

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: [mathmod.esrae.ru/41-164](http://mathmod.esrae.ru/41-164)

Ссылка для цитирования этой статьи:

Маргачев С.В. Методы анализа и математическое моделирование траекторий заряженных частиц в системах со скрещенными магнитными и электрическими полями // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2023. № 1.

УДК 519.673

DOI: 10.24412/2541-9269-2023-1-34-39

## МЕТОДЫ АНАЛИЗА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В СИСТЕМАХ СО СКРЕЩЕННЫМИ МАГНИТНЫМИ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ПОЛЯМИ

Маргачев С.В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Саратовский государственные технический университет  
имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, [svmargachev@mail.ru](mailto:svmargachev@mail.ru)

## METHODS OF ANALYSIS AND MATHEMATICAL MODELING OF CHARGED PARTICLES TRAJECTORIES IN SYSTEMS WITH CROSSED MAGNETIC AND ELECTRIC FIELDS

Margachev S.V.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Yuri Gagarin State technical university of Saratov, Russia, Saratov,  
[svmargachev@mail.ru](mailto:svmargachev@mail.ru)

**Аннотация.** Целью статьи является разработка комплекса математических моделей и программ для анализа и расчёта как хаотических, так и регулярных траекторий зарядов в скрещенных полях, принимая во внимание переменную составляющую магнитной индукции, в том числе учитывая режим параметрического генерирования.

Ключевые слова: математическое моделирование, заряженные частицы, магнитные и электрические поля.

**Abstract.** The aim of the article is to develop a set of mathematical models and programs for the analysis and calculation of both chaotic and regular charge trajectories in crossed fields, taking into account the variable component of magnetic induction, including the parametric generation mode.

Keywords: mathematical modeling, charged particles, magnetic and electric fields.

Большая часть физических явлений обуславливаются особенным принципом движения зарядов в скрещенных магнитных и электрических полях. Эти особенности встречаются как в устройствах технического плана (в

частности, в амплитронах, карматронах и в прочих генераторах и усилителях магнетронного типа), так и в естественной среде (магнитные пояса планет). Вследствие чего, появляется потребность расчета траекторий зарядов в данных областях техники и науки (СВЧ- электронике, астрофизике, радиофизике и прочих), а также их непосредственный анализ.

С помощью экспериментальных методов была получена часть усредненных характеристик электронных потоков, например, таких как: скорость зарядов, их плотность и так далее. Таким образом, для расчета в общем потоке «индивидуальных» траекторий зарядов особое внимание необходимо уделить методам математического моделирования, так как данные методы позволяют графически представлять физические процессы, что в значительной степени упрощает анализ вводимых и получаемых данных.

Отказ от применения адиабатических приближений, решений, а также исключение из расчетов циклоадального характера траекторий вызван сложностью реализации аналитического вида решений в условиях нестационарных полей [1,2,9]. Наряду с этим стремительный прогресс в развитии технических устройств, развитие языков программирования высокого уровня позволили производить расчеты циклоидальности траекторий в разных режимах, в том числе и производить расчеты в режимах больших амплитуд [3,4,5,6,7,8].

В этой части работы в режиме больших амплитуд в скрещенных полях были выведены приближительные аналитические решения, которые позволяют вычислять циклоидальные траектории заряженных частиц. Так же произведено сопоставление данных, полученных аналитическим путем, и данных, полученных с помощью численного решения.

Исследование осуществлялось в приближении заданного поля применительно к схематичному представлению плоского многорезонаторного магнетрона, который представлен на рис.3.

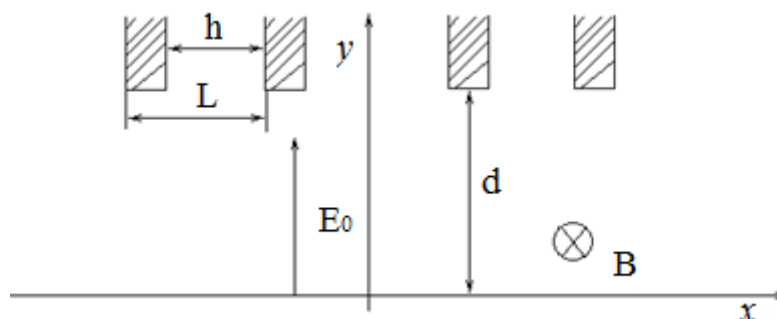


Рисунок 1. Схема плоского многорезонаторного магнетрона

здесь  $E_1$  – синхронное ВЧ поле  $v_0$ - скорость ВЧ поля,  $\omega$  – частота генерации,  $E_0$  – стационарное поле,  $d$  – расстояние между катодом и анодом,

$L \frac{2\pi}{N}$  – период резонаторной системы,  $N$  – количество резонаторов,  $h$  – длина щели резонатора. Как мы можем видеть на рисунке, анализ выполнялся для магнетрона полуволнового типа.

Движение заряженной частицы в многорезонаторном магнетроне представлено в виде системы уравнений [10]:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \eta E_x + \eta B \dot{y} \\ \ddot{y} = \eta E_y - \eta B \dot{x} \end{cases} \quad (2.1)$$

В уравнении 2.1 действующие поля  $E_x$  и  $E_y$  представлены как:

$$\begin{aligned} E_x &= E_1 \sin(\omega t - \beta x + \phi) e^{by}, \\ E_y &= E_0 + E_1 \cos(\omega t - \beta x + \phi) e^{by} \end{aligned} \quad (2.2)$$

здесь  $\phi$  – это фаза ВЧ поля.

Допущения, которые использовались при исследовании:

1) Во внимание не принимаются релятивистские эффекты.

Уравнение Лапласа используется в качестве замещения волнового уравнения.

2) Влияние на электроны каждой пространственной гармоники ВЧ поля в резонаторной системе учитывается как малое, не считая базовой гармоники  $\pi$ -вида.

Исследование будет выполняться в нормализованной системе координат:

$$\begin{aligned} Y &= \beta y \\ \Theta &= \omega t \\ X &= \omega t - \beta x + \phi \end{aligned} \quad (2.3)$$

Тогда система уравнений (2.1), примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} \frac{d^2 X}{d\Theta^2} - \frac{dY}{d\Theta} &= \frac{E_x}{E_{00}} \\ \frac{1}{b} \frac{d^2 Y}{d\Theta^2} + \frac{dX}{d\Theta} &= \frac{E_0 - E_{00}}{E_{00}} + \frac{E_y}{E_{00}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь  $E_{00} = \frac{B_0 \omega}{\beta}$  – это синхронное поле,  $E_x = E_1 e^Y \cos X$ ,  $E_y = E_1 e^Y \sin X$ ,

$$b = \frac{\Omega}{\omega}.$$

Проинтегрируем первое уравнение системы 2.4:

$$\frac{dX}{d\Theta} = bY + b \int \frac{E_x}{E_{00}} d\Theta. \quad (2.5)$$

Подставим во второе уравнении системы (2.4) полученное уравнение (2.5):

$$\frac{1}{b} \frac{d^2 Y}{d\Theta^2} + bY + b \int \frac{E_1 e^Y \cos(X)}{E_{00}} d\Theta = \frac{E_0 - E_{00}}{E_{00}} + \frac{E_1 e^Y \sin(X)}{E_{00}} \quad (2.6)$$

Исключая ускорительные составляющие в системе (2.4) и принимая  $E_0 = E_{00}$ , мы получим следующую зависимость, которая действительна для всего пространства взаимодействия :

$$e^{-Y} = |\sin X| \quad (2.7)$$

Подставляя соотношение (2.7) в уравнение (2.6), мы получаем следующее уравнение:

$$\frac{1}{b^2} \frac{d^2 Y}{d\Theta^2} + Y + \int \frac{E_1 e^Y \sqrt{1 - e^{-2Y}}}{E_{00}} d\Theta = \frac{1}{b} \left( \frac{E_0 - E_{00}}{E_{00}} + \frac{E_1}{E_{00}} \right) \quad (2.8)$$

Дифференцируем (2.8), обозначая, что время безразмерно. В результате дифференцирования получим уравнение III порядка относительно  $Y(\Theta)$ :

$$\frac{1}{b^2} \frac{d^3 Y}{d\Theta^3} + \frac{dY}{d\Theta} + \frac{E_1 \sqrt{e^{2Y} - 1}}{E_{00}} = 0$$

(2.9)

Принимаем  $\sqrt{e^{2Y} - 1} \approx e^Y$ , что является справедливым для значительной части пространства взаимодействия, таким образом уравнение (2.9) примет следующий вид:

$$\frac{1}{b^2} \frac{d^3 Y}{d\Theta^3} + \frac{dY}{d\Theta} + \frac{E_1 e^Y}{E_{00}} = 0$$

(2.10)

Характеристическое уравнение для (2.10) будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{1}{b^2} \alpha^3 + \alpha + \frac{E_1}{E_{00}} \left( \alpha + 1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) = 0 \quad (2.11)$$

Найдем корни для уравнения (2.11):

$$\alpha_1 = -b, \alpha_2 = 0.98 + bi, \alpha_3 = 0.98 - bi, \quad (2.12)$$

Таким образом, решение для дифференциального уравнения (2.10) будет выглядеть следующим образом:

$$Y(\Theta) = C_1 e^{-b\Theta} + C_2 \exp(\alpha_2 \Theta) \cos(b\Theta) + C_3 \exp(\alpha_3 \Theta) \sin(b\Theta)$$

(2.13)

Зададим начальные условия:

$$Y(0) = 0, \frac{dY(0)}{d\Theta} = 0, \frac{d^2 Y(0)}{d\Theta^2} = \frac{E_0}{E_{00}} \quad (2.14)$$

Учитывая дифференциальное уравнение (2.6) для констант получим:

$$C_1 = 1, C_2 = 0, C_3 = \frac{E_1}{E_{00}} \quad (2.15)$$

Принимая во внимание положенные начальные условия (2.15), и решая уравнение (2.10), мы получим:

$$Y(\Theta) = Y_0 + \exp(-X_0 b) + \frac{E_1}{E_{00}} \sin(b\Theta) - \frac{E_1}{E_{00}} \quad (2.16)$$

здесь  $X_0$  – начальная координата точки вылета заряда. При нахождении зависимости для  $Y(\Theta)$  (2.16), мы можем найти  $X(\Theta)$ . Подставим в первое уравнение системы (2.4) следующее выражение  $\frac{d^2 Y(\Theta)}{d\Theta^2}$ , которое было получено благодаря уравнению (2.16). На основании произведенной подстановки мы получаем дифференциальное уравнение I порядка по отношению к  $X(\Theta)$ :

$$\frac{dX}{d\Theta} + b \exp(-X_0 b) - \frac{E_1}{E_{00}} b \sin(b\Theta) = \frac{E_0 - E_{00}}{E_{00}} + \frac{E_1 e^{(Y_0 + \exp(-X_0 b) + \frac{E_1}{E_{00}} \sin(b\Theta) - \frac{E_1}{E_{00}})} \sin X}{E_{00}} \quad (2.17)$$

Упростим и решим уравнение (2.17):

$$X(\Theta) = X_0 - \frac{E_0 - E_{00}}{E_{00}} \Theta + \frac{E_1}{E_{00}} \cos(b\Theta) \quad (2.18)$$

Как можно увидеть, с помощью уравнений (2.16) и (2.18) мы получили возможность для определения координаты заряда, другими словами мы можем определить траекторию движения в каждый момент времени.

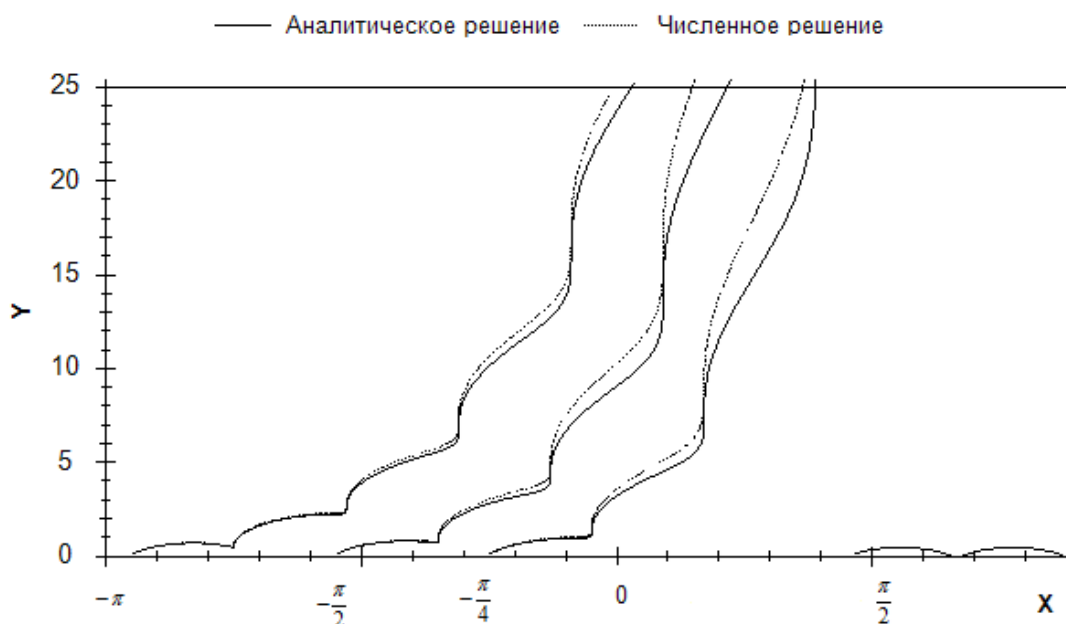


Рисунок 2 Циклоидальные траектории зарядов, которые получены для системы уравнений (2.4) с помощью приближенных аналитических и численного методов решений

На рисунке 4 представлено сравнение траекторий зарядов, полученных с помощью аналитических и численных решений соответственно. Исследование проводилось с помощью магнетрона 4j50 [1] при следующих параметрах: анодное напряжение составляло 110% от синхронного, на ламелях ВЧ напряжение было на 20% меньше в сравнении с постоянным. На рисунке 4 мы можем также увидеть, что траектории, полученные численными решениями приближены к траекториям, которые были получены с помощью аналитических решений.

---

---

### Литература

1. Бычков С.И. Вопросы теории и практического применения приборов магнетронного типа. /С.И. Бычков/. М.: Сов. радио 1967. 360 С
2. Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике, – М.: Советское радио, 1973.
3. Розов А.С. Моделирование траекторий зарядов в цилиндрическом пучке при переменном магнитном поле. /А.С. Розов, В.Б. Байбурин// Радиотехника и электроника 2014 т.59 № 9 . с. 872-875
4. Розов А.С. Условие параметрической генерации в скрещенных и переменных во времени электрическом и магнитном полях /А.С. Розов, В.Б. Байбурин// «Радиотехника» №10 2014 г с. 19 – 21.
5. Розов А.С. Численное моделирование ларморовых орбит в поле / А.С. Розов, В.Б. Байбурин // Известия Волгоградского Государственного Технического Университета Серия Электроника и измерительная техника, радиотехника и связь выпуск 8. № 23(126) 2013 Волгоград 2013 с.7 – 10.
6. Розов А.С. Параметрический резонанс и генерация в плоском магнетроне / А.С. Розов, В.Б. Байбурин // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2014. № 3 (76). С. 28-31.
7. Розов А.С. Моделирование и расчёт траекторий зарядов в неоднородном и нестационарном магнитном поле. / А.С. Розов, В.Б. Байбурин // Вестник Саратовского Государственного Технического Университета Саратов 2013. Т. 1. № 1 (69). С. 49-53.
8. Розов А.С. Анализ регулярных и хаотических траекторий зарядов в заряженном цилиндрическом пучке / А.С. Розов, В.Б. Байбурин // Вестник Саратовского Государственного Технического Университета Саратов 2012 №4 (68). с 68-72 .
9. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по СВЧ электронике для физиков. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 496 с. В 2 т. Т. 1
10. Collins G.V. Microwave magnetrons Massachusetts Institute of Technology Radiation Laboratory Series. no. 6. , McGraw Hill New – York 1948, p 46.