

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: mathmod.esrae.ru/42-166

Ссылка для цитирования этой статьи:

Кондратов Д.В., Володин Д.Н. Математическое моделирование алгоритмов машинного обучения // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2023. №2

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 122030100145-3)

УДК 51-7

DOI: 10.24412/2541-9269-2023-2-02-07

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

Кондратов Д.В.¹, Володин Д.Н.²

¹Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, Институт проблем точной механики и управления Российской академии наук (ИПТМУ РАН), г. Саратов, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
kondratovdv@yandex.ru

²Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, danil3000200@mail.ru

MATHEMATICAL MODELING OF MACHINE LEARNING ALGORITHMS

Kondratov D.V.¹, Volodin D.N.²

¹Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, Institute of Precision Mechanics and Control of the Russian Academy of Sciences, Saratov, Russia; Saratov State University, Saratov, Russia,
kondratovdv@yandex.ru

²Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, danil3000200@mail.ru

Аннотация: В статье представлен обзор основных математических моделей в методах машинного обучения, такие как линейная регрессия, логистическая регрессия, деревья решений, метод опорных векторов (SVM) и нейронные сети. Исследование подчеркивает важность математического моделирования для развития и применения алгоритмов машинного обучения и предлагает новые перспективы в этой области.

Ключевые слова: машинное обучение, линейная регрессия, логистическая регрессия, деревья решений, метод опорных векторов (SVM), нейронные сети.

Abstract: The article provides an overview of the main mathematical models in machine

learning methods, such as linear regression, logistic regression, decision trees, support vector machine (SVM) and neural networks. The study highlights the importance of mathematical modeling for the development and application of machine learning algorithms and offers new perspectives in this area.

Keywords: machine learning, linear regression, logistic regression, decision trees, support vector machines (SVM), neural networks.

Алгоритмы машинного обучения играют важную роль в развитии искусственного интеллекта и находят широкое применение во многих областях. В данной статье мы рассмотрим основные методы машинного обучения и применение моделей машинного обучения в новых областях.

1. Математическое моделирование алгоритмов машинного обучения

1.1 Линейная регрессия

Линейная регрессия является одним из базовых методов машинного обучения для регрессионного анализа, когда требуется предсказать непрерывную зависимую переменную на основе одной или более независимых переменных. Математическая модель линейной регрессии представляет собой линейное уравнение, которое определяет связь между независимыми и зависимой переменными. В общем виде уравнение линейной регрессии можно записать как:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_r x_r + \varepsilon \quad (1)$$

где y - зависимая переменная, x_1, x_2, \dots, x_r - независимые переменные, $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ - коэффициенты модели, ε - случайная ошибка.

Целью линейной регрессии является нахождение оптимальных коэффициентов $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$, которые минимизируют сумму квадратов ошибок (сумму квадратов разницы между предсказанными и фактическими значениями). Для нахождения коэффициентов часто используется метод наименьших квадратов (МНК) или его вариации.

1.2 Логистическая регрессия

Логистическая регрессия является алгоритмом классификации, применяемым для решения задач бинарной классификации (когда нужно разделить данные на два класса). Она также может быть обобщена на многоклассовую классификацию. Математическая модель логистической регрессии использует логистическую функцию (также известную как сигмоид) для прогнозирования вероятности принадлежности к определенному классу.

Для бинарной классификации уравнение логистической регрессии может быть записано как:

$$P(y = 1|x) = 1/(1 + \exp(-(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_r x_r))) \quad (2)$$

где $P(y=1|x)$ - вероятность принадлежности к классу 1 при заданных значениях независимых переменных, \exp - функция экспоненты.

Целью логистической регрессии является нахождение оптимальных коэффициентов $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$, которые максимизируют правдоподобие данных или минимизируют функцию потерь, например, логарифмическую функцию потерь.

1.3 Деревья решений

Деревья решений являются гибкими алгоритмами машинного обучения, используемыми для решения задач классификации и регрессии. Они строятся путем разделения данных на основе признаков с целью минимизации неопределенности или увеличения чистоты классов в каждом листе дерева. Математическая модель дерева решений представляет собой древовидную структуру, состоящую из узлов и листьев. Каждый узел представляет собой тест на определенное условие, а каждый лист представляет собой прогнозируемый класс или значение.

Для построения дерева решений используются различные критерии разделения, такие как индекс Джини или энтропия, которые оценивают неопределенность классов в каждом разделении. Алгоритмы построения деревьев решений включают ID3, C4.5, CART и другие.

1.4 Опорные векторы (SVM)

Метод опорных векторов (SVM) является мощным алгоритмом машинного обучения, применяемым для задач классификации и регрессии. Он основан на поиске оптимальной гиперплоскости, которая максимально разделяет данные разных классов в пространстве признаков. Математическая модель SVM определяет разделяющую гиперплоскость как линейную комбинацию опорных векторов.

Для линейно разделимых данных математическая модель SVM может быть записана как:

$$y(x) = w \times x + b \quad (3)$$

где $y(x)$ - прогнозируемый класс, w - вектор весов, x - вектор признаков, b - смещение (свободный член).

В случае нелинейных данных, SVM может использовать ядерные функции для проецирования данных в более высокие размерности, где они становятся линейно разделимыми.

1.5 Нейронные сети

Нейронные сети представляют собой глубокие модели машинного обучения, состоящие из искусственных нейронов, организованных в слои. Они являются универсальными аппроксиматорами функций и могут решать сложные задачи классификации, регрессии и другие. Математическая модель

нейронных сетей основана на идее передачи и обработки информации через взвешенные связи между нейронами.

Одна из наиболее распространенных архитектур нейронных сетей - многослойный персептрон (MLP), который состоит из входного слоя, скрытых слоев и выходного слоя. Каждый нейрон применяет активационную функцию к взвешенной сумме входов для генерации выходного значения.

Недавние исследования в области нейронных сетей сфокусированы на разработке новых архитектур (например, сверточные нейронные сети для анализа изображений), использовании рекуррентных нейронных сетей для работы с последовательными данными и развитии методов глубокого обучения, таких как генеративно-состязательные сети (GAN).

Описанные выше математические модели являются основными строительными блоками популярных алгоритмов машинного обучения. Последние исследования активно работают над разработкой новых математических моделей и методов, которые улучшают производительность и эффективность алгоритмов, а также расширяют их применимость в различных задачах машинного обучения.

2. Применение моделей машинного обучения в новых областях.

Математическое моделирование играет ключевую роль в развитии и применении алгоритмов машинного обучения и предлагает новые перспективы в этой области. Несколько аспектов, демонстрирующих его значимость:

Понимание основных принципов - математические модели позволяют нам лучше понять основные принципы и концепции, лежащие в основе алгоритмов машинного обучения. Они описывают связи между входными данными, выходными результатами и параметрами модели. Это помогает исследователям и разработчикам разрабатывать новые алгоритмы и улучшать существующие.

Оптимизация алгоритмов - математические модели помогают нам оптимизировать алгоритмы машинного обучения. Они позволяют нам формализовать задачу, определить целевые функции и методы оптимизации. Математическое моделирование позволяет нам находить оптимальные параметры модели, минимизировать функции потерь и улучшать производительность алгоритмов.

Обобщение и обобщение на новые данные - математические модели обладают способностью обобщать и обобщать на новые данные. Они могут улавливать закономерности и общие законы в данных, что позволяет им предсказывать результаты для новых наблюдений. Математические модели могут быть применены к различным типам данных, включая числовые, категориальные, текстовые и изображения, и способны улавливать их внутренние зависимости.

Управление сложностью - Математические модели помогают нам управлять сложностью алгоритмов машинного обучения. Они позволяют нам выбирать подходящие модели, оптимизировать гиперпараметры, управлять структурой моделей и применять регуляризацию. Математическое моделирование помогает нам балансировать между точностью и сложностью моделей, что является важным аспектом в практическом применении алгоритмов машинного обучения.

Развитие новых методов - математическое моделирование стимулирует развитие новых методов и подходов в области машинного обучения. Оно позволяет нам исследовать новые математические концепции, разрабатывать более эффективные алгоритмы и исследовать принципы, лежащие в основе глубокого обучения, рекуррентных нейронных сетей, генеративных моделей и других передовых методов.

В целом, математическое моделирование играет центральную роль в развитии и применении алгоритмов машинного обучения. Оно позволяет нам понимать, оптимизировать, обобщать и управлять сложностью алгоритмов, а также стимулирует развитие новых методов. Благодаря математическим моделям мы можем расширять возможности машинного обучения и применять их в различных областях, от науки о данных до медицины, финансов, робототехники и многих других.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 122030100145-3)

Литература

1. Математический анализ : учебное пособие / составитель Е. П. Ярцева. — Ставрополь : СКФУ, 2017. — 256 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/155295> (дата обращения: 30.06.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Гайдамак, И. В. Конкретная математика : учебное пособие / И. В. Гайдамак. — Тюмень : ТюмГУ, 2019. — 36 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/122108> (дата обращения: 30.06.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Бегишев, И. Р. Искусственный интеллект и робототехника. Глоссарий понятий / И. Р. Бегишев, З. И. Хисамова. — Москва : Проспект, 2021. — 63 с. — ISBN 978-5-392-33906-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/227525> (дата обращения: 30.06.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. Очеповский, А. В. Математическое обеспечение и администрирование информационных систем. Выполнение бакалаврской работы : учебно-методическое пособие / А. В. Очеповский, О. М. Гущина, Т. Г. Султанов. —

Тольятти : ТГУ, 2021. — 47 с. — ISBN 978-5-8259-1529-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/179253> (дата обращения: 30.06.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

5. Воронина, В. В. Теория и практика машинного обучения : учебное пособие / В. В. Воронина. — Ульяновск : УлГТУ, 2017. — 290 с. — ISBN 978-5-9795-1712-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/165053> (дата обращения: 30.06.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.