Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: mathmod.esrae.ru/37-134
Ссылка для цитирования этой статьи:
Сопенко А.А., Петрунин И.А. Численное моделирование колебаний пологой нелинейной оболочки под действием подвижной нагрузки // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2022. №1

УДК 539.3; 541.1 DOI: 10.24412/2541-9269-10.24412/2541-9269-2022-1-22-33

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПОЛОГОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

Сопенко А.А.[1], Петрунин И.А.[2]
[1] Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, saasar@mail.ru
[2] Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, ivan.petrunin2000@yandex.ru

NUMERICAL SIMULATION OF OSCILLATIONS OF A SHALLOW NONLINEAR SHELL UNDER THE ACTION OF A MOVING LOAD

Sopenko A.A.[1], Petrunin I.A.[2]
[1] Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, saasar@mail.ru
[2] Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, ivan.petrunin2000@yandex.ru

Аннотация. В работе рассматриваются сложные колебания геометрически нелинейной пологой оболочки под действием равномерно распределённой по некоторой части плана оболочки нагрузки постоянной интенсивности, движущейся с постоянной скоростью вдоль одной из координатных осей. Рассматривается смена форм колебаний оболочки в зависимости от скорости движения и величины приложенной нагрузки.

Ключевые слова: сложные колебания, пологие оболочки, подвижная нагрузка.

Abstract. The paper considers complex oscillations of a geometrically nonlinear shallow shell under the action of a load of constant intensity uniformly distributed over some part of the shell plan, moving at a constant speed along one of the coordinate axes. The change of shell oscillation forms is considered depending on the speed of movement and the magnitude of the applied load.

Keywords: complex oscillations, shallow shells, moving load.

Задачи изучения колебаний балок, пластин, оболочек под действием подвижных нагрузок ведут свою историю еще с XIX века. В исследованиях академика А.Н. Крылова, в частности, в начале XX века проводится наиболее полное на то время исследование реакции балки на подвижную нагрузку. Задачи о поведении конструкций под действием подвижных нагрузок возникают при изучении монорельсовых конструкций [1], движений колеса [2] и огромного количества других задач.

Укажем на работу [3], в которой, в частности, содержится исторический и научный обзоры данного вопроса, приводятся математические модели различных задач, связанных с подвижными нагрузками, рассматриваются приближенные аналитические и численные методы решения задач, связанных с балками, арочными системами, цилиндрическими и другими оболочками.

Дальнейшее развитие вычислительное техники расширяет возможности численного решения задач. Данная работа посвящена изучению колебаний прямоугольной в плане сферической геометрически нелинейной пологой оболочки под действием равномерно распределённой на части плана оболочки нагрузки интенсивности q. Эта часть плана представляет собой полосу размером $0 \le x_1 \le a$, где a – размер оболочки вдоль x_1. Относительно оси x_2 ширина этой полосы составляет $b/8$, где b – размер оболочки относительно x_2. Эта полоса нагрузки движется вдоль x_2 с постоянной скоростью V. Как только полоса нагружения уходит с плана оболочки на линии $x_2 = b$, на линии $x_2 = 0$ начинает свое движение новая такая же полоса, обеспечивая периодическое нагружение оболочки.

При этом не учитываются силы инерции подвижной нагрузки. Ширина нагруженной части плана оболочки в $1/8$ размера относительно оси x_2 в данной задаче не менялась. Рассматривались колебания оболочки в зависимости от интенсивности нагружения q и скорости движения нагрузки V.

Система уравнений, описывающих указанную задачу, широко известна в механике тонкостенных конструкций. В рамках модели Кирхгофа – Лява в смешанной форме в безразмерном виде она имеет следующий вид [4]:

$$\frac{1}{12(1-\nu^2)}\nabla^4 w - L(w,F) - \nabla_k^2 F - q + k(\ddot{w} + \varepsilon\dot{w}) = 0$$

$$\nabla^4 F + \nabla_k^2 w + \frac{1}{2}L(w,w) = 0 \qquad (1)$$

Использованы обозначения: F и w – функция напряжений и прогиб в направлении, перпендикулярном срединной поверхности соответственно. w считается положительным, если направлен к центру кривизны. E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона, ρ – плотность, ε – коэффициент демпфирования. Значение k приведено в (2).

Использована декартова система координат x_1, x_2, x_3, прогибы w откладываются вдоль оси x_3, размеры оболочки вдоль указанных осей обозначатся a, b, h. Безразмерные переменные для (1) вводились следующим образом, здесь черточки стоят над безразмерными величинами, во всех формулах, кроме (2), черточки для удобства и краткости опущены

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1}{a},\ \bar{x}_2 = \frac{x_2}{b},\ \bar{x}_3 = \frac{x_3}{h},\ \bar{w} = \frac{w}{h},\ \bar{F} = \frac{F}{Eh^3},$$

$$\lambda = \frac{a}{b},\ \bar{t} = \frac{t \cdot \alpha}{h^2} \tag{2}$$

$$\bar{q} = q\frac{a^2 b^2}{Eh^4},\ \bar{k}_1 = k_1 \frac{a^2}{h},\ \bar{k}_2 = k_2 \frac{b^2}{h},\ \bar{\varepsilon} = \varepsilon \frac{h^2}{\alpha},$$

$$k = \frac{a^2 b^2 \rho \alpha^2}{Eh^6}.$$

В (2) $\bar{k}_1, \bar{k}_2$ – безразмерные кривизны оболочки, α – коэффициент температуропроводности. Под обозначением $L(\cdot,\circ)$ в (1) понимается

$$L(\cdot,\circ) = \frac{\partial^2(\cdot)\partial^2(\circ)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^2(\cdot)\partial^2(\circ)}{\partial x_2^2 \partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2(\cdot)\partial^2(\circ)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1 \partial x_2}. \tag{3}$$

Система (1) неоднократно приводилась во многих работах, поэтому остальные использованные обозначения более подробно описаны в [5].

В начальный момент времени оболочка находится в покое. По всему контуру оболочка считается шарнирно опертой на гибкие, нерастяжимые в касательной плоскости рёбра. Так, для краёв $x_1 = 0$; α использованы граничные условия

$$w = \frac{\partial^2 w}{dx_1^2} = 0,\ \varepsilon_{22} = 0,\ \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} = 0. \tag{4}$$

Алгоритм численного решения (1) также подробно изложен в [5]. Укажем только, что использован метод конечных разностей для дискретизации производных по x_1, x_2, x_3, в результате чего первое уравнение из (1) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, для решения которых достаточно использовать метод Рунге – Кутты 4 порядка точности. Второе уравнение (1) сводится к системе линейных уравнений, которая решается на каждом шаге по времени методом Гаусса.

Использование для расчётов подвижной нагрузки интенсивности q, движущейся со скоростью V относительно оси x_2, приводит к тому, что решается задача, не симметричная относительно этой оси. Если обычно задача решается на $1/4$ плана оболочки в предложении, что решение симметрично

ISSN 2541-9269

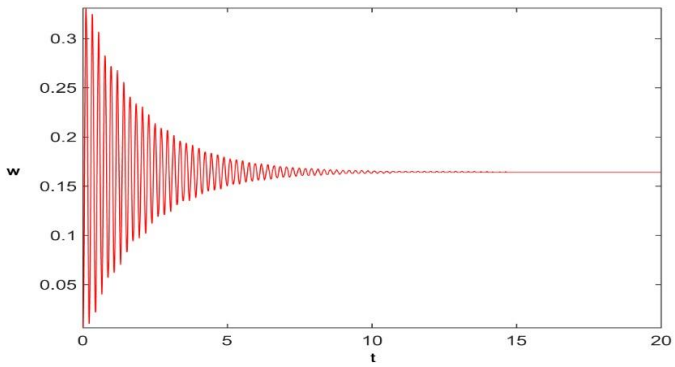
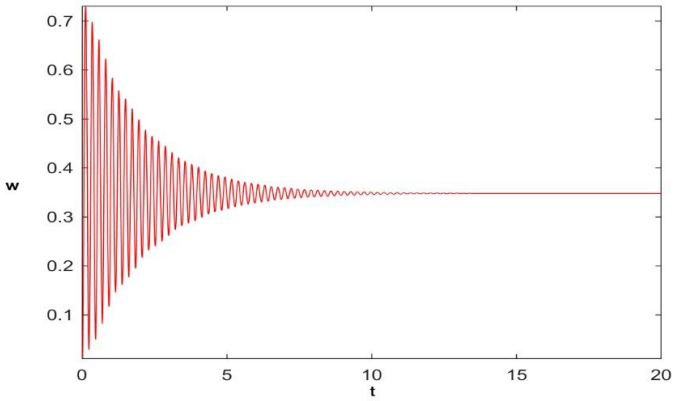
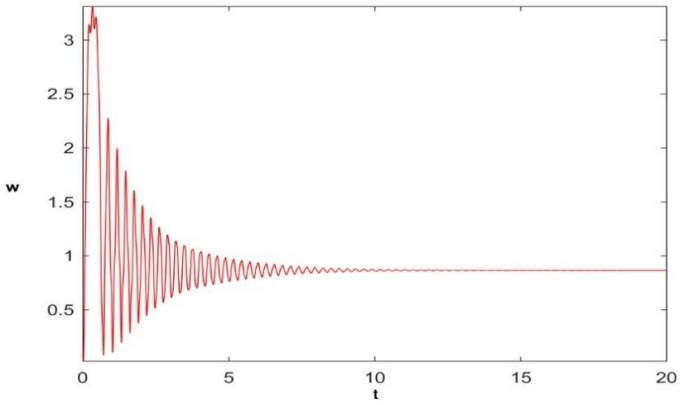
относительно осей симметрии оболочки, то здесь приходится решать задачу на $1/2$ плана, что приводит к удвоению затрат машинного времени на решение.

Была рассмотрена оболочка с параметрами $a = b = 0{,}1м$, $a/h = 100$, $E = 69ГПа$, $\nu = 0{,}3$, $\rho = 2800кг/м^3$, $\alpha = 6{,}4 \cdot 10^{-5} м^2/сек$. Физические параметры материала соответствуют сплаву АМц. $\bar{k}_1 = \bar{k}_2 = 24$.

Отметим также, что безразмерная собственная частота колебаний данной оболочки, найденная численно [5], составила $\omega = 30{,}22$.

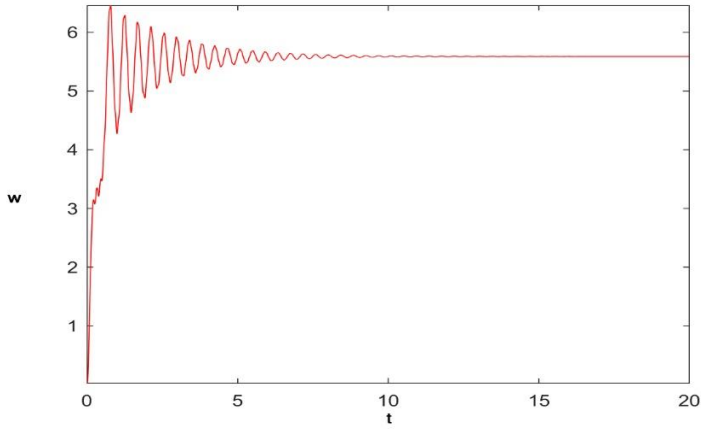
Далее все полученные результаты приводятся в безразмерном виде (кроме скорости V) для центральной точки плана оболочки.

$V = 940м/сек$ *Таблица 1*

	Сигнал
q = 100	
q = 200	
q = 416.5	

ISSN 2541-9269

Продолжение таблицы 1

	Сигнал
q = 416.6	

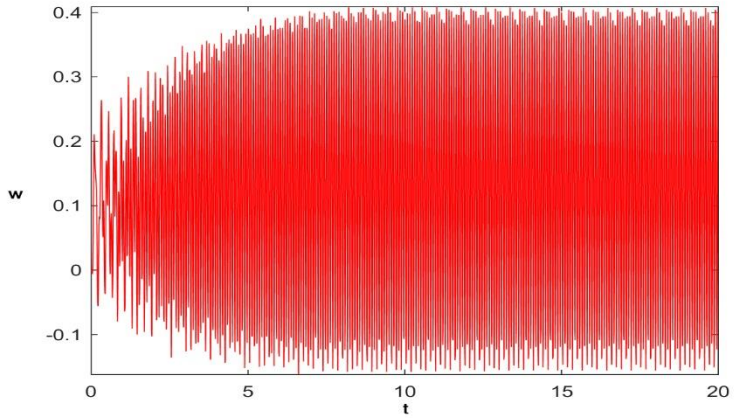
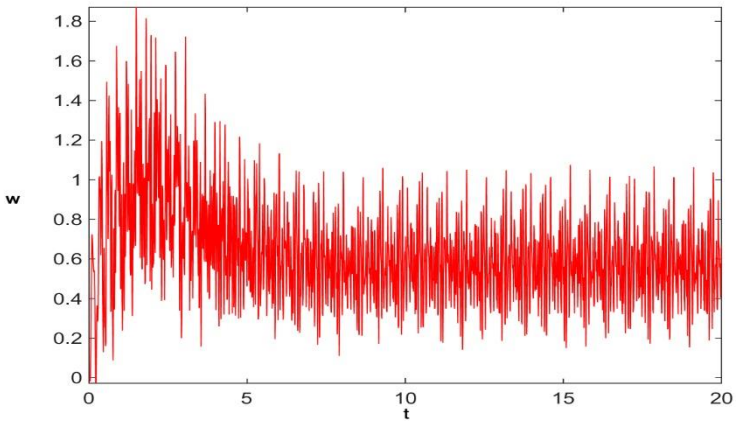
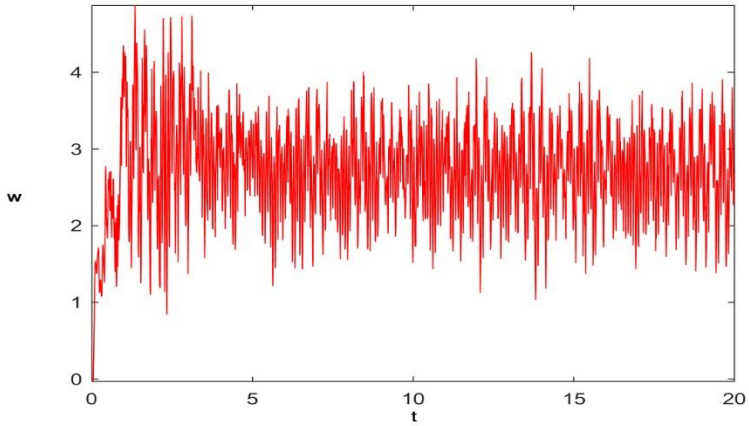
Максимально возможная скорость V при численном решении задачи фактически определяется шагом по времени, используемым решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений из (1). В табл. 1 приводятся результаты, имеющие скорее научный интерес, чем практический. Там показана зависимость прогиба w от времени (далее будем называть это сигнал) для указанной выше точки плана оболочки для $V = 940 м/сек = 3384 км/ч$. Колебания оболочки после завершения начального периода возмущений прекращаются, прогибы становятся постоянными. Видно, что между значениями $q = 416,5$ и $416,6$ происходит прохлопывание оболочки.

Если уменьшить значение V, переходя к более «земным» скоростям, то после начального периода мы будем наблюдать колебания в расширяющемся диапазоне значений. При этом, если не рассматривать начальный возмущённый период, при малых значениях q всегда будут наблюдаться гармонические колебания на различных частотах – в зависимости от значения V. Поэтому нам показалось интересным рассмотреть значения V, вызывающие колебания оболочки на её собственной частоте колебаний, а также при близких к этому значениях V.

Далее приводятся результаты, полученные для значений следующих значений V: $15,78 м/сек = 56,82 км/ч$; $11,69 м/сек = 42,09 км/ч$; $10,52 м/сек = 37,88 км/ч$

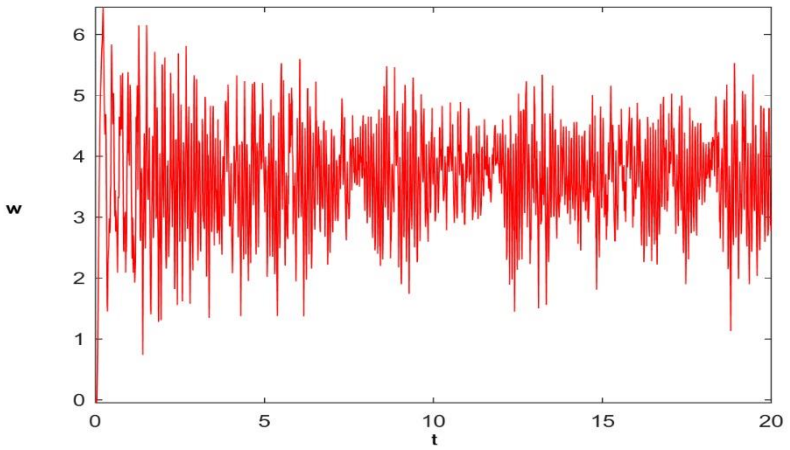
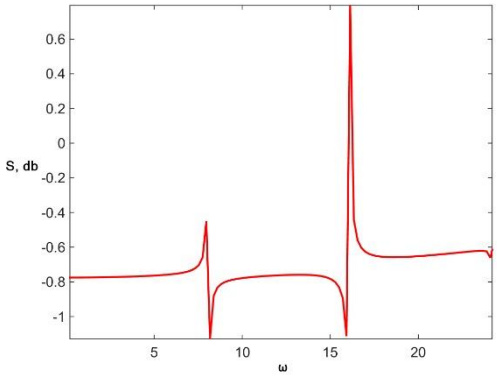
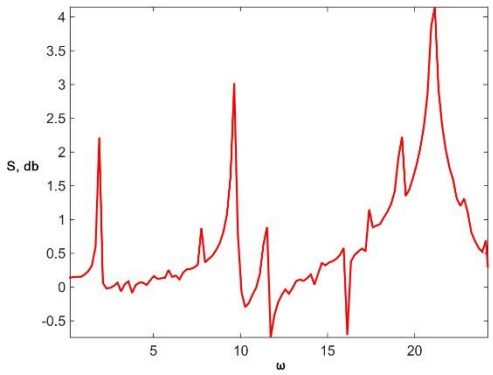
ISSN 2541-9269

$V = 15,78 м/сек$ *Таблица 2*

	Сигнал
q = 50	
q = 150	
q = 250	

ISSN 2541-9269

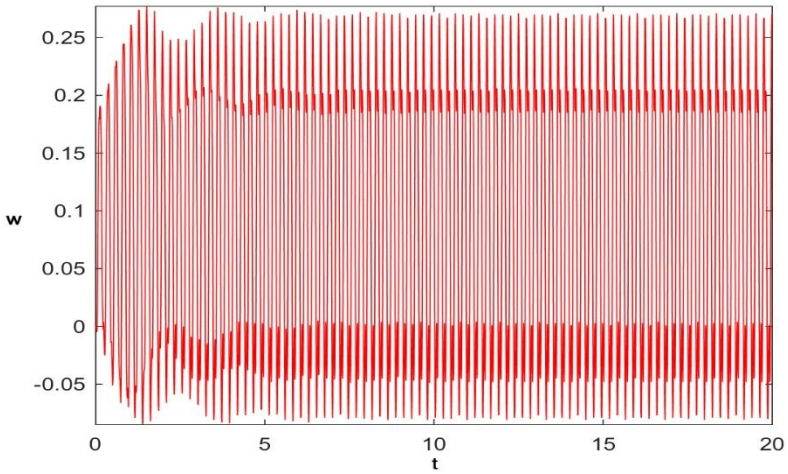
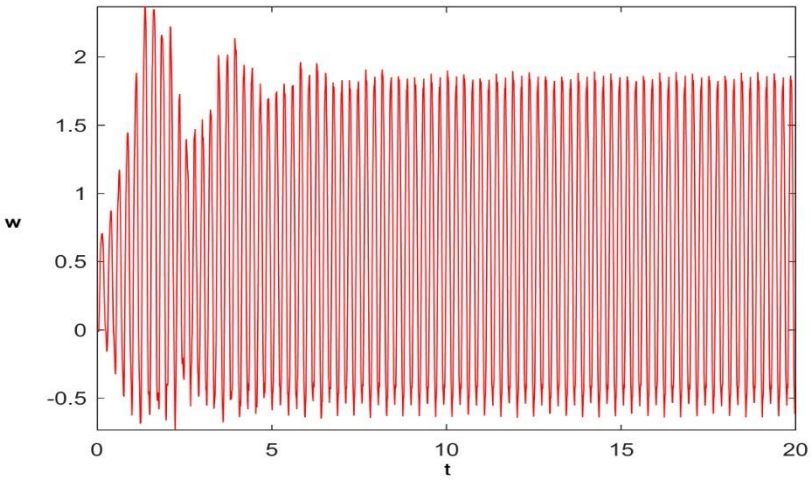
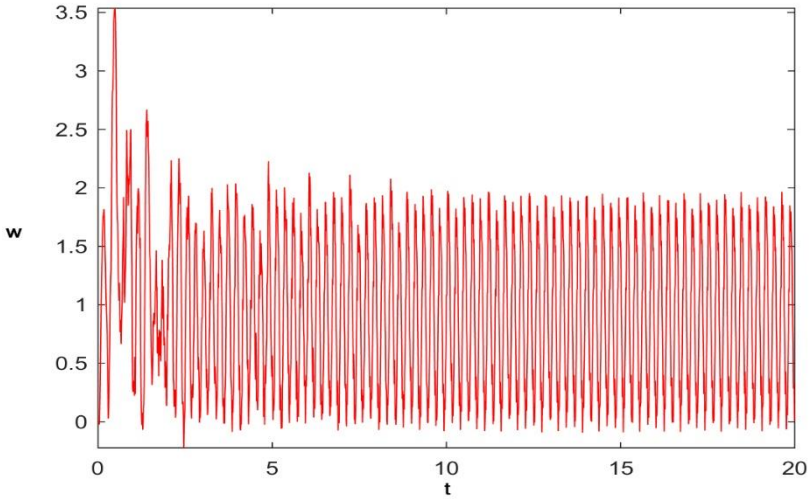
Продолжение таблицы 2

	Сигнал		
q = 400			
q = 50	Спектр мощности	q = 150	Спектр мощности
			

В табл. 2 приводятся полученные значения сигналов $w(t)$ для нескольких значений q при значении $V = 15,78 м/сек$. Даже если рассматривать только установившиеся колебания оболочки, не удаётся точно указать значение q, при которых происходит прохлопывание оболочки. Гармонические колебания имеют место при малых значениях q. С ростом интенсивности нагружения колебания очень быстро переходят в квазипериодические, а затем в хаотические, что показано на последних графиках табл. 2. Следует отметить, что максимальный пик частоты возбуждения, примерно равный 15 при $q = 50$, исчезает, при $q = 150$ максимум достигается при значении, примерно равном 21. В табл. 3 приведены результаты решения поставленной задачи для значения $V = 10,52 м/сек$.

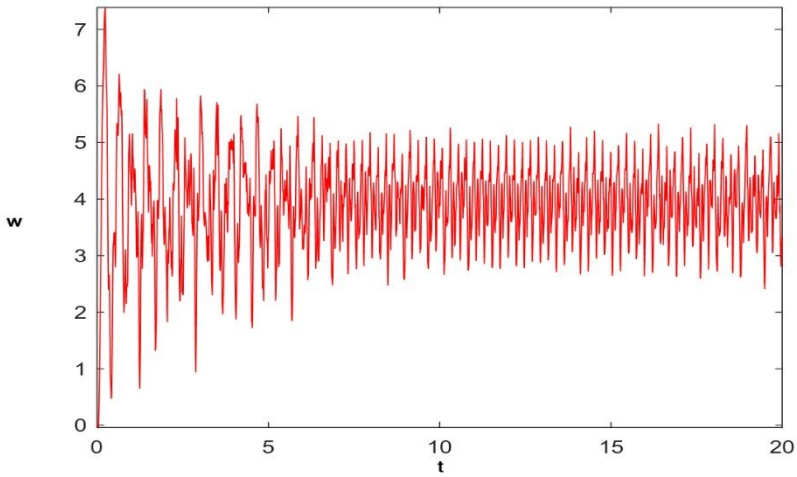
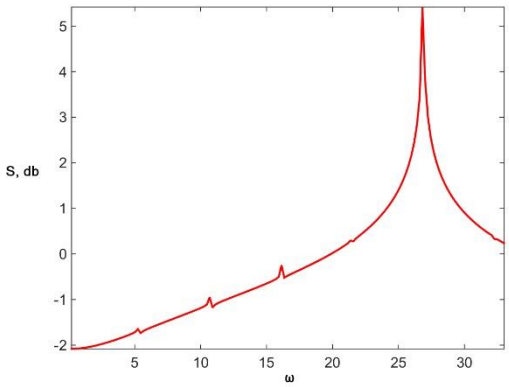
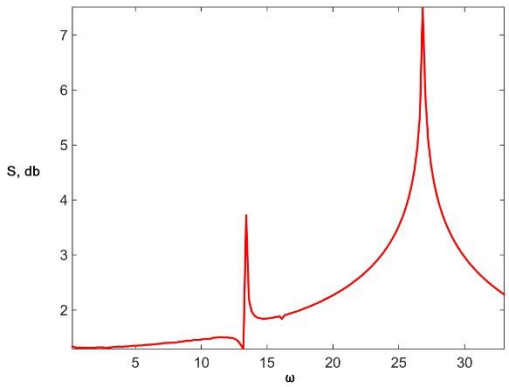
ISSN 2541-9269

$V = 10{,}52 м / сек$ *Таблица 3*

	Сигнал
q = 50	
q = 150	
q = 250	

ISSN 2541-9269

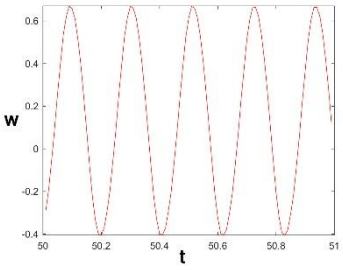
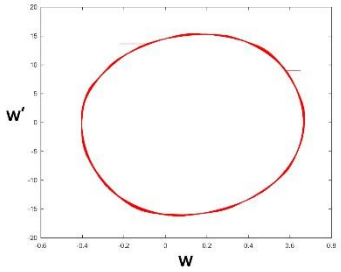
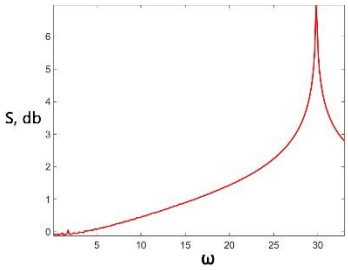
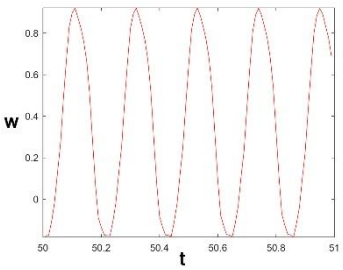
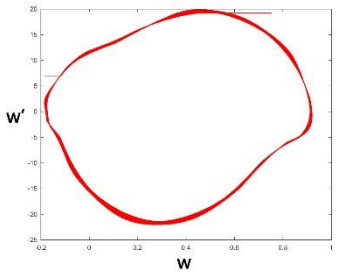
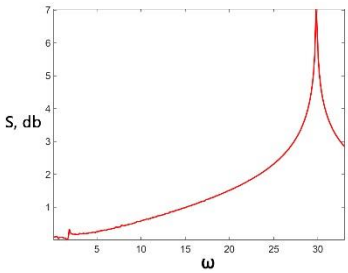
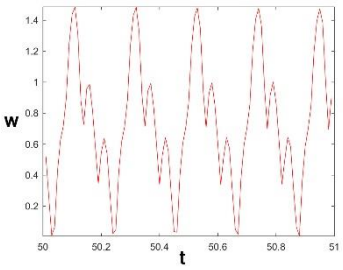
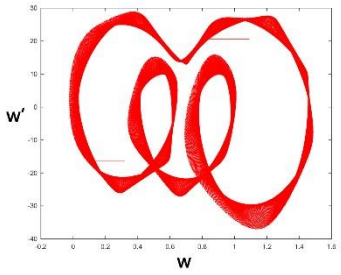
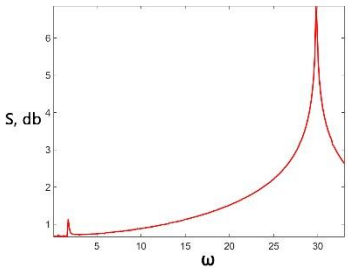
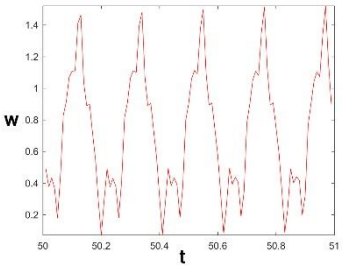
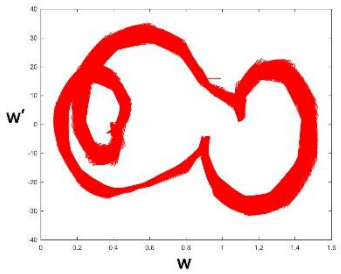
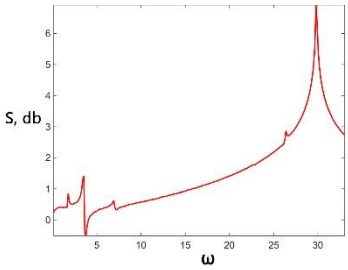
Продолжение таблицы 3

	Сигнал		
q = 450			
q = 50	Спектр мощности	q = 150	Спектр мощности
			

Отметим, что здесь также не удаётся указать конкретное значение q или достаточно малый диапазон изменения q, при котором происходит резкое прохлопывание оболочки. С увеличением значения q прогибы увеличиваются достаточно монотонно. Спектр мощности, приведённый в табл. 3, в отличии от результатов приведённых в табл. 2, показывает наличие постоянного пика возбуждающей частоты, на которой начинаются колебания оболочки при малых q.

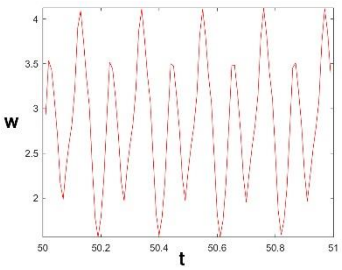
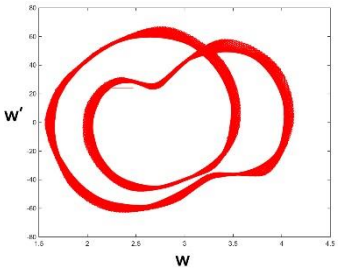
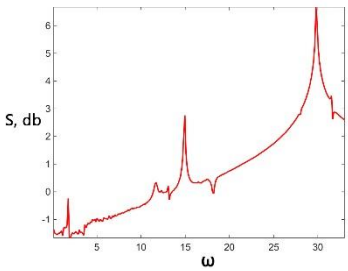
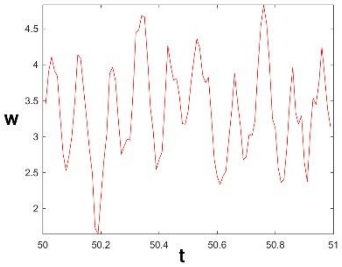
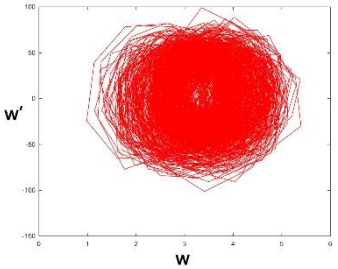
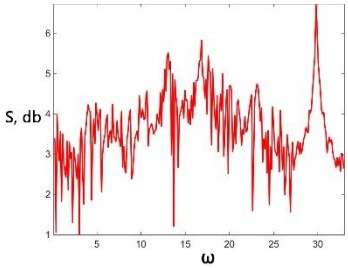
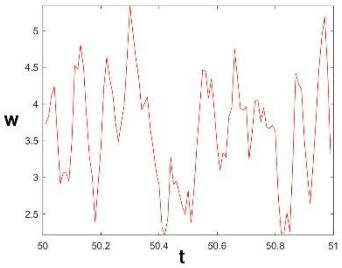
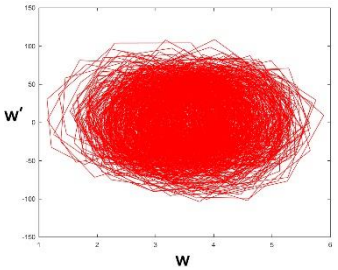
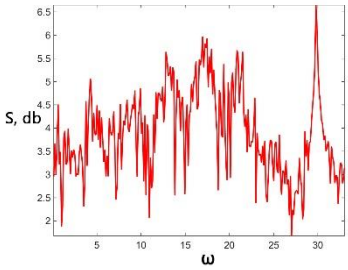
ISSN 2541-9269

$V = 11{,}69 м/сек$ *Таблица 4*

	Сигнал	Фазовый портрет	Спектр мощности
q = 50			
q = 150			
q = 200			
q = 243.1			

ISSN 2541-9269

Продолжение таблицы 4

	Сигнал	Фазовый портрет	Спектр мощности
q = 243.2			
q = 330			
q = 380			

И, наконец, в табл. 4 приведены результаты, полученные для нагрузки, движущейся со скоростью $V = 11,69 м/сек$ и вызывающей колебания оболочки на наиболее опасной частоте, близкой к частоте собственных колебаний конструкции. Последняя была найдена в [5] и оказалась равна $\omega = 30,22$. При движении q с указанной скоростью колебания начинались на частоте $\omega = 29,9$.

Колебания с частотой, близкой к собственной частоте колебаний оболочки, оказались самыми опасными для конструкции в смысле достижения максимально амплитуды колебаний при сравнении с нагрузками той же интенсивности, но перемещающихся с другими скоростями.

Сценарий смены форм колебаний заключался в переходе от гармонических колебаний к квазипериодическим и далее к хаотическим без

наблюдения эффектов перемещаемости форм колебаний. В указанном случае оказалось возможным определить нагрузку, при которой осуществляется прохлопывание оболочки. Это происходит между значениями $q = 243{,}1$ и $q = 243{,}2$. После прохлопывания оболочки с ростом q вскорости наступает безвозвратный переход к хаотическим колебаниям.

Таким образом, расчёт поведения конструкций при подвижной нагрузке позволяет выявить некоторые необычные эффекты динамического поведения оболочки, определить наиболее опасные для конструкций режимы движения нагрузки.

Литература

1. Чиркин В.В., Петренко О.С., Михайлов А.С., Галонен Ю.М. Пассажирские монорельсовые дороги. М.: Машиностроение, 1969. 240 с.
2. Zeng-Xin Yu, Hui-Feng Tan, Xing-Wen Du, Li Sun. A simple analysis method for contact deformation of rolling tire // Vehicle System Dynamics. 2001. Vol. 36. P. 435-443.
3. Коноплев Ю.Г., Якушев Р. С. Лекции по динамике сооружений с подвижными нагрузками. Казань: Отечество, 2003. 208 с.
4. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
5. Сопенко А.А., Майорова О.А., Черепанов М.Д. Сложные колебания геометрически и физически нелинейных пологих оболочек // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2016. № 3. URL: mathmod.esrae.ru/3-16.