический журнал. 2018. Т. 64. №4. С. 417-423.