Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: mathmod.esrae.ru/42-167
Ссылка для цитирования этой статьи:
Бырдин В.М. О дисперсионных уравнениях в общей теории волн и в математической физике. // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2023. № 2

УДК 517.958; 534.2; 537.8 DOI:10.24412/2541-9269-2023-2-08-28

О ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЯХ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ВОЛН И В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Бырдин В.М.
ФГБУН Институт Машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия, V_M_Byrdin@mail.ru

ON DISPERSION EQUATIONS IN THE GENERAL THEORY OF WAVE AND IN MATHEMATICAL PHYSICS

Byrdin V.M.
A.A. Blagonravov Institute of Machines Science of the RAS, Moscow, Russia, V_M_Byrdin@mail.ru

Аннотация. В дополнение дифференциальным уравнениям, выделяются дисперсионные уравнения ($D(u;z) = 0$) междисциплинарной общей теории волн механики и электродинамики, как единый раздел теоретической и математической физики. В основе метода – положения комплексного анализа, неявных функций, геометрии кривых и индукции (обобщений). Анализируются простые и кратные корни $D(u;z)$: дву-, 4-ёх-, бидвукратные, нулевые и др. и соотв. особенности функций и кривых. Наиболее востребованы вещественные корни и бегущие моды. Дана классификация дисперсионных уравнений, функций и кривых. Формулировки о дисперсионных объектах обобщаются на широкий класс произвольных функций. Достижима редукция сколь угодно сложной функции $\varphi(u;z)$ и её нуля $u_n(z)$ к полиномам низких степеней. Анализируются дуги, перегибы, извилины, кресты (пересечения), петли, звёзды, овалы, пики (заострения) и другие сингулярные точки и фигуры плоских кривых . Наивысшая, «отрицательная» дисперсия присуща обратным волнам, обладающим широким спектром фундаментальных явлений. Проблема условий излучения в краевых задачах сводится к определению частотных спектров обратных волн.

Ключевые слова: теория волн, дисперсионные уравнения и кривые, кратные корни, сингулярные фигуры плоских кривых.

Abstract. In addition to differential equations, dispersion equations ($D(u;z) = 0$) of the interdisciplinary general wave theory of mechanics and electrodynamics are singled out as a single section of theoretical and mathematical physics. The method is based on the provisions of complex analysis, implicit functions, geometry of curves and induction (generalizations). Simple and multiple roots $D(u;z)$ are analyzed: two-, 4-ex-, bid-two-fold, zero, etc. corresponding singularities of functions and curves. Real roots and running modes are most in demand. A classification of dispersion equations, functions and curves is given. Formulations about dispersive objects are generalized to a wide class of arbitrary functions. Reduction of an arbitrarily complex function $\varphi(u;z)$ and its zero $u_n(z)$ to low degree polynomials is achievable. Arcs, inflections, wriggle, crosses (intersections), loops, stars, ovals, peaks (sharpening) and other singular points and figures of plane curves are analyzed. The highest, "negative" dispersion is inherent in backward waves, which have a wide range of fundamental phenomena. The problem of radiation conditions in boundary value problems is reduced to determining the frequency spectra of backward waves.

Keywords: theory of wave, dispersion equations and curves, multiple roots, singular figures of plane curves.

1. ВЕДЕНИЕ

1.1. Дисперсионные уравнения и диспергирующие линейные волны. Теория волн – фундаментальная и прикладная, многопрофильная и междисциплинарная, весьма актуальная научно-технологическая отрасль, мощно развивающаяся в ряде областей современной механики и электродинамики. Большинство волновых процессов обладают *дисперсией* – сложной, трансцендентной зависимостью волнового числа $\sigma(\nu)$ от частоты ν. (В отл. от вероятностной дисперсии в математической статистике, которая также свойственна волновым, случайным и квантовым процессам, не рассматриваемым в данной работе). Лишь в упрощённых и приближённых моделях дисперсией пренебрегают, $\sigma/\nu \approx const$.

Фундаментальные положения теории диспергирующих волн отражены в ряде отечественных изданий, фолиантов и учебников, особенно советского периода. Понятие *дисперсионного уравнения* (**ДУ**), иногда говорят *характеристического*, давно бытует в физике и математике, по меньшей мере, со второй пол. 20-го в. [1–9 и мн. др.]. Термин же *дисперсионная функция*, для левой части ДУ, $D(\sigma;\nu)$, очевидно, идёт от *Дж. Уизема* (*G. B. Whitham*), 1973 [2, с. 378]. Вместе с тем, *дисперсионной* уместно называть и функцию $\sigma_n(\nu)$, *кривая* которой (**ДК**) наиболее востребована в теории волн и технологий. Также был предложен термин дисперсивные волны как синоним *диспергирующих* – *Рущицкий Я. Я.* [5, 1997г]. В качестве характерных примеров на рис. 1 приведены дисперсионные кривые из гидродинамики и теории волноводов, вкл. обратноволновые моды. Рис. 1*а* по данным [8, сс. 227, 240, рис. 11.7] (периоды колебаний без масштаба). Рис. 1*б* – по [9, с. 119, рис. 3.6.5]: прямая жирно $k = \omega/C$, C – скорость света, 5 и 8 (50, 80·ГГц) – соотв. плазменная и циклотронная частоты, задающие сингулярный участок, вкл. ≈(7–10) с обратноволновыми модами с $\partial\omega/\partial k < 0$; k и σ – волновое и приведённое (безразмерное) волновое числа. На рис. 1*а* конечный спектр нескольких волн, на *б* бесконечный счётный многомодовый. Что и весьма типично для, соответственно, безграничных сред различной микроструктуры и для всевозможных волноводов, разной физической природы и поперечного сечения, замкнутых или открытых, круглых, планарных и т.д.

В дополнение и в *антитезу дифференциальным уравнениям*, стоящим в центре внимания со времён *Эйлера* и *Ньютона* и весьма развитым в математической физике и прикладной математике, предлагается выделить дисперсионные уравнения общей теории волн, как весьма важный, цельный и самодостаточный раздел теоретической и математической физики. Прежде всего, линейной теории волн (дисперсию нелинейных волн здесь не рассматриваем, см. также замеч. 4.2). Волновые процессы – это наиболее широкий, универсальный объект физической науки, волны «пронизывают всё здание современной и классической физики», *(Кикоин И. К.* [3 и др.], *Мандельштам Л. И., Прохоров А. М.* [10, с. 9; 11]). А по квантовому дуализму все частицы микромира суть реальные волны. Описывая законы дисперсии волны, дисперсионные уравнения, через волновой фактор или ядро интеграл-преобразования $expi(ur-vt)$, определяют все другие положения теории волн и волновых технологий. Причём волны любой физической природы, т.е. и в электродинамике, в оптике, радиотехнике, спинтронике, и в механике, в гидро- и вибро-акустике, геофизике, и в ряде других отраслей.

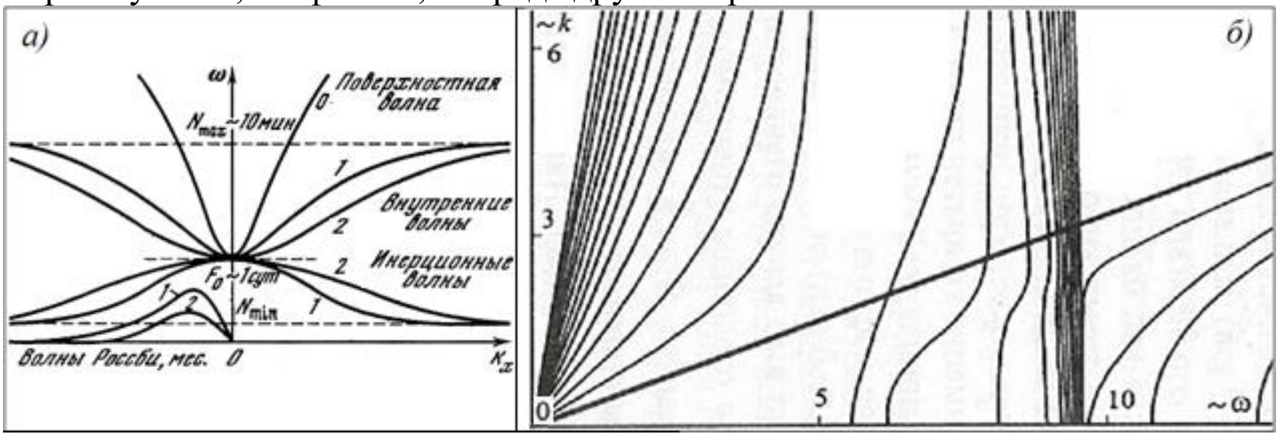

Рис. 1. *а)* Дисперсионные кривые гидродинамических симметричных (кроме Россби) волн во вращающейся несжимаемой жидкости, океана или атмосферы, как сечения $\omega(k_X; k_Z)$. *б)* Спектр симметричных мод плазменного круглого волновода.

В мировой физике «идеология общности» теории волн берёт начало с *Джона Рэлея*, с 1870-ых гг., в России – со *Столетова А. Г.*, с 1880-ых [12]. Что нашло отражение, в частности, и в работах советских учёных, в трудах *Бабича В. М., Бреховских Л. М., Горелика Г. С., Гуляева Ю. В., Ландау Л. Д., Малюжинца Г. Д., Хохлова Р. В.* и многих других физиков, механиков и математиков.

Подчеркнём, что общность и единство теории волн порождаются инвариантным представлением гармонических волн и волновых процессов через волновой фактор и законы дисперсии или дисперсионные уравнения.

Дисперсионные уравнения непосредственно описывают *волновую кинематику*, многие явления и свойства и важные показатели и характеристики волны. Это такие фундаментальные азбучные атрибуты, как фазовая и групповая (энергетическая) скорости, длина-волны, показатель преломления, задержка. А в *анзаце* (в анализе и расчёте – *Бабич В. М. и др*. [7]) ещё и отражение, диссипативное затухание, доплеровский сдвиг, условия излучения (в краевых задачах) и многое другое. По сути, около половины количественных данных и качественных характеристик волны детерминированы и рассчитываются по ДУ-ям непосредственно. А опосредованно – и амплитудные, и энергетические показатели, т.е. волну, моду и волновой процесс в целом.

1.2. Обратные волны и проблема излучения. Среди разнообразных типов волн особое место занимают обратные волны, **ОВ**. Они обладают наиболее высокой, *отрицательной дисперсией* ($\partial\omega/\partial k < 0$), когда фазовая и групповая (энергетическая) скорости противоположны и, как следствие, имеют широкий круг аномальных фундаментальных явлений и свойств. Из которых наиболее известны: отрицательное преломление, сверхфокусировка, антизеркальное отражение, обращённые эффекты Доплера и Черенкова, притяжение света и звука (в отл. от давления) и многие др., удивительные фундаментальные эффекты и явления ([7, 13–20] и мн.-мн. др.). Поэтому в последние два-три 10-летия в ряде мировых и российских центров значительно вырос интерес к обратным волнам, включая перспективы новых открытий и передовых технологий. В том числе и проекты «плаща-невидимки» и метаматериалов, новых материалов – носителей обратных волн в электродинамике и механике, (нередко и к сожалению, сенсационные заявления). Т.е. технологии скрытности, оптической, радиотехнической и тепловой, и изоляции, акустической и вибро-механической [23–30,...]. Что и отмечено присуждением ряда международных и национальных премий и номинаций:
Веселаго В. Г. (1929–2018 годы жизни, Россия), *Пэдри Дж. Б. (John Pendry*, Англия), *Смит Д. Р. (David Smith*, США) и другие [29, 31].

Развиваемый автором метод анализа дисперсионных уравнений направлен, в конечном счёте, на анализ диспергирующих и обратных волн [7, 22, 30, 32–37 и др.]. И подчеркнём, что существенный вклад в физическую теорию обратных волн внесла отечественная наука, начиная со знаменитых лекций советского физика *Л. И. Мандельштама*, 1940ые, и с широко известной, весьма цитируемой статьи тоже советско-российского физика *В. Г. Веселаго* (УФН, 1967) и до работ наших современников. Вместе с тем, честь открытия обратных волн принадлежит английскому механику *Гораку Лэмбу*, 1904, *(Lamb Horace)*. Кроме того, идею первого эффекта, отрицательного преломления впервые высказал немецко-британский физик *Артур Шустер (Arthur Schuster*, 1904). См. в [7, 16, 17, 28, ...]. Однако детально этот эффект был разработан *Мандельштамом*, с 1940ых гг., и затем другими авторами у нас и за рубежом, причём оборот «отрицательно преломляющие» стал расхожим в обратноволновой проблематике в заголовках и в целом.

С дисперсионными уравнениями тесно связана ещё одна фундаментальная проблема, проблема принципов и условий излучения, известная в математической физике по работам *Вайнберга Б. Р., Свешникова А. Г., Тихонова А. Н.* и других математиков. А в теоретической физике – идущая от *Арнольда Зоммерфельда* (1896/1912), *В. С. Игнатовского* (1905), *В. А. Фока* (1926) и других классиков и развитая современными учёными. Следует подчеркнуть также значительный вклад российской науки и в проблему излучения, принципов и условий излучения – см. статьи и обзоры [32,51–61,...].

В этой связи заметим, что некоторые авторы полагают *Н. А. Умова* соавтором энергетического принципа излучения. Однако проблему излучения в целом впервые поставил *А. Зоммерфельд*, лишь 1898 г., с его широко известными, но не универсальными «условиями излучения Зоммерфельда» – с расходящимися по фазе волнами [62, с. 327; 63; 64]. И, более того, *Зоммерфельд* первым отметил также и энергетический аспект этой проблемы – см. *Müller C., Felsen L.* and *Markuwitz N.* [в 63]. Конечно, введение энергопринципа было предопределено фундаментальным понятием потока энергии Умова (1874 г.; вектора Умова-Пойнтинга); но именно в лекциях *Л. И. Мандельштама* это понятие впервые применено к обратным волнам, к их преломлению (1940-45). Поэтому со временем энергетический принцип стали именовать принципом Мандельштама [47, 51, 57–60, 65]. Наконец, одним из пионеров проблемы излучения в целом считается *Игнатовский В. С.* (1875–1943), советско-немецкий учёный, предложивший в 1905 г. принцип предельного поглощения или принцип Игнатовского.

В статьях [32, 53, 65] мы сводим проблему условий излучения к обратноволновой проблеме, к выявлению в спектре довольно редких обратноволновых мод, поскольку большинство волновых процессов представлены *прямыми волнами* (**ПВ,** расходящимися, уходящими на бесконечность) (см. также ниже Следствие 3.3). Т.о., воедино сводятся две проблемы, более века идущие параллельно, первая – обратных волн, развиваемая в основном в теоретической физике, и вторая – условий излучения, в математической физике.

2. Типы и классы дисперсионных уравнений, функций и кривых

Определение 2.1 (Дисперсионные уравнения, функции и кривые (**ДУ**, **ДФ** и **ДК**); многомодовый волновой спектр).

А) *Дисперсионное уравнение в узком, собственном смысле – это трансцендентное или алгебраическое уравнение* $D(\sigma;\nu) = 0$ *аналитической функции D, с искомым волновым числом и основной независимой, как правило, переменной – частотой колебаний. ДУ описывает волновой фактор* $exp i(\sigma r - \nu t)$ *гармонической волны и компоненты дискретного или сплошного спектра по σ и /или ν.* (**r** – пространственный вектор, *t* – время). *Спектр по* σ_n ($n = 0,1,2,3, \dots$ – номера мод), *как правило, многомодовый счётный; сплошной – для импульсов и нестационарных процессов. В подклассе анизотропных систем изучаются обратные функции* $\nu_n(\sigma_1;\sigma_2;\sigma_3)$, σ_j *– компоненты волнового вектора.*

Б) *В широком смысле под дисперсионным уравнением будем подразумевать и само уравнение, и его корни* $\sigma = \sigma_n(v)$, *дисперсионные функции, и табличные данные дисперсионных кривых, полученные численно или в физически натуральном эксперименте. Причём в дисперсионной и волновой проблематике ДК всё больше превалируют над ДФ и собственно ДУ. При моделировании волн, в общем случае все переменные ДФ предполагаются или являются комплексными, вкл. и все волновые числа, а также, иногда формально, и частоту:*

$$u = \sigma + i\alpha, u_n = u_n(z),\ z = x + iy, z =_1 \{z\}^m,\ m\geq 2,\ z_1 = v + i\gamma, \quad (1)$$

$p =_1\{p_j\}^h = (z_2, z_3, \dots, z_{h+1})$, *где* p_j *– параметры материальной структуры, волновода,* $h \geq 1$.

В) *Приоритетен анализ бегущих волн, затем комплексный многомодовый спектр, бесконечное счётное множество мод, реже конечное. В теории волн и технологий особо выделяют низкочастотную нулевую моду,* $\sigma_0(0+0)\downarrow 0$, *и низшие моды. В высокочастотном спектре* ($v \uparrow \infty, v \gg 1$) *имеет место, как правило, вырождение дисперсии* ($v/\sigma = \mathrm{c} \to const$) *и волновых явлений и упрощение задач.*

(Здесь наша краткая альтернатива ${}_1\{p_j\}^h$ и т.п. – индекс перед символом).

2.1. Классификация дисперсионных уравнений. Соответственно типам числовых функций в математике, различаем основные классы дисперсионных уравнений. Сформулируем также другие их свойства и положения.

Определение 2.2. ***А.*** *Выделяем алгебраические, трансцендентные и виртуальные дисперсионные уравнения, кривые и функции (ДУ, ДК и ДФ) многих переменных, волнового числа или вектора, частоты и нескольких параметров волноводной структуры (1).*

2Б. *Трансцендентный класс делится на элементарные и специальные типы. Алгебраический и трансцендентный – на явные и неявные, с преобладанием второго. Виртуальные – на численные (полученные численно) и физически экспериментальные (из физического натурального эксперимента).*

2В. *Аналитически более разработаны трансцендентные неявные и алгебраические уравнения* $D(u; v) = 0$ *и дисперсионные плоские кривые вещественного спектра* $\sigma_n(v)$. *Дисперсионные кривые и поверхности наиболее представительны и информативны.*

2Г. *Трансцендентным и виртуальным ДУ соответствуют, как правило, бесконечное счётное множество корней* $u_n(v)$, $n = 0,1,2,3, \dots$, *и бесконечные комплексные модовые спектры. Алгебраическим – конечные. Вещественный спектр* $\sigma_n(v)$ *(с* $\alpha_n \equiv 0$, $\alpha_n \downarrow 0$ *и* $\alpha_n \approx 0$) *конечен на ограниченных диапазонах частот.*

2Д. *Вещественный спектр описывает многомодовую группу бегущих волн* $A_n(r) exp i(\sigma_n r - vt)$, *несущих мощность и сигнал на большие расстояния и наиболее востребованных теоретически и технологически.*

Виртуальный класс функций и кривых, и не только дисперсионных, а произвольных числовых функций – наше понятие [37], в русле [66], и в отл.

от ряда других, специальных применений термина «виртуальный» в математике и в др. отраслях. Это наиболее широкий и всё более растущий класс, в силу стремительного прогресса экспериментальных (натуральных) работ и вычислительных методов в механике и электродинамике. Строго говоря, требуется доказательство теоремы существования виртуальной функции, исходно постулируемой (неявно, имплицитно). В *дисперсионном анализе*, т.е. в анализе ДУ, ДФ и ДК, наиболее информативны асимптотики, алгебраические и элементарные функции, см. и ср. [67, 74]. А весьма эффективна редукция – сведение к низшим полиномам трансцендентных, виртуальных и произвольных, сложных функций (обобщая и вкл. матем. композиции, *сложные* $F(f(\varphi(\dots)))$).

2.2. Типичные особые точки, сингулы и компоненты гладких функций и плоских кривых в теории волн и в общем анализе

Пример 2.1.а. Дисперсионные уравнения упругих волн Лэмба в однородной изотропной пластине – типичный пример неявного трансцендентного, тригонометрического уравнения, крайне востребованного [8, 15, 39, 65 и мн. др.] и *обманчиво* простого:

$D(\sigma, v, g) = 4\sigma^2\beta_1 tg\beta_1 + (2\sigma^2 - v^2)^2 tg\beta_2/\beta_2,\ \beta_K^2 = v^2P_K^2 - \sigma^2;\ P_T = 1,$ $P_L = g = C_T/C_L$, C_T и C_L – скорости поперечных и продольных волн; $\sigma = kh$, $v = \omega h/C_T$, $2h$ – толщина пластины. Здесь два ДУ: по $P_{1/2} = P_{L/T}$.

Пример 2.1.б. На рис. 1 два примера ДК. И весьма типична следующая, выделяемая из бесконечного спектра, вещественная дисперсионная кривая – рис. 2.

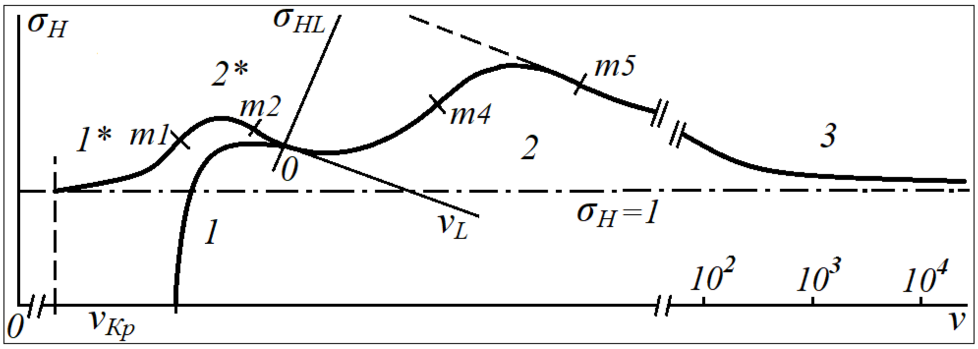

Рис. 2. Типичная вещественная дисперсионная кривая. Три характерных участка: *1* – критическая область; *2* – извилины; *3* – квазипрямая, асимптота на ∞-ть, в *дБ*. Локальные оси $(\sigma_L 0 v_L)$ для отдельной извилины; m_K – точки перегиба. *1** и *2** – элементы поверхностной волны, с обрывом на v_{Kp}. Для компактности рис-ка дана вторая нормировка: $\sigma_H = \sigma/\sigma_0$, $\sigma_0 = v/C_\infty$.

Определение 2.3. *Типичная дисперсионная кривая, основная – волнового числа, и её функция* $\sigma(v)$ *есть строго монотонно растущая функция частоты. Для обратных волн – строго убывающая.*

Доказательство. Во-первых, в корректных задачах $U < \infty$, $U = \partial v/\partial\sigma$ – групповая скорость. Однако теоретические модели не безусловно, не всегда вполне корректны – по меньшей мере, в смысле идеализации и приближённости. Поэтому даём неполно индуктивное доказательство: данное утверждение является обобщением значительного, всё более растущего числа публикаций, связанных с дисперсией волн (в частности – ДК рис. 1). Кроме того, дедуктивный элемент доказательства: аналитически решённые волновые задачи с явными $\sigma(\nu)$ дают для прямых волн $\sigma\sigma'=\partial\sigma^2/\partial\nu>0$ и $\sigma\sigma'<0$ для обратных.

Определение 2.4. *Наиболее типичный элемент дисперсионных функций и их асимптотик – квазипарабола,*

$$\sigma_n = \sqrt{a_n(\nu)} \sim a_{n0}\sqrt{(\nu-\nu_n)} + 0^{3/2}. \quad (2)$$

Где $0^{3/2}$ и в общем $0^p = 0((v-v_n)^p)$ – наш краткий символ малости относительно предыдущего в разложении.

Определение 2.5 (о чётности и вещественности ДФ). *Дисперсионные функции $D(u,z)$, довольно часто, как правило, вещественны на вещественном множестве $(\sigma, v, \ldots)$ и чётны по всем переменным ν, u, ${}_1\{p_j\}^h$, $h\geq 1$,* (1). *Реже ДФ нечётны или смешаны (общего вида $D = D_{\text{Ч}} + D_{\text{Н}}$ – с чётной и нечётной частями). Частота ν, безусловно, как правило, вещественна, также и все другие переменные, параметры волноводной системы ${}_1\{p_j\}^h$, вещественны в большинстве задач, в математических моделях линейной теории волн и технологий. В научно-технических задачах наиболее востребован вещественный спектр ${}_0\{\sigma_j\}^N$, $N\geq 1$, адекватный бегущим волнам.*

Комплексный и мнимый спектр необходим при решении краевых задач, где важна проблема полноты спектра; кроме того, комплексные волны имеют и самостоятельное применение. Комплексные *переменные* $z=x+iy={}_1\{z_j\}^m$, $m\geq 2$, необходимы в двух типах задач. Это 1) диссипативные волноводные системы с затуханием волн и 2) краевые задачи с проблемой излучения. По принципу предельного поглощения задаётся малая мнимая добавка вида $v + i\gamma$, так что $\gamma \ll v$. В обоих случаях затухание бегущих волн довольно мало $\alpha \ll \sigma$, что имманентно, присуще волновой системе по определению (см. ниже утверждение 3.1). В связи с чем – наша нижеслед. теорема 3.1.

3. Простые и кратные корни дисперсионных уравнений

3.1. Простые корни

Теорема 3.1 (о простом вещественном корне [32,71]). *Пусть функция Δ двух комплексных переменных $u = \sigma + i\alpha$ и $z = x + iy$, голоморфна в окрестности $M_1 \subset C^2$ точки $(\sigma_0; x_0)$, вещественна на вещественном множестве $(\sigma; x) \in M_1$ и имеет в этой точке нуль 1-го порядка по u. Тогда в некоторой подобласти $M_2 \Subset M_1$ уравнение $\Delta(u;z) = 0$ имеет единственный корень $u_n(z) = \sigma_n(x,y) + i\alpha_n(x,y)$ – голоморфную функцию с замечательными свойствами:*

$$\alpha_n(x,y) = {}_0\Sigma^{\infty}\left((-1)^K/(2\kappa+1)!\right) y^{2K+1}\,\partial^{2K+1}\sigma_n(x,0)/\partial x^{2K+1} \sim y\sigma'_{n0} + 0^3; \quad (3)$$

$$\sigma_n(x,y) = {}_0\Sigma^\infty((-1)^K/(2\kappa)!)\, y^{2K}\, \partial^{2K}\sigma_n(x,0)/\partial x^{2K} \sim \sigma_{n0} - y^2\sigma''_{n0}/2 + 0^4 \qquad (4)$$

– с нечётной α_n и чётной σ_n по y.

Где производные неявной $\sigma_n(x,y)$: $\sigma'_n = -\Delta'_Z(\sigma_n;x)/\Delta'_u(\sigma_n;x)$, $\sigma''_n = \ldots$.

Доказательство – на базе теорем о неявной функции, тождества $\alpha_n(x,0) \equiv 0$ и условий голоморфности Коши-Римана ($\partial\sigma/\partial x = \partial\alpha/\partial y$ и т.д.).

В случае многих переменных ${}_1\{z_j\}^m$, $m \ge 2$, имеем также простые асимптотики, но громоздкие кратные ряды (см., например, ниже (7), [71]). (Здесь наша краткая альтернативная запись ${}_1\{z_j\}^m$ или ${}_0\Sigma^\infty$ и т.п. с индексом перед символом, сродни, в некой мере, общепринятому в физике суммированию по повторяющемуся индексу).

Полученные формулы весьма продуктивны и физичны, особенно (3). Их асимптотики, как чётной и нечётной функций, довольно точны, поправки 0^K высокой степени малости. Отсюда имеем физически и математически важные следствия.

Следствие 3.1 (о затухании бегущих волн). *Коэффициент затухания пропорционален потерям γ и обратен групповой скорости*

$$\alpha_n(v,\gamma) = \gamma/U_n(v) + 0^3. \qquad (5)$$

В случае многих, структурированных потерь y_K важная обратная пропорция $\alpha_n \propto U_n^{-1}$ сохраняется

$$\alpha(x,y) \sim \Sigma_1^m y_K S_K/U, \quad S_K = \Delta'_{ZK}(\sigma;x)/\Delta'_v(\sigma;x), \qquad (6)$$

S_K – структурные коэффициенты поглощения 2-го рода (**СКП-2**). (Индекс n опускаем).

СКП-2 введены нами [33, 1997г], в отличие от известных СКЗ, затухания [68, 1970], или СКП-1, 1-го рода.

Далее также обобщённое заключение о затухании волн.

Утверждение 3.1. *Затухание всякой бегущей, объёмной или диспергирующей волны имманентно невелико: $\alpha\lambda \ll 1$. А диссипативные потери волноводной системы малы: $y_K\,\lambda_0 \ll 1$ – добротные структуры.* (Где λ – длина волны, λ_0 – нормировочная $\lambda_0 = C_0/v$).

Доказательство. По (3, 5 и 6) коэффициент затухания волны и потери квазилинейно взаимосвязаны. Затухание же имманентно мало – по определению, как правило. В противном случае система будет скорее заперта в колебательно-волновом отношении. Т.е. понятие бегущей волны предполагает, что она пройдёт хотя бы несколько ($l,\ l \gg 1$) длин-волн (сделает ряд колебаний), прежде чем затухнет. Пусть затухнет, например, в e раз: $\lambda l = 1/\alpha$.

Следствие 3.2 (о малости диссипативных поправок [69]). *Поправки к волновому числу, фазовой и групповой скоростям и к другим кинематическим показателям бегущей волны в добротных структурах весьма малы, 2-го порядка малости относительно диссипативных потерь:*

$$\sigma_n(x,y) = \sigma_{n0} - 0{,}5\,\Sigma_1^m y_i^2\, \sigma_{n/i}^{2)}(x) + \Sigma_{K=1}^{m-1}\sum_{j=K+1}^m y_j y_K \sigma_{nKj}^{2)}(x) + 0^4; \qquad (7)$$

$$V_n = v/\sigma_n; \quad U_n = \partial v/\partial\sigma_n.$$

См. также [20, 35, 68–70] и др. работы по диссипации.

Следствие 3.3 (о *физических* принципах и *математических* условиях излучения). ***3А.*** *По принципу предельного поглощения бегущая волна является обратной (приходящей) при* $\sigma'_{n0}=1/U_n<0$ *или прямой (уходящей) при* $\sigma'_{n0}=1/U_n>0$, $\sigma \geq 0$, $\nu \geq 0$. *Или, инвариантно произволу знаков* $\exp i(\pm\sigma r \pm \nu t)$ *, в волновом факторе (времени и координатных осей),*

$$\pm\partial\underline{\boldsymbol{\sigma}}^2{}_{n0} / \partial\nu^2 = \pm 1/\underline{\mathbf{V}}_n\underline{\mathbf{U}}_n < 0$$

и что отражает со- или анти-коллинеарность векторов фазовой $\underline{\mathbf{V}}_n$ *и групповой* $\underline{\mathbf{U}}_n$ *скоростей.* [14, 53].

3Б. *Через групповую скорость в* (5) *согласуются три основных принципа излучения: принцип предельного поглощения, энергетический и причинности – ведущих к одним и тем же условиям излучения.*

3В. *В проблеме излучения существенно определение: именно физически задаваемые принципы, но математически выводимые условия излучения.*

В *3В* математические условия – выводятся математически, но физические принципы, т.к. задаются, базируются на фундаментальных представлениях о физике волновых процессов, [65, п. 6]. Например, в принципе предельного поглощения это затухание волн, в энергетическом – перенос волновой энергии на бесконечность. (Здесь для символа вектора, наряду с традиционной стрелкой сверху или жирным шрифтом, нами предлагается альтернативно черта снизу (как в *3А)*, что проще при наборе текста).

3.2. О кратных корнях и критических волновых процессах. Кроме рассмотренных однократных корней, анализируем дву- и много-кратные корни дисперсионных уравнений в окрестностях особых точек, в частности, критических частот, соответствующих критическим волновым режимам. В основе нашего метода анализа – Подготовительная теорема Вейерштрасса и алгебраическая редукция [32, 71 и др.].

Определение 3.1. *Наиболее распространён двукратный нулевой корень (от нуля по* σ *или* u*):*

$$u = \sqrt{a_n(z_1)} \sim a_{n0}\,(z_1 - \nu_n)^{1/2},$$

ν_n *– критическая частота. Что описывает критический процесс образования бегущей волны. Ниже критической частоты мода представляет собой неоднородное распределённое колебание* $\exp(-\alpha_n r - i\nu t)$. *Также и у обратноволновых мод, как правило, узкополосных, выше верхней критической частоты* ν_n *и ниже нижней* ν_{nb} *это не бегущая волна, а распределённое колебание.*

См. [65, 69], определения 2.4, 2.5.

Информационную и энергетическую основу волновых процессов составляют, конечно, бегущие моды. Однако в целом на полу-бесконечной полосе частот выделяется бесконечное, в общем случае, счётное множество критических областей, соответствующих сингулярностям, окрестностям критических частот, рис. 3. В этих зонах происходят трансформации волн, волновые квазирезонансы и др. критические режимы, ещё не вполне изученные. Вне критических зон волновые процессы можно считать *регулярными*. Критические или сингулярные объекты рассматриваются в нижеслед. п. 4.

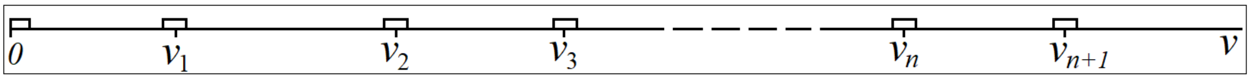

Рис. 3. Диапазоны критических и регулярных волновых областей частотного спектра (вокруг и вне критических частот ν_n); схематическое разграничение.

Замечание 3.1 (о волновых квазирезонансах [36]). Резонанс – существенное свойство колебательных систем с сосредоточенными и распределёнными элементами. *Изолированных* систем, где и возможно устойчивое накопление колебательной энергии, теоретически вплоть до бесконечности, но ограниченное диссипацией и нелинейностью. В частности, в резонаторах, как обрезках волноводов, экранированных всесторонне. Суть же волнового процесса – в переносе энергии от источника излучения на большие расстояния, условно, на бесконечность. И лишь на критических частотах в волноводах возможны квазирезонансы, в некой мере устойчивые строго при $\nu = \nu_n$ (более строго, чем $\nu \approx \nu_R$ в довольно устойчивых резонаторах, даже в высокодобротных, с узкой резонансной полосой).

4. Метод редукции, экспликация сингулярных фигур и структура плоских и дисперсионных кривых

Сингулярные фигуры – это локальные, типичные и общие компоненты плоских кривых и гладких функций. В целом возможна *экспликация* (выявление) как сингулярных фигур, так и общей структуры трансцендентных и виртуальных функций и кривых. Эти вопросы весьма актуальны в геометрии кривых, где преобладает алгебраистика, а трансцендентная теория в застое. Что признаётся и самими математиками, и характерно, что один из наших, мировых журналов назван «Алгебра и анализ». Автор исходит из физической теории волн, в которой исследование дисперсионных и других, весьма сложных кривых составляют значительную проблему, в теории, численном расчёте и в физическом эксперименте. См. [83] и др.

4.1. Простые корни, голоморфные функции и гладкие кривые. В центре анализа – неявные функции $u(z)$, в данном случае, дисперсионные уравнения общего вида $D(u;z) = 0, u = \sigma + i\alpha, z = \nu + i\gamma$. Виртуальные функции сводятся к ним после постулата или, возможно, доказательства теоремы существования функций D или $u(z)$, и прежде всего вещественных $\sigma(\nu)$. Простые корни превалируют на практике и в приложениях, т.к. для дву-, трёх-, 4ёх-кратных и др. сингул требуется уже два, три и т.д. уравнения – исходное и зануления её производных.

Т.о, имеем, как правило, простые корни уравнений, порождающие голоморфные функции и гладкие кривые $u(v,p)$ на всём, $m+1$ мерном множестве переменных. В случае дисперсии волн – это частота v и параметры $_1\{p_j\}^m$ волноводной системы (1). Счётное множество сингул, особых точек и их областей, составляют некоторое малое исключение из аналитического, голоморфного множества (см., например, выше рис. 3).

4.2. Сингулярные области. Анализ на базе изящной эффективной Подготовительной теоремы Вейерштрасса (**ПТВ**) и двойной последовательной редукции исходной трансцендентной $D(u;z)$ к полиномам. В общем случае исходной произвольной, сколь угодно сложной функции (и не только математически сложной, т.е. суперпозиции $F(f(\varphi(\ldots))$. Откуда сведение (редукция) общего анализа к алгебраистике низших полиномов как по u, так и по z.

Например, 4-ёхкратная сингула в нуле

$$\sigma=(v(1+a_2v+a_3v^2+\ldots))^{\mathbf{1/4}}\sim v^{1/4}+d_2v^{3/4}+0^{5/4},\quad 0^{5/4}=0(v^{5/4}).$$

Также *крест* простой (пересечение двух гладких линий) или *бидвукратная* сингула по нашей формуле и асимптотике:

$$\sigma\sim\sigma_0+a_1v+b_2v(1+b_3v+0^2)^{1/2}+0^2. \tag{8}$$

И так далее, другие *сингулы*, точки, зоны (области) и элементы. Исторически первый крест описал, по-видимому, ещё *Никомед* (3–2 вв. до н.э.), хотя и косвенно, в своей Конхоиде. Сам термин *Крест* – из [72, с. 7]. Простая, тоже алгебраическая формула креста типа (8) встречается также в [46, с. 337].

4.3. Сингулярные элементы и фигуры. Это: перегибы и дуги, извилины (двойные повороты, зигзаги), кресты и звёзды, овалы и пики (заострения), петли и спирали, узлы и косы, обрывы и сгущения, сингулы в нуле и на ∞-ти и другое.

Дуга, вечный образ и новый анзац. Дуга – это простейший и самый распространённый элемент дисперсионных функций, как и произвольных плоских кривых и гладких функций, это *ветвление*, описываемое *квазипараболой:* $\sigma(v)\sim v^{1/2\mathrm{K}}$, именно $\kappa=1$ и много реже $\kappa=2,3,\ldots$. Это наше следствие из теоремы ПТВ. Так, например, на рис. 4 две дуги, а на рис. 2 семь.

Извилина (наше, новое математическое понятие, см. в [83]). Это существенный имманентный *компонент* всякой, достаточно сложной кривой – рис. 4. Классическая кубика x^3 – простейшая алгебраическая извилина.

Определение 4.1 (*извилина* и три её асимптотики)**.** *Любая гладкая извилина строго описывается тремя локальными квази-полиномами. Левой дугой, квазипараболой,* $f\sim-a_1x^{2n}$, *развёрнутой в первой локальной системе координат (в 1-ом локусе). Перегибом, квазипрямой* $x+a_3x^{2m+1}+0^{2m+2}$, *во втором локусе. И правой дугой, псевдопараболой в 3-ем локусе* $+a_2x^{2r}$. $n,m,r=1,2,3,\ldots$

Значок локуса $_L$ опускаем; $a_K>0$. Координаты, локальные (со сдвигом и поворотом) $(y_L 0 x_L)$ и базовые $(y0x)$ – см., например, на рис. 2. Заметим, что для перегибающихся кривых типа x^{2m+1} аппроксимация их ветвей квазипараболами – не самый, очевидно, оптимальный вариант. Другое дело более сложные кривые с локальными перегибами, например, ДК обратноволновой моды.

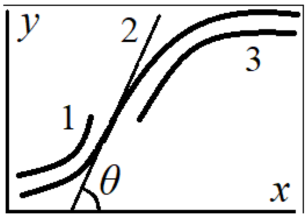

Рис. 4. Извилина и три её элемента, две дуги и квазипрямая перегиба. Для ДК-кривой обратной волны $\theta > 90°$.

Теорема 4.1. *Извилина дисперсии $\sigma(v)$ обратной волны имеет отрицательный наклон.*

Что и фундаментально – [7, 13, 50, 65, 73, …]. См. рис. 1, 4 и 5. Для низкочастотных, нулевых ОВ (от нуля частот) $\sigma(v)$ даётся квазипараболой.

О звёздах, многолучевых пересечениях (новое понятие, в отл. от известных *узлов*, как особых точек дифференциальных уравнений с многолучевыми кривыми). Наше, *не аналитическое* (в комплексном смысле) решение:

$$f \sim x|(1 + ax + \cdots)^{1/p}| \cos(2\pi m/p), \qquad p = 2,3,4, \dots, \qquad m = 0,1,2, \dots$$

При $p = 2$ – простой крест (8). Последнее наше развитие темы см. в [83].

Петли и спирали, пики и кресты. В отличие от классических, так сказать, *точечных* – закрученных вокруг точки, нами введены *спирали осевые*, тоже плоские, но закрученные вокруг прямой оси, [83]. Они имеют петли, пики и кресты.

Пика – это заострение 1-го рода (наш альтернативный, краткий термин).

Пьезоволновод [75, рис. 2а; 48] имеет пики групповой скорости $U(v)$, очевидно, при некотором сочетании параметров. См. нашу схему – рис. 5, ниже. Где наглядно полагаем, что пики $U(v)$ – это, с одной стороны, вырождение петель: на рис. 5 *б)* и *г)*. А с другой, пика порождается вертикальным перегибом волнового числа: окрестности 2 на рис. 5 *в)* и *г)*.

Предложение 4.1. *Спираль осевая плоская – периодическая регулярная кривая, содержащая на своём шаге петли и кресты. Петли могут вырождаться в пики и /или давать самокасания.*

Самоприкосновение – в матем. *Доказательство* – неполное обобщение.

Например, поворотом тривиальной синусоиды, $y_L(x_L) = \sin x_L$, и её производной $\partial x/\partial y$ мы получили *новую спираль с петлями* и *крестами* – рис. 6, ниже. Причём с одним, тремя или несколькими крестами в зависимости от наклона оси исходной синусоиды. Таковы же, но более сложные элементы и петля групповой скорости $U = \partial v/\partial \sigma$ встречаются в теории волн. Откуда и сама наша, уже общая геометрическая идея спирали, порождаемой извилистой кривой.

Определение 4.2. *Петля плоская $\varphi(x)$ – это самопересекающаяся кривая, ограничивающая и замыкающая конечную область D в области своего*

ISSN 2541-9269

определения на плоскости $y0x$: $D + \partial D \subset E$ (или $D \Subset E$); $\varphi \equiv \partial D$. Её сингулы: ветвления и простой крест (бидвукратность (8)).

Заметим, что и сам символ φ, создаваемый программистами, геометрически тоже петля.

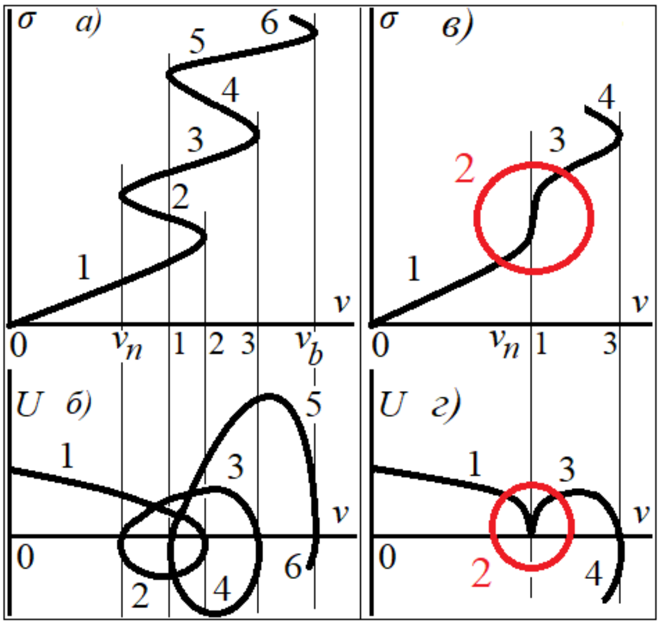

Рис. 5. Образование пики групповой скорости $U(v)$ при вертикальном перегибе волнового числа $\sigma(v)$, *в)* и *г)*. *а)* Дисперсионная кривая волнового числа в пять извилин (по мотивам [49, с. 53]) и б) петлистая спираль групповой скорости с двумя петлями и 4-мя крестами.

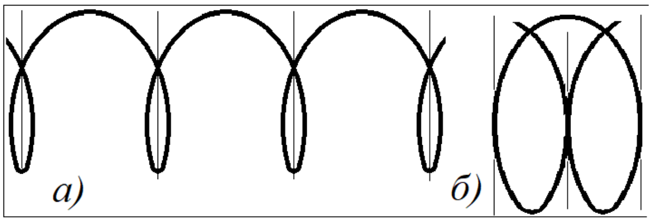

Рис. 6. Спираль осевая, порождаемая синусоидой, *(а);* со сдвоенной петлёй, самокасанием и двумя крестами *(б).*

4.4. Об общей структуре дисперсионных, трансцендентных и виртуальных кривых

Определение 4.3. *Все плоские гладкие кривые $y(x)$ локально сингулярны.*

Действительно, по крайней мере, в некотором секторе поворотов координат (локальных, $_L$) они содержат хотя бы одну сингулу, ветвление, перегиб или др. особую точку. В частности, простейшая из кривых – парабола x^2, прямая же – вырождение кривых. Причём угол поворотов θ будет трансцендентным параметром для $F(x, y, \theta) = y_L - f(x_L) = 0$.

Определение 4.4. *Для дисперсионной вещественной кривой $\sigma(v)$ типично: дуга в нуле (в критической зоне, с $U(v_n)=0$), несколько различных, последовательно идущих извилин и прямая асимптота на бесконечности.*

Например, на рис. 1, 2 и 5.

Определение 4.5 (пять свойств дисперсионного спектра). *Спектр дисперсионных кривых $u_n(v,p_j)$ (p_j – параметры (1)) произвольной волноводной*

ISSN 2541-9269

структуры – это, как правило, много- или бесконечно-значная аналитическая функция. Кроме того эта функция: а) алгебраическая, но в большинстве моделей, трансцендентная или виртуальная, б) чётная, реже нечётная или смешанная, в) комплексная $u = \sigma + i\alpha$ *(в т.ч. и при* $Im v = Im\, p_j = 0$*). И г) квазипериодическая (*${}_1\{u_n(v)\}^{\infty}$*) с точками сгущения на бесконечности:* $(\sigma_n, v)=(\infty,\infty)$ *и* $(\alpha_n, v)=(\infty,0)$.

Замечание 4.1. Из определения 4.4 следует весьма актуальный ZGV-аспект в теории и технологии *нулей групповой скорости* – Zeros of Group Velocity. Для обратных волн, частотно ограниченных и узкополосных, – двух нулей, на верхней и нижней критических частотах, [21, 36, 75 и мн. др.].

Замечание 4.2 (о ДУ нелинейных волн [6, 19, 34, 35, 43, 70, 76,…]). В данной статье рассматривалась дисперсия в линейной теории волн. В теории же нелинейных волн существенная специфика и сложность, вкл. и законы дисперсии. Например, в отличие от (1), встречаются ДУ с интегралом [76, 77], а также зависимость ДФ от амплитуды A волны [76]:

$$D(u; z; \int \varphi(z)\,; A) = 0,\ \ z = {}_1\{z_j\}^m,\ \ u_n = u_n(z). \tag{9}$$

По методу малого параметра ($\mu \sim A$; $\mu \ll 1$) в первом приближении, очевидно, должно быть получено ДУ линейных волн, адекватное (9).

5. Заключение

В работе развивается эффективный метод анализа дисперсионных уравнений, функций и кривых. Метод основан на положениях комплексного анализа, теории неявных функций, геометрии кривых и индукции (на обобщении известных, опубликованных экспериментальных и численных результатов по теории и технологии волн). Вместе с тем, без ограничения общности, определяются сингулярные элементы, отдельные фигуры и общая структура произвольно сложных, плоских кривых, трансцендентных, виртуальных и высших алгебраических (степени ≥ 3). Но, прежде всего, анализируются дисперсионные объекты, простые и кратные корни дисперсионных уравнений и свойства трансцендентных и виртуальных дисперсионных функций и кривых. Основными результатами данной работы является редукция произвольной, сколь угодно сложной функции к полиномам низших степеней и анализ сингулярностей и общей структуры плоских кривых. Эти вопросы представляют значительную, весьма актуальную проблематику в теории волн, в геометрии кривых и в др. приложениях и могут составить, как полагает автор, перспективный фундаментальный раздел современной математической физики (см. и ср. [1, 4–6, 41–43, 78–82 и др.]).

Автор благодарит проф. Ерофеева Владимира Ивановича за внимание к данной работе.

Литература

1. Неймарк Ю.И. Бегущие волны и дисперсионное уравнение// Математическое моделирование как наука и искусство/ Учеб., изд. 2-е, испр. и доп. Н.-Новг.: НГУ, 2010. 420 с. Гл. 30.

ISSN 2541-9269

2. Уизем Дж.Б., Линейные и нелинейные волны: Пер. с анг. *В. В. Жаринова.*/ Под ред. *А. Б. Шабата*. М.: Мир, 1977. 622 с.
3. Асламазов А.Г., Кикоин И.К. Что такое волна?// Квант. 1982. № 6. С. 2–7.
4. Encyclopedia of Mathematics/ Michel Hasewinkel, Ulf Rehmann, D.P. Kostomarov and etc. Перевод и допол. с рус. «Математич. энц.», в 5 тт, М., 1977–85. https://encyclopediaofmath.org/wiki/Main_Page Дата обр. 01.2023.
5. Геранін В.О., Писаренко Л.Д., Рущицкий Я.Я. Математичні аспекти хвильового аналізу: Навч. посібник з 16 лекцій. Київ, 2001. 164 с.
6. Erofeev Vladimir. Nonlinear waves in materials and construction described by equations of mechanics of generalized continua// Conference "Mathematical Aspects of Contemporary Continuum Mechanics", нояб. 2021 г. М., МИАН. + Zoom. http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=32955 дата обр. 01.2023.
7. Бырдин В.М. Об обратноволновой концепции в общей теории волн, в механике и электродинамике // Волны и вихри в сложных средах: 12-ая междун. конф.-школа. ИПМех РАН. + Zoom. М., дек. 2021 г. М.: ИСПО-принт, 2021. С. 44-49. https://ipmnet.ru/files/conf/2021waves_school/Proceedings_Waves_School_2021.pdf дата обр. 01.2023.
8. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред. В приложении к теории волн. М.: Наука, 1982. 335 с.
9. Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Стрелков П.С. Плазменная релятивистская СВЧ-электроника: Уч. пос.; под ред. *А.А. Рухадзе*. М.: МГТУ, 2002. 544 с.
10. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. 3 изд. М.: ФМЛ, 1981. 568 с.
11. Прохоров А.М. Физика// Физическая энц. Т. 5. Под ред. А.М. Прохорова. М.: БРЭ, 1998. С. 311.
12. Столетов А.Г. Собр. соч. Т. 3. Введение в акустику и оптику. Теория теплоты. /Лекции 1881/82 гг.; под ред. *А.К. Тимирязева*. М.–Л.: ГИТТЛ, 1947. 624 с.
13. Сессия ОФН РАН по обратным волнам. М., ФИАН, янв. 2006// Успехи физич. наук. 2006. Т. 176. № 5. С. 557–565.
14. О работах *В.В. Шевченко* по теории обратных волн (К 70-летию со дня рождения)/ *В.М. Бырдин*. М.: ИРЭ РАН, 2007. – «Как отмечают юбилеи»; рукопись. 30 с. То же: доклад// Московский электродин. семинар, 6.11.2007. М., ИРЭ РАН.
15. Meleshko V.V., Bondarenko A.A., Dovgiy S.A., Trofimchuk A.N., van Heijst G.J.F. Elastic waveguides: history and the state of the art. I. // Journal of Mathematical Sciences. 2009. V. 162. No. 1. P. 99–120.
16. Веселаго В.Г. Перенос энергии, импульса и массы ЭМ волной в среде с отрицательным преломлением // УФН. 2009. Т. 179. № 6. С. 689–694.

17. Обратные волны: А) *Ковалев Н.Ф.*// Физич. энц. Т. 3. М.: БРЭ, 1992. С. 383–384.
Б) *Ковалев Н. Ф.*// Большая рос. энц. Т. 23. М.: БРЭ, 2013. С. 534.
В) *Бырдин В. М.*, 1-ая ред. 03.10.2011; изменения и допол. других авторов// Википедия. https://ru.wikipedia.org/wiki/Обратные_волны Дата обр. 1.7.2023.
18. 1-17th International Congresses on Artificial Materials for Novel Wave Phenomena – Metamaterials' 2007-2023.
19. Popov A.K., Slabko V.V., Shalaev M.I., and etc. Nonlinear Optics with Backward Waves: Extraordinary Features, Materials and Applications // Solid State Phenomena. 2014. V. 213. P. 222–225.
20. Келлер Ю.И., Макаров П.А. Дисперсия поверхностных прямых и обратных магнитостатических волн в средах с поглощением// Междунар. науч.-иссл. ж. 2016. № 2. Ч. 2. С. 66–68.
21. Cui H., Lin W., Zhang H., Wang X., Trevelyan J. Backward waves with double zero-group-velocity points in a liquid-filled pipe// JASA. 2016. V. 139. Is. 3. P. 1179-1194.
22. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Плехов А.С., Хазов П.А. Волновая динамика деформируемых систем, взаимодействующих с упруго-инерционными и неоднородными основаниями. Н-Новгород: НГТУ им. Р.Е. Алексеева, 2018. 130 с.
23. Ruopeng Liu, Chunlin Ji, Zhiya Zhao, Tian Zhou. Metamaterials: Reshape and Rethink// *Engineering*. 2015. V. 1. Is. 2. P. 179-184.
24. Sergei Tretyakov, Augustine Urbas and Nikolay Zheludev. The century of metamaterials (Editorial)// Journal of Optic. 2017. V. 19. No. 8. – Special Issue on the History of Metamaterials.
25. Zi Jing Wong, Yuan Wang, Kevin O'brien et al. Optical and acoustic metamaterials: superlens, negative refractive index and invisibility cloak// Journal of Optics. 2017. V. 19. No. 8. 084007.
26. Акустические метаматериалы/ Секция на Сессии Российского акустич. общества 17.10.2019. *Бобровницкий Ю.И., Миронов М.А.* и др. М., АКИН, 2019.
27. Алексеев Г.В., Левин В.А., Терешко Д.А. Анализ и оптимизация в задачах дизайна устройств невидимости материальных тел. М.: ФМЛ, 2021. 328 с.
28. Слюсар Вадим. Метаматериалы в антенной технике: А) история и основные принципы// Электроника: наука, технология, бизнес. 2009. No. 7. P. 70–79; Б) основные принципы и результаты// Первая миля, Прилож. к ж-лу «Электроника: наука, exнология, бизнес. 2010. No. 3-4. P. 44–60.
29. Атжанов Равиль. Нас не увидят// В мире науки. 2012. № 4. С. 76–81.
30. Ерофеев В.И., Павлов И.С. Структурное моделирование метаматериалов: монография. Н-Новгород: ИПФ РАН, 2019. 196 с.
31. Гарнов С.В., Дианов Е.М., Пендри Дж.Б. и др. Памяти Виктора Георгиевича Веселаго// УФН. 2019. Т. 189. № 3. С. 335–336.

32. Бырдин В.М. Условия излучения для некоторых краевых задач с уравнениями Гельмгольца// Докл. АН СССР. 1978. Т. 238. № 2. С. 293–295.
33. Бырдин В.М. Дисперсионные уравнения, элементы теории волн и обратные волны, корректность волновых задач// Изв. ТРТУ. Таганрог: ТРТУ, 1997. С. 56.
34. Могилевич Л.И., Иванов С.В., Месянжин А.В., Кондратов Д.В. Волны деформации в соосных оболочках с мягкой кубической нелинейностью, конструкционным демпфированием и жидкостью внутри// Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2020. № 4. URL: mathmod.esrae.ru/32-122
35. Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия, диссипация, нелинейность. М.: ФМЛ, 2002. 208 с.
36. Бырдин В.М. Дифракция нормальных волн в слоистых структурах: модель уровнемера, модификация метода факторизации, волноводные квазирезонансы// Изв. РАН. МТТ. 2017. № 3. С. 83–99.
37. Бырдин В.М., Пузакина А.К. Извилины и петли дисперсионных, трансцендентных и виртуальных функций и кривых & Сингулярный анализ, кинематика обратных волн // Живучесть и конструкционное материаловедение: 5 междунар. н.-техн. конф. М.: ИМАШ РАН, 2020. С. 61-65.
38. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979. 296 с.
39. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
40. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и Связь, 1988. 440 с.
41. Габов С.А. Новые задачи математической теории волн. М.: Наука, 1998. 448 с.
42. Зильберглейт А.С., Копилевич Ю.И. Спектральная теория регулярных волноводов. Л.: ФТИ, 1983. 302 с.
43. Ильичев А.Т. Уединенные волны в гидромеханике. М.: ФМЛ, 2003. 256 с.
44. Кузелев М. В., Рухадзе А. А., Методы теории волн в средах с дисперсией. М.: ФМЛ, 2007. 272 с.
45. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред: 4-е изд. М.: ФМЛ, 2001. 656 с. (Т. 8 Курса теоретич. физики).
46. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физич. кинетика. 2-е изд. М.: ФМЛ, 2001. 536 с. (Т. 10 Курса теоретич. физики).

47. Механика контактных взаимодействий/ Отв. ред. *И.И. Ворович и В.М. Александров*. М.: ФМЛ, 2001. 672 с.
48. Обобщающие статьи “Механика к началу 3го тысячелетия” в ж-ле “Прикладная механика”/ *Бабешко В.А., Григоренко А.Я., Гузь А.Н., и др.*// ПМ. 2005. Т. 41. № 1. С. 6–11.
49. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн: Уч. пос. М.: ФМЛ, 1984. 432 с. (2-ое изд. 2000)
50. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Магнитостатические и электромагнитные волны в сложных структурах. М.: ФМЛ, 2017. 360 с.
51. Болотовский Б.М., Столяров С.Н. О принципах излучения в средах с дисперсией// Проблемы теор. физики: Сб. памяти И. Е. Тамма. М., 1972. С. 267–280.
52. Будаев В.С. (Условия типа Зоммерфельда и единственность краевых задач теории упругих анизотропных сред)// ПММ. 1978. № 2; 1979. № 6. С.1102–1110.
53. Бырдин В.М. Об условиях излучения и об обратных модах в волноведущих системах сложной структуры// Физика волновых процессов и радиотех. системы. 2003. Т. 6. № 1. С. 8–13.
54. Вайнберг Б.Р. Принципы излучения, предельного поглощения и предельной амплитуды в общей теории уравнений с частными производными// УМН. 1966. № 3. С. 115-195. – *Егоров Ю.В., Комеч А.И., Мазья В.Г. и др*., Борис Руфимович Вайнберг: к 80-летию со дня рождения// УМН. 2019. Т. 74. № 1. С. 189–194.
55. Векуа И.Н. К теории упругих волн в слое// Труды Тбилис. геофиз. ин-та. Т. 2, Тбилиси, 1937. Б) Его же// Докл. АН СССР. 1951. Т. 80. № 3. С. 341–343.
56. Грилицкий Д.В., Баран В.П. Принципы излучения в динамической теории упругости и термоупругости// ДАН Украины. 1980. № 7. С. 38–41.
57. Коузов Д.П. Энергетический принцип единственности граничных задач акустики// Записки науч. семинаров ЛОМИ. Т. 89. Л., 1979. С. 124–133.
58. Назаров С.А. Открытые волноводы в тонкой решетке Дирихле. II. Локализованные волны и условия излучения// ЖВМиМФ. 2017. Т. 57. № 2. С. 237–254.
59. Наседкин А.В. Общие теоремы о переносе энергии однородными волнами// ПММ. 1993. Т. 57. № 5. С. 105–112.

60. Фисанов В.В. Обобщённая формулировка условий излучения// Электронные средства и системы управления. Материалы Междунар. науч.-практич. конф. 2019. Т. 1. № 1-1. С. 91-93.
61. Эйдус Д.М. Принцип предельной амплитуды//УМН. 1969. Т. 24. №3. С. 91–156
62. Зоммерфельд А. Оптика: Пер. с нем. М.: ИИЛ, 1953. 487 с.
63. Sommerfeld A. Mathematische Theorie der Diffraction// Math. Ann. 1896. V. 47. No. 2–3. P. 317–374.
64. Sommerfeld A. Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung// Jhrber. Deutsch. Math.-Verein. 1912. V. 21. P. 309–353.
65. Бырдин В.М. Обратные волны: столетие первой работы, истоки и развитие обратноволновой механики и электродинамики (обзор)// Радиотехника и электр. 2005. Т. 50. № 12. С. 1413-1438.
66. Генезис категории виртуальная реальность: Материалы международной научной конференции, 15 февр. 2008 г., Саранск, 2008.
67. Курдюмов С.П. Книга природы написана асимптотически// Наука в России. 2005. № 1. С. 101–103.
68. Взятышев В.Ф. Диэлектрические волноводы. М.: Совет. радио, 1970. 216 с.
69. Бырдин В.М. О затухании нормальных и поверхностных волн и зависимости их фазовых и групповых скоростей от потерь // ДАН. Т. 238. № 3. С. 552–554.
70. Ильичев А.Т. Уединенные волны в средах с дисперсией и диссипацией (обзор)// Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 2. С. 3–27.
71. Бырдин В.М. Новые базисные свойства вещественных и регулярных функций & Чёт-нечётность, антиголоморфность, абстрактные С-древо и полиголоморфность// Труды Математич. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 60/ Междунар. конф. по алгебре, анализу и геометрии, 2021. Казань: АН РТ, 2021. С. 185-187.
72. Виро О.Я. Плоские вещественные алгебраические кривые: построения с контролируемой топологией// Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 5. С. 1–73.
73. Делицын А.Л. О дисперсионных кривых анизотропных волноводов // ЖВМиМФ. 2018. Т. 58. № 7. С. 1191-1198.
74. Бырдин В.М. Сингулярные фигуры трансцендентных и виртуальных функций и кривых & алгебраическая редукция, обратноволновой анзац //Труды VI Междунар. науч. конф. "Фундаментальные исследования и инновационные технологии в машиностроении", М., 11.2019г. М: ИМАШ

РАН, 2019. С. 85-87. http://imash.ru/netcat_files/file/FRITME%202019/Proceedings%20FRITME-2019%20brief.pdf дата обр. 11.01.2022.

75. Шульга Н.А. Распространение гармонических волн в анизотропных пьезоэл. цилиндрах. Волноводы с усложнёнными свойствами// Прикл. механика. 2002. Т. 38. № 12. С. 33–54.
76. Давыдовский В.Я., Погорелов Е.Н. Дисперсия сильной электромагнитной волны в электронном потоке в продольных статич., электрич. и магнитных полях// Физика плазмы. 1989. № 4. С. 437-443.
77. Богданов А.Н., Диесперов В.Н., Жук В.И. Асимптотики дисперсионных кривых в задачах нестационарного свободного вязко-невязкого взаимодействия на трансзвуковых скоростях// Докл. РАН. 2017. Т. 475. № 2. С. 150-153.
78. Математическая физика. Энцикл./ Под ред. *Л.Д. Фаддеева*. М.: БРЭ,1998. 692с.
79. Арнольд В.И. Математика и физика: родитель и дитя или сестры?// УФН. 1999. Т. 169. № 12. С. 1311–1323.
80. Владимиров В.С. Что такое математическая физика? / Препринт. М.: МИАН, 2006. 20 с.
81. Freeman Dyson. Birds and Frogs// Notices of the Amer. Math. Soc. 2009. V. 56. No. 2. P. 212-223. Перераб. вар. в переводе *В.И. Кисина* с Предисл. *Л.Б. Окуня:* Дайсон Ф. Птицы и лягушки в математике и физике: эйнштейновская лекция// УФН. 2010. Т. 180. № 8. С. 859–870.
82. Michael Atiyah. The future of Mathematical Physics: new ideas in old bottles: Abel lecture // International Congress of Mathematicians/ ICM-2018. Rio de Janeiro, August 2018. https://www.youtube.com/watch?v=fUEvTymjpds дата обр. 12.1.2022.
83. Бырдин В.М. Звёзды, развилки, пики и другие сингулярные плоские фигуры трансцендентных и виртуальных функций, уравнений и кривых// Труды Математич. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 62. Материалы Междунар. конф. ”Лобачевские чтения”. Казань: Изд. КФУ, 2022. С. 22-24.