

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: mathmod.esrae.ru/40-154

Ссылка для цитирования этой статьи:

Степанов О.А., Литвиненко Ю.А., Исаев А.М. Полиномиальный фильтр третьего порядка в задаче оценивания скалярного марковского процесса по нелинейным измерениям // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2022. №4

Выполнено при поддержке гранта РФФИ 18-19-00627, <https://rscf.ru/project/18-19-00627/>

УДК 681.51

DOI: 10.24412/2541-9269-2022-4-12-19

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ ФИЛЬТР ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ЗАДАЧЕ ОЦЕНИВАНИЯ СКАЛЯРНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА ПО НЕЛИНЕЙНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ

Степанов О.А.¹, Литвиненко Ю.А.^{2,3}, Исаев А.М.³

¹Университет ИТМО, АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Россия, Санкт-Петербург

²Университет ИТМО, АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Россия, Санкт-Петербург

³АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», Россия, Санкт-Петербург

THIRD-ORDER POLYNOMIAL FILTER IN THE ESTIMATING A SCALAR MARKOV PROCESS BY NONLINEAR MEASUREMENTS

Stepanov O.A.¹, Litvinenko Y.A.^{2,3}, Isaev A.M.³

¹ITMO University, Concern CSRI Elektropribor, JSC, Russia, Saint Petersburg

²ITMO University, Concern CSRI Elektropribor, JSC, Russia, Saint Petersburg

³Concern CSRI Elektropribor, JSC, Russia, Saint Petersburg

Аннотация. Для задачи оценивания скалярного марковского процесса по нелинейным измерениям получены соотношения для полиномиального фильтра третьего порядка. Обсуждается связь предлагаемого алгоритма с обобщённым фильтром Калмана и полиномиальным фильтром второго порядка. На методическом примере проведён сравнительный анализ эффективности перечисленных выше алгоритмов и ансцентного фильтра Калмана.

Ключевые слова: скалярный марковский процесс, полиномиальный фильтр третьего порядка, нелинейные измерения

Abstract. For the problem of estimating a scalar Markov process by nonlinear measurements, relations for a third order polynomial filter are obtained. The connection of the proposed algorithm with the extended Kalman filter and the second-order polynomial filter is discussed. The comparative efficiency analysis of the second and third order polynomial filter, extended Kalman filter, and unscented Kalman filter is carried out for a methodological example.

Keywords: scalar Markov process, third-order polynomial filter, nonlinear measurements

Введение. При решении задач обработки навигационной информации на практике широкое применение получили алгоритмы калмановского типа (АКТ), основанные на гауссовской аппроксимации апостериорной плотности [1-6]. Эти алгоритмы, как правило, оказываются эффективными при решении широкого круга задач в случае, если апостериорная плотность хотя и отлична от гауссовской, но является одноэкстремальной. АКТ, применяемые при решении большинства практических задач, можно условно разделить на две группы. Первая группа - АКТ, использующие локальную линеаризацию. Из алгоритмов этой группы можно отметить получивший наибольшее распространение обобщённый фильтр Калмана (Extended Kalman Filter - EKF) [1-4,6,7], а также фильтры второго порядка [3,6-9]. Ко второй группе можно отнести алгоритмы, основанные на методах численного приближенного вычисления двух первых моментов функции плотности распределения, для вектора, подверженного нелинейному преобразованию. Среди таких алгоритмов можно выделить алгоритмы, использующие кубатурные формулы [10] и процедуру ансцентного преобразования [5,11]. Наибольшее распространение среди алгоритмов этой группы получил последний, названный ансцентным фильтром Калмана.

Ранее в [6,7,9] для решения задач обработки навигационной информации при наличии нелинейностей в уравнениях динамики и измерений был предложен так называемый полиномиальный фильтр, который учитывает квадратичные нелинейности. Далее будем называть его полиномиальным фильтром второго порядка (Second Order Polynomial Filter - SOPF). Для этого фильтра были получены соотношения, устанавливающие его связь с EKF. Однако, существует ряд задач, где уравнения динамики и измерений описываются нелинейными функциями более высоких порядков и для которых применение SOPF оказывается не вполне эффективным. В этой связи представляет интерес получить соотношения полиномиального фильтра третьего порядка (Third Order Polynomial Filter - TOPF), и провести сравнительный анализ эффективности полученного алгоритма с различными субоптимальными алгоритмами: EKF, SOPF и ансцентным фильтром Калмана (Unscented Kalman Filter - UKF). В настоящей работе эта задача формулируется и решается применительно к скалярному случаю.

Постановка задачи. Рассматривается задача нелинейной дискретной фильтрации последовательности x , описываемой с помощью нелинейного формирующего фильтра:

$$x_k = f(x_{k-1}) + w_k, \quad x_0 \in N(x_0; \bar{x}_0, \sigma^2), \quad (1)$$

по скалярным нелинейным измерениям

$$y_k = h(x_k) + v_k, \quad (2)$$

В этих соотношениях $f(x_{k-1})$, $h(x_k)$ – нелинейные трижды

дифференцируемые скалярные функции общего вида, а w_k, v_k – независимые между собой и от x_0 центрированные дискретные гауссовские белые шумы с дисперсиями σ_w^2 и σ_v^2 .

Известно, что в АКТ, основанных на локальной линейаризации, исходная нелинейная задача (1), (2) сводится к линейной путем линейаризации уравнений динамики и измерений с использованием разложения в ряд Тейлора малой в окрестности точки линейаризации с последующим отбрасыванием членов высших порядков:

$$f(x_{k-1}) \approx f(\hat{x}_{k-1}^*) + f'(\hat{x}_{k-1}^*)(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^*) + \frac{1}{2} f''(\hat{x}_{k-1}^*)(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^*)^2 + \frac{1}{6} f'''(\hat{x}_{k-1}^*)(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^*)^3, \quad (3)$$

$$h(x_k) \approx h(\hat{x}_{k/k-1}^*) + h'(\hat{x}_{k/k-1}^*)(x - \hat{x}_{k/k-1}^*) + \frac{1}{2} h''(\hat{x}_{k/k-1}^*)(x - \hat{x}_{k/k-1}^*)^2 + \frac{1}{6} h'''(\hat{x}_{k/k-1}^*)(x - \hat{x}_{k/k-1}^*)^3, \quad (4)$$

где $\hat{x}_{k-1}^*, \hat{x}_{k/k-1}^*$ - точки линейаризации.

Получим соотношения ТОРФ, в котором в выражениях (3), (4), приведенных выше, учитываются члены третьего порядка и обсудим его взаимосвязь и отличия с другими АКТ.

Полиномиальный фильтр третьего. Алгоритмы калмановского типа имеют одинаковую структуру, включающую блок прогноза и блок коррекции. Общим для них является предположение о гауссовском характере распределения апостериорной плотности на каждом шаге и тот факт, что обработка текущего измерения осуществляется исходя из идеологии построения линейного оптимального алгоритма [6,12,13].

В настоящей работе для скалярного случая общего вида (1), (2) с использованием выражения для чётных моментов гауссовских случайных величин и того факта, что нечетные центральные моменты равны нулю, получен полиномиальный фильтр третьего порядка, в полном объёме учитывающий при разложении в ряд члены третьего порядка. Соотношения для вычисления моментов составного вектора в ТОРФ были приведены к виду, аналогичному виду для SOPF и EKF, представленному в таблице 4 работы [6]. Результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1.

N	Вычисление прогноза и расчетной дисперсии его погрешностей
1	$\hat{x}_{k/k-1}^{TOPF} = f_k(\hat{x}_{k-1}^{TOPF}) + d_k^f, \text{ где } d_k^f = 0.5 f''(\hat{x}_{k-1}^{TOPF})(\sigma_{k-1}^{TOPF})^2.$
2	<p>где</p> $(\sigma_{k/k-1}^{TOPF}(\hat{x}_{k-1}^{TOPF}))^2 = (\tilde{\sigma}_{k/k-1}^{TOPF}(\hat{x}_{k-1}^{TOPF}))^2 + D_k^f + C_k^f,$ $(\tilde{\sigma}_{k/k-1}^{TOPF}(\hat{x}_{k-1}^{TOPF}))^2 = (f'(\hat{x}_{k-1}^{TOPF}))^2 (\sigma_{k-1}^{TOPF})^2 + \sigma_w^2, \quad D_k^f = 0.5 (f''(\hat{x}_{k-1}^{TOPF}))^2 (\sigma_{k-1}^{TOPF})^4,$ $C_k^f = f'(\hat{x}_{k-1}^{TOPF}) f'''(\hat{x}_{k-1}^{TOPF}) (\sigma_{k-1}^{TOPF})^4 + \frac{15}{36} (f'''(\hat{x}_{k-1}^{TOPF}))^2 (\sigma_{k-1}^{TOPF})^6.$

<i>Вычисление прогноза измерений и дисперсии его погрешностей</i>	
3	$\hat{y}_k^{TOPF} = h(\hat{x}_{k/k-1}^{TOPF}) + d_k^h, \text{ где } d_k^h = 0.5h''(\hat{x}_{k/k-1}^{TOPF})(\sigma_{k/k-1}^{TOPF})^2.$
4	<p style="text-align: center;"> $\left(\sigma_{y_k}^{TOPF}(\hat{x}_{k/k-1}^{TOPF})\right)^2 = \left(h'(\hat{x}_{k/k-1}^{TOPF})\right)^2 \left(\tilde{\sigma}_{k/k-1}^{TOPF}\right)^2 + R_k + D_k^{fh} + D_k^h + C_k^{fh} + C_k^h;$ </p> <p style="text-align: center;">где</p> $D_k^{fh} = 0.5\left(f''(\hat{x}_{k/k-1}^{TOPF})\right)^2 \left(\sigma_{k/k-1}^{TOPF}\right)^4 \left(h'_k(\hat{x}_{k/k-1}^{TOPF})\right)^2,$ $C_k^{fh} = f'(\hat{x}_{k/k-1}^{TOPF})f'''(\hat{x}_{k/k-1}^{TOPF})\left(\sigma_{k/k-1}^{TOPF}\right)^4 \left(h'_k(\hat{x}_{k/k-1}^{TOPF})\right)^2 + \frac{15}{36}\left(f''(\hat{x}_{k/k-1}^{TOPF})\right)^2 \left(\sigma_{k/k-1}^{TOPF}\right)^6 \left(h'_k(\hat{x}_{k/k-1}^{TOPF})\right)^2,$ $D_k^h = 0.5\left(h''(\hat{x}_{k/k-1}^{TOPF})\right)^2 \left(\sigma_{k/k-1}^{TOPF}\right)^4,$ $C_k^h = \frac{15}{36}\left(h'''(\hat{x}_{k/k-1}^{TOPF})\right)^2 \left(\sigma_{k/k-1}^{TOPF}\right)^6 + h'(\hat{x}_{k/k-1}^{TOPF})h'''(\hat{x}_{k/k-1}^{TOPF})\left(\sigma_{k/k-1}^{TOPF}\right)^4.$
<i>Вычисление взаимной ковариации</i>	
5	<p style="text-align: center;"> $\left(\sigma_{x_k y_k}^{TOPF}(\hat{x}_{k/k-1}^{TOPF}, \hat{x}_{k-1}^{TOPF})\right)^2 = h'(\hat{x}_{k/k-1}^{TOPF})\left(\tilde{\sigma}_{k/k-1}^{TOPF}\right)^2 + F_k + T_k,$ </p> <p style="text-align: center;">где</p> $F_k = 0.5h'(\hat{x}_{k/k-1}^{TOPF})\left[\left(f''(\hat{x}_{k/k-1}^{TOPF})\right)^2 \left(\sigma_{k/k-1}^{TOPF}\right)^4\right], \quad T_k = 0.5h'''(\hat{x}_{k/k-1}^{TOPF})\left(\sigma_{k/k-1}^{TOPF}\right)^4.$

Причины ухудшения точности ЕКФ по сравнению с SOPF подробно обсуждаются в [6]. Аналогично, сравнивая выражения таблицы 1 настоящей работы и таблицы 4 работы [6] можно сделать вывод о причинах ухудшения точности SOPF по сравнению с TOPF - в фильтре третьего порядка, за счёт учёта дополнительных слагаемых $C_k^f, C_k^{fh}, C_k^h, T_k$, используются более полные выражения при вычислении матриц ковариаций погрешностей прогноза оценки вектора состояний (графа 2), прогноза измерений (графа 4) и взаимной матрицы ковариаций (графа 5).

Ансцентный фильтр Калмана относится к алгоритмам калмановского типа основанным на методах приближенного вычисления двух первых моментов функции плотности распределения, для вектора, подверженного нелинейному преобразованию. Вычисление первых двух моментов составного вектора в UKF осуществляется приближённо с использованием так называемой процедуры U – преобразования. Для проведения сравнительного анализа рассматриваемых алгоритмов, использующих локальную линеаризацию, и UKF приведем пример.

Пример. Рассмотрим задачу оценивания дискретного гауссовского марковского процесса первого порядка, заданного уравнением:

$$x_k = (1 - \alpha\Delta t)x_{k-1} + \sqrt{2\sigma^2\alpha\Delta t}w_k, \quad (5)$$

по измерениям вида:

$$y_k = ax_k + bx_k^2 + cx_k^3 + v_k. \quad (6)$$

В этих выражениях α - известный параметр, w_k - центрированный дискретный белый шум с единичной дисперсией, Δt - шаг дискретизации, σ - СКО сигнала, a, b, c - известные константы, v_k - центрированный дискретный белый шум с дисперсией r^2 . В моделях (5) и (6) w_k, v_k, x_0 полагаются гауссовскими и независимыми.

Используя модели (5) и (6) и выражения, приведённые в таблице 1 выше и в таблице 4 работы [6], легко получить соотношения для ТОРФ, СОПФ и ЕКФ применительно к рассматриваемому примеру. То же самое можно сделать и для УКФ, применив, например, псевдокод, приведённый в [14,15]. Следует отметить, что модель динамики системы в этом примере является линейной и выражения для вычисления $\hat{x}_{k/k-1}^\mu$ и $(\sigma_{k/k-1}^\mu(\hat{x}_{k-1}^\mu))^2, \mu = EKF, SOPF, TOPF, UKF$ будут совпадать для всех рассматриваемых АКТ.

Для рассматриваемого примера, в котором уравнения динамики линейны, а нелинейные измерения представляют собой полином третьей степени, в ТОРФ вычисление моментов $\hat{y}_k, (\sigma_{y_k}(\hat{x}_{k/k-1}))^2, (\sigma_{x_k y_k}(\hat{x}_{k/k-1}, \hat{x}_{k-1}))^2$ осуществляется точно и вырабатываемая оценка при обработке текущего измерения совпадает с линейной оптимальной оценкой с точностью до гауссовской аппроксимации апостериорной плотности. В остальных же рассматриваемых субоптимальных алгоритмах вычисление прогноза измерений, матриц ковариаций его погрешностей и взаимной матрицы ковариации происходит приближённо, с различной степенью точности.

Результаты моделирования. С целью сопоставления рассматриваемых АКТ при решении рассмотренного примера (5), (6) было проведено его моделирование в соответствии с процедурой, приведенной в табл. 5 работы [6].

Параметры моделирования: $\alpha = 0,01 c^{-1}, t = 40 c,$
 $\Delta t = 4 c, a = 0, b = 0, c = 1, \sigma = 1, r = 1,$ количество реализаций $L=1000$. Помимо сопоставляемых субоптимальных алгоритмов был реализован нелинейный оптимальный алгоритм. На рисунке 1, представлены результаты моделирования. Синий цвет соответствует ЕКФ, чёрный - СОПФ, фиолетовый - УКФ, красный - оптимальному алгоритму (ОРТ), оранжевый - ТОРФ. Для графиков среднеквадратического отклонения (СКО) сплошные линии соответствуют действительным характеристикам точности, полученным при помощи метода статистических испытаний, пунктирные - расчётным.

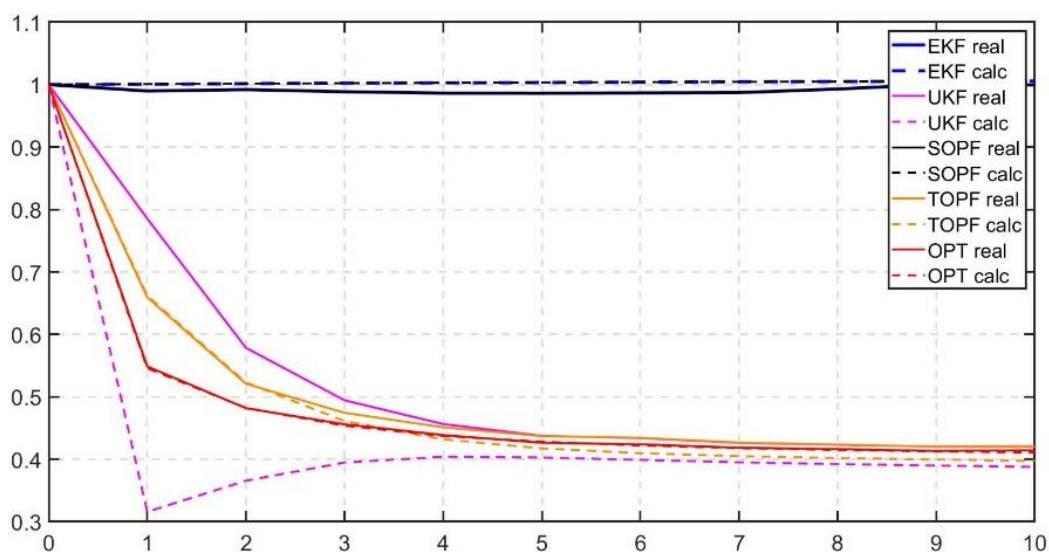
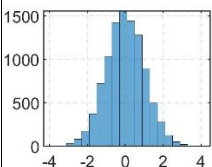
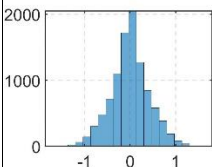
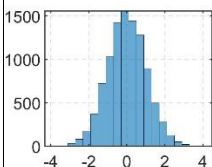
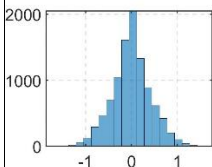
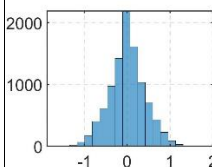


Рис.1. Действительные и расчетные SKO оценивания x .

Ниже, в таблице 2 представлены гистограммы погрешностей оценивания x и рассчитана действительная характеристика точности для последнего измерения.

Таблица 2.

m	<i>EKF</i>	<i>UKF</i>	<i>SOPF</i>	<i>TOPF</i>	<i>OPT</i>
1	 SKO = 0,9995	 SKO = 0,4206	 SKO=0,9995	 SKO=0,4203	 SKO=0,4142

Как видно из рисунка 1 и таблицы 2 EKF и SOPF демонстрируют наименьшую эффективность. Это связано с тем, что в рассматриваемом примере слагаемые первого и второго порядка a, b были выбраны равными нулю. Точности же UKF и TOPF практически совпадают и близки к точности оптимального алгоритма. При этом совпадение действительной и расчётной характеристики точности имеет место только для TOPF, что говорит о его состоятельности. Так же следует отметить, что гистограммы погрешностей оценивания для алгоритмов UKF и TOPF наиболее близки к гауссовским.

Заключение. Для задачи оценивания скалярного марковского процесса по нелинейным измерениям получены соотношения полиномиального фильтра третьего порядка. В результате решения показано, что причины ухудшения точности обобщенного и фильтра Калмана второго порядка по сравнению с предложенным, обусловлены не учётом дополнительных слагаемых в выражениях для вычисления матриц ковариаций прогноза оценки вектора состояний, прогноза измерений и взаимной матрицы ковариаций. Для методического примера случая кубической нелинейности в измерениях показано, что фильтр третьего порядка превосходит по точности другие рассмотренные субоптимальные алгоритмы, а так же является состоятельным.

В качестве дальнейших исследований предполагается получить соотношения фильтра третьего порядка для векторного случая уравнений (1) и (2) и исследовать возможность построения линейно эквивалентной расширенной модели [6] для этого фильтра.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 18-19-00627, <https://rscf.ru/project/18-19-00627/>.

Литература

1. Gelb, A. Applied Optimal Estimation. M.I.T. Press, Cambridge, 1974.
2. Дмитриев С.П. Высокоточная морская навигация. СПб.: Судостроение, 1991. 224 с.
3. Степанов О.А. Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации. Издание 3-е. СПб.: ЦНИИ "Электроприбор", 2003. 370 с.
4. Simon, D. Optimal State Estimation. Kalman, ∞ , and Nonlinear approaches/ D. Simon. A John Wiley & Song Inc, 2006. 550 p.
5. Condomines, Jean-Philippe. Nonlinear kalman filtering for multi-sensor navigation of unmanned aerial vehicle. Elsevier Science and Technology, 2018. 254 p.
6. Степанов О.А., Литвиненко Ю.А., Васильев В.А., Торопов А.Б., Басин М.В. Алгоритм полиномиальной фильтрации в задачах обработки навигационной информации при квадратичных нелинейностях в уравнениях динамики и измерений. Часть I: Описание и сопоставление с алгоритмами калмановского типа // Гироскопия и навигация. 2021. Т. 29. №3 (114). С. 3-33.
7. Степанов О.А., Литвиненко Ю.А., Васильев В.А., Торопов А.Б., Басин М.В. Алгоритм полиномиальной фильтрации в задачах обработки навигационной информации при квадратичных нелинейностях в уравнениях динамики и измерений. Часть II: Примеры решения задач // Гироскопия и навигация. 2021. Т. 29. №4 (115). С. 56-78.
8. Henriksen, R. The truncated second-order nonlinear filter revisited // IEEE Transactions on Automatic Control. 1982. AC-27(1). P. 247-251.
9. Servadio Simone, Zanetti Renato. Estimation of the Conditional State and Covariance With Taylor Polynomials // Journal of Advances in Information Fusion. 2021. Vol. 16. No 2. P. 126-142.
10. Arasaratnam S. Haykin. Cubature Kalman filters // IEEE Transactions on Automatic Control. 2009. Vol. 54(6). P. 1254-1269.
11. Julier S. J., Uhlmann J. K. Unscented filtering and nonlinear estimation // Proceedings of the IEEE. 2004. Vol. 92(3). P. 401-422.
12. Zhankue Zhao, Rong X., Vesselin Li, Jilkov P. Best Linear Unbiased Filtering with Nonlinear Measurements for Target Tracking // IEEE Transactions on aerospace and electronic systems. 2004. Vol. 40(4). P. 1324-1336.

13. Степанов О. А., Торопов А.Б. Сравнительное исследование линейного и нелинейного оптимальных алгоритмов оценивания в задачах обработки навигационной информации. // Гироскопия и навигация. 2010. № 3 (70). С. 24-37.
14. Торопов А. Б. Алгоритмы фильтрации в задачах коррекции показаний морской навигационной системы с использованием нелинейных измерений: диссертация на соискание учёной степени кандидата технических наук. Санкт-Петербург, 2012. 146 с.
15. Торопов, А.Б. Линейные оптимальные алгоритмы в задачах оценивания с нелинейными измерениями. Связь с алгоритмами калмановского типа / О.А. Степанов, А.Б. Торопов // Известия ТулГУ. Технический вестник. 2012. № 7. С. 172-189.