

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: mathmod.esrae.ru/43-173

Ссылка для цитирования этой статьи:

Бырдин В.М., Пузакина А.К. Извилины, дуги и петли дисперсионных, трансцендентных и виртуальных функций, уравнений и кривых & Сингулярный анзац, нормальные и обратные волны. // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2023. № 3

УДК 517.958+534.2+537.8

DOI:10.24412/2541-9269-2023-3-08-25

ИЗВИЛИНЫ, ДУГИ И ПЕТЛИ ДИСПЕРСИОННЫХ, ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ И ВИРТУАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ, УРАВНЕНИЙ И КРИВЫХ & СИНГУЛЯРНЫЙ АНЗАЦ, НОРМАЛЬНЫЕ И ОБРАТНЫЕ ВОЛНЫ

Бырдин В.М., Пузакина А.К.

ФГБУН Институт Машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, М. Харитоньевский пер., 4, Россия, Москва. V_M_Byrdin@mail.ru; Alla-Puzakina@yandex.ru

CRINKLES, ARCS AND INFLECTIONS OF DISPERSIVE, TRANSCENDENTAL AND VIRTUAL CURVES AND FUNCTIONS & SINGULAR ANZATS, NORMAL AND BACKWARD WAVES

Byrdin V.M., Puzakina A.K.

A.A. Blagonravov Institute of Machines Science of the RAS. 4 Maly Kharitonyevsky Lane, Russia, Moscow.

Аннотация. Анализируются плоские кривые и гладкие функции применительно к теории диспергирующих волн. Наш метод основан на Подготовительной теореме Вейерштрасса, теории неявных функций и на других положениях комплексного анализа и геометрии кривых. Извилина является основной, неотъемлемой фигурой и компонентой плоских, произвольно сложных кривых (и не только дисперсионных): трансцендентных, алгебраических высоких порядков, параметризуемых и виртуальных (т. е. экспериментальных и численных). Перегиб и две дуги извилины представлены сколь угодно точными асимптотиками. В приложении к дисперсии нормальных (собственных) и обратных волн описываются основные сингулярные элементы (отрезки) плоских регулярных кривых и гладких функций – это дуга (ветвление), крест (пересечение), перегиб, оваловидная петля. Высоко-кратные особенности, выше 3-ей, встречаются крайне редко; для чётных уравнений и функций и большинства дисперсионных – с 4-ой. Петли оваловидных фигур и дисперсии групповой скорости даются отрицательной извилиной $f(x)$ (отрицательного наклона) как обратная производная $\varphi = \partial x / \partial f$. В частности, рассмотрена плоская петлистая спираль, порождаемая наклонной синусоидой. Извилина волнового числа $\sigma(v)$ обратной волны влечёт экстремумы групповой скорости $U(v)$ и затухания, эйри-фазу и доминанту головного фронта обратноволнового импульса $u(r, t) \sim A(r - U_{max}t) \exp(i\alpha_{min}r + \sigma_m r + v_m t)$. Для обратных волн наиболее характерны два типа дисперсии: извилины $\sigma(v)$ и полу-петля $U(v)$ и низкочастотные квазипараболы обеих этих функций.

Ключевые слова. Дисперсионные кривые, трансцендентные кривые, сингулярная фигура, извилина, дуга, крест, петля, обратные волны, нормальные волны, групповая скорость.

Abstract. Plane curves and smooth functions are analyzed as applied to the theory of dispersive waves. Our method is based on the Weierstrass Preparatory Theorem, the theory of implicit functions, and other provisions of complex analysis and the geometry of curves. A crinkles is the main, integral figure and component of flat, arbitrarily complex curves (and not only dispersion curves): transcendental, algebraic higher orders, parameterizable and virtual (i.e., experimental and numerical). An inflection and two gyrus arcs are represented by arbitrarily exact asymptotics. In the application to the dispersion of normal (eigen) and backward waves, the main singular elements (segments) of plane curves and regular and smooth functions are described: an arc (branching), a cross (intersection), an inflection, and an oval-shaped loop. High-fold singul above 3 are extremely rare; for even equations and functions and most dispersion ones - with the 4. Loops of oval shapes and group velocity dispersion are given by the negative gyrus $f(x)$ (negative slope) as the inverse derivative $\varphi = \partial x / \partial f$. In particular, a flat spiral generated by an oblique sinusoid is considered. The negative crinkles of the wavenumber $\sigma(v)$ implies the extrema of the group velocity $U(v)$ and damping, the airy-phase and the leading edge of the backward-wave pulse $u(r, t) \sim A(r - U_{max}t) \exp(i\alpha_{min}r + \sigma_m r + v_m t)$. For the dispersion of backward waves, two types of dispersion are most characteristic: negative gyrus $\sigma(v)$ and half-loop $U(v)$ or low-frequency quasi-parabolas of both these functions.

Keywords. Cross, loop, arc, gyrus, dispersion curves, transcendental curve, singular figure, backward and normal waves, group velocity.

Введение

В.1. О дисперсии волн и плоских кривых

Волновые процессы, как весьма универсальный и дифференцированный субстрат, охватывают и пронизывают буквально всё Мироздание, вкл. социальный мир, и, не говоря уже о квантово-волновом дуализме микромира. И характерно, что восемь из 10-ти томов классического Курса теоретической физики Ландау Л.Д. и Лифшица Е.М. тесно связаны с теорией волн, как и многие современные области и, в частности, конференции по математической физике и прикладной математике. (См. [1–3] и др.). А в целом, теория и технология волновых процессов разной природы составляют одну из основных, междисциплинарных и многопрофильных областей фундаментальной и прикладной науки, ряда современных отраслей механики и электродинамики, аффилированных во многих мировых и отечественных центрах, институтах и вузах.

В данной статье две основных темы: это плоские кривые и дисперсия волн. Прежде всего, обратных волн, как наиболее диспергирующих, имеющих уже вековую историю, идущую от *Горакса Лэмба*, английского математика и механика (Hogase Lamb, 1904 г. [4]), и советского физика *Л. И. Мандельштама* (1940 – [5,6]). Мощно возродившись в 2000-ые гг, обратноволновая проблематика в последнее время замкнулась на разработку метаматериалов, см. [5–13] и мн.-мн. др. И, в частности, современные, весьма экспрессивные тренды и заголовки: «*Революция метаматериалов*», «*Век метаматериалов*», «*плащ- и шапка-неви-димки*», «*сверх-разрешение*» и «*супер-линза*» – возникли как в радиотехнике, оптике и тепловидении, так и в акустике, вибромеханике и сейсмологии, отчасти не оправданно.

В данной работе анализируются плоские кривые, соответствующие им или исходные, гладкие функции и уравнения и их приложения в теории диспергирующих волн. Рассматриваются произвольные, регулярные и гладкие объекты любой сложности (трансцендентные, неявные, параметризуемые, виртуальные (табличные и графические), суперпозиционные (сложные – матем.), алгебраические высокого порядка > 3 , специальные; что не акцентируется). Наш метод основан на теории неявных функций, вкл. Подготовительную теорему Вейерштрасса (ПТВ), на положениях комплексного анализа и геометрии кривых. Весьма эффективная теорема ПТВ сводит произвольное, сложное уравнение к конечному полиному (к полиному Вейерштрасса, прежде всего, к одночлену) и редуцирует трансцендентную сложность к алгебраистике. Впервые советский геофизик *В. И. Кейлис-Борок*, ещё в 1952 г. применил теорему о неявных функциях к дисперсионным трансцендентным уравнениям [14], как это не кажется теперь очевидным, «лежащим на поверхности». После его работ, независимо, в 1970-ые вышли статьи математика *Краснушкина П. Е.* с коллегами [15, 16] и наши работы [17]. В [15] теорема ПТВ применена к многократным корням дисперсионных уравнений радио-волноводов. Мы начинали с акустических задач [6, 17 и др.]. Конечно, в математическом плане природа волн не принципиальна; однако современная, всё более глубокая дифференциация наук существенно изолирует и тормозит смежные отрасли, выливается в параллельные работы и, нередко, в спорные приоритеты. Мы развиваем аналитический метод для диспергирующих, нормальных (собственных) и обратноволновых мод в акустике и радиофизике. Математических публикаций по применению теории неявных функций к дисперсии волн, к сожалению, нет, нам не известно. А в последние десятилетия, в силу экспансии компьютерных технологий, в точных науках преобладает вычислительная парадигма и, в частности, численные решения дисперсионных уравнений и волновых задач. Интенсивно развиваются вычислительные отрасли математики, механики, электродинамики, физики в целом и в узких областях, вкл. и теорию волн, см., например, [18–25]. В геометрии же, насколько мы, не профессиональные математики, можем судить, преобладают алгебраическая тематика, вычислительные методы и теоретико-множественный формализм [26], затрудняющий понимание даже математикам-специалистам.

В наших работах развивается аналитический подход, метод и стиль, используется, прежде всего, теория неявных функций в комплексном ракурсе (см. [27–29]). Подготовительная теорема Вейерштрасса получила дальнейшее развитие [30, 31], но не для волновых приложений. А из дифференциальной геометрии для нас в теории волн весьма полезен анализ особых точек, асимптотология, аппроксимация и анзац классических и современных трансцендентных объектов, постоянно возникающих не только в теории волн, но и во всех физико-технических отраслях [32–47].

В.2. Типичная дисперсионная кривая

На рис. 1 представлены три довольно типичных дисперсионных кривых, нормальной, поверхностной и обратной волн, выделяемые из бесконечного, как правило, спектра. Эти кривые весьма характерны для теории волн и встречаются во множестве, если не в большинстве профильных статей, монографий и

учебников, начиная со 2-ой пол. 20го века, (см. [1,16,36,38,40–42,45,46] и мн.-мн. др.). На рисунке ν и σ – частота и волновое число, нормированные (различно в контексте моделей и задач, например: $\nu = \omega h/C_0$, $\sigma = kh$ или $\sigma = kh/\nu$, h – размер волновода, толщина элемента или шаг-период системы, $C_0 := \text{const}(\omega)$ – скорость звука в воде или света в вакууме). (σ_L, ν_L) – локальные оси отдельной извилины или дуги; m_K – точки перегиба. 1 – полу-дуга нормальной волны, 1_{OB} – извилина обратной; 1^* и 2^* – компоненты поверхностной, с обрывом кривой на ν_{KP} ; 2^* и 2 – несколько извилин-элементов, 3 – квази-прямая в децибелах, уходящая на ∞ -ть или, для компактности рисунка по σ , к 1-це.

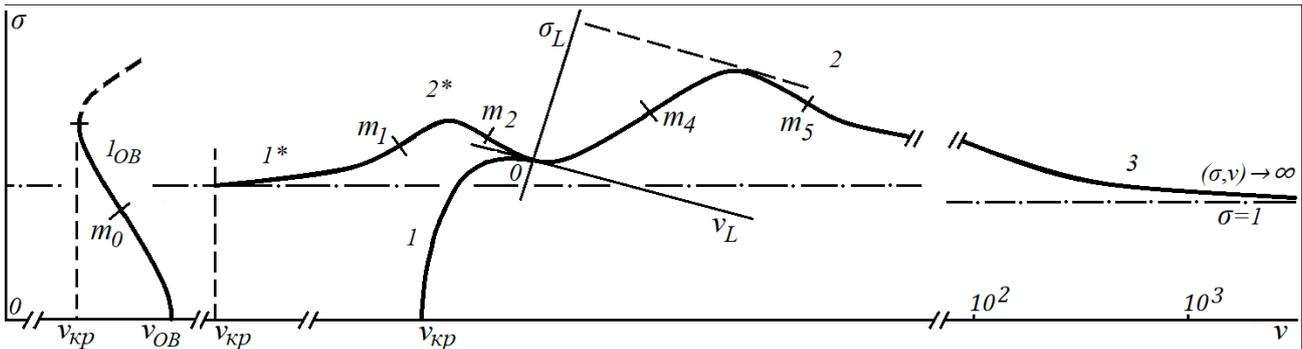


Рис. 1. Типичная дисперсионная кривая бегущей волны, нормальной (1–3), поверхностной (1^* –3), обратной (1_{OB}).

Т.о., мы выделяем три основных характерных участка: 1 и 1^* – критические области справа от критической частоты ν_{KP} , 2 и 2^* – извилины с перегибами и дугами и нормальной, и поверхностной мод, 3 – асимптоты на бесконечности. А для обратноволновой моды – только извилина (граничащая на ν_{KP} с прямой модой, указанной штрихами). Принципиально, что у *обратных волн (ОВ)* отрицательный наклон извилины волнового числа, лежащей слева от ν_{OB} , в отл. от положительного наклона для прямых волн – на рис. 1. Так что для ОВ $\partial\nu/\partial\sigma = U < 0$; откуда следует противоположность векторов фазовой \underline{V} и групповой \underline{U} скоростей. (Символы векторов в тексте будем пометать, кроме общепринятого жирного, подчёркиванием снизу, наряду со стрелкой сверху). Дисперсия и в целом физика обратных волн уникальна как раз в силу этого базисного, определяющего фактора противоположности \underline{V} и $\underline{\sigma}$ с \underline{U} и энергетической \underline{U}_E (свойство *адирекции* – термин наш, а понятие ещё от Лэмба [4]). И современная обратноволновая физика, механика и электродинамика открыла уже целый ряд фундаментальных явлений, эффектов и свойств, ведущих к новым областям науки и флагман-технологиям. Из них в последние годы наиболее известны и разработаны тренды скрытности (разного рода «невидимки»), сверхразрешение, мета-материалы и мета-поверхности [8–13, 44 и др.]. В отличие от этих, весьма актуальных, отчасти *сенсационных* областей, классическая и современная обратноволновая радиоэлектроника уже давно, с 1950-ых гг., достигла замечательных, значительных успехов в теории и практике, это всем известные лампы-ЛОВ, радиоантенны и др. применения, [5–7, 38].

1. Извилины, перегибы и петли трансцендентных функций и плоских кривых

1.1. Замечание о сингулярных, математических и физических объектах и понятиях и о сингулярной обратноволновой физике

Замечание 1.1 (о понятиях и терминах). *А) Анзац* – формула, аналитическое описание, метод и структура решения и, добавим, в целом аналитическая парадигма, в отл. от численных и экспериментальных, см. и ср. [42, с. 35, и др.]. Далее, напомним, регулярные объекты – это точки, функции, кривые, отрезки и левые части уравнений. Поверхности мы мало изучаем, т.к. в теории волн дисперсионные поверхности используются довольно редко. *Регулярные* объекты – гладкие (дифференцируемые бесконечно или конечно) в теории функций или голоморфные и аналитические (многозначные голоморфные) в комплексном анализе. *Б) Аналитическая*, во втором смысле, форма функций (формула), в отл. от виртуальной или иных типов формулировок функций и кривых. *В) Виртуальные* кривые и функции – это табличные и графические, экспериментальные (опытные) и численные (расчётные, алгоритмические); наше понятие [см. в 46]. Виртуальный – широко используемый, отчасти омонимичный термин, в т. ч. и в математике. *Г) Наряду с Кривой* в энциклопедиях (очевидно после выбора *А. С. Пархоменко*, выдающегося советского геометра и педагога (1909–1982; МГУ; [48, 49]) закрепился термин *Линия*, что однако ассоциируется с «линейкой, линейчатым и с прямой». Тогда как в русско- и англо-язычной литературе широко бытует *curve – кривая*, а в теории волн только *Дисперсионные кривые*. *Д) Сингулярные* объекты, в отл. от регулярных – это кроме особых точек ещё и локальные фрагменты функций, кривых и асимптотики в окрестностях этих точек.

Наряду с сингулярной математической тематикой, хорошо известны сингулярные физические объекты – это космологические чёрные дыры, Большой взрыв и др. Как и недавние «чёрные дыры» в акустики и вибромеханики [50 и мн. др.]. К сингулярной физике мы и наши коллеги относим и обратноволновую механику и электродинамику, поскольку они не только описываются сингулярными функциями и кривыми в окрестностях критических частот и в целом, но и по существу, содержательно являют собой уникальную область физической теории волн – см. ниже п. 2.

1.2. Извилина как компонент и символ трансцендентности

Пример 1.1. Синусоида – простейшая извилистая трансцендентная кривая. Квазисинусоида дисперсии применяется уже в такой простой модели, как одномерная решетка в классическом труде *Л. Бриллюэна* и *М. Пароди*, 1956г [51, с. 102, фиг. 59]. Две извилины – в широко известной петле гистерезиса (см. Замечание 4.2 ниже). Бесконечное счётное множество извилин присуще спектру Лэмба упругой пластины, хорошо изученному, крайне востребованному и весьма типичному для теории волноводов разной природы.

Простейшая извилина задаётся тривиальной кубикой x^3 ; цепь извилин (с i извилинами, $i = 2, 3, 4 \dots$) – несложным многочленом $\sum_{j=0}^k a_j x^j$, где $k = i + 2 \geq 4$, знаки a_j различны (необходимое, но не достаточное условие).

Определение 1.1. Извилина – отрезок плоской гладкой зигзаговидной /извилистой кривой и функции $f(x)$, объединяющий через точку перегиба две соседние дуги противоположных вершин, знаков кривизны.

Пример на рис. 2а. В обосновании понятия усложняем ракурс: точка перегиба – перегиб – извилина.

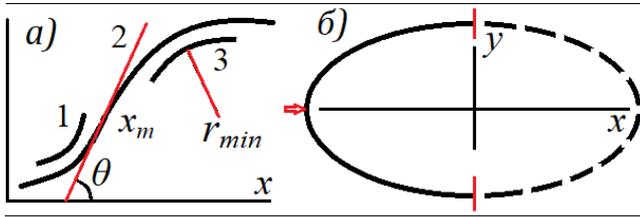


Рис. 2. а) Извилина: прямая перегиба 2 и две дуги 1 и 3, с вершинами (r_{min}). б) Дуга эллипса/ овала, максимальной длины, \Rightarrow – к её вершине.

Извилина – основной компонент трансцендентных и виртуальных объектов, кривых, уравнений и функций.

Замечание 1.2. А) Для обратных волн характерны оваловидные полу-петли групповой скорости $U(v)$, см. [6, 52, ...] и нижесл. рис. 4 и 7. Универсальной асимптотикой дуги служит одночлен $y = x^p$, $p = 2, 4, 6, \dots$, в локальной системе декартовых осей $y_L 0x_L$, повернутой и сдвинутой. Б) В приложении к теории волн, дуга – непрерывное плоское множество точек, отличное от прямой, без точек перегиба, конечной длины (спрямляемое), гладкое всюду, за искл. одной вершины с локальной точкой ветвления или 1-2 точек полу-ветвления на отрезке полу-овала или без ветвления (выпуклый/ вогнутый отрезок). См. рис-ки 2а (дуги с вершинами минимальных радиусов кривизны r_{min}) и 2б (дуга максимальной длины, с двумя полу-ветвлениями и вершиной, максимальной кривизны). В) Перегиб кривой и её функции локален окрестности точки перегиба; в матем. руководствах (и, в частности, в заметке [53]) нет понятия собственно «перегиба», тривиальна точка перегиба.

В чём разница извилины и перегиба?

Определение 1.2. Перегиб плоской кривой и гладкой функции $f(x)$ – это отрезок вокруг точки перегиба x_m , с монотонно убывающим радиусом кривизны слева и справа от x_m , возможно вплоть до его минимума $\pm r \in (r_{min}, \infty)$, $1/r(x_m) = 0$.

Таким образом, принципиальное различие между перегибом и извилиной в их дугах, различие и качественное, и количественное. В перегибе две дуги зарождаются и обостряются, их радиусы кривизны монотонно спадают, не доходя до минимума, а в обеих дугах извилины радиусы проходят через минимум, через вершины дуг. См. выше рис. 2а и 1. Так что дуга извилины именно максимальной кривизны, в отл. от дуг второго вида с вершиной минимальной кривизны и с максимальным радиусом – например, две вершины эллипса (рис. 2б; $x = 0, y = \pm y_{max}$). И также в отл. от дуг третьего вида без вершин, с монотонно изменяющейся кривизной, растущей или убывающей; и в перегибе две именно такие монотонные дуги, слева и справа от x_m , $x \neq x_m$.

Примером извилины служит отрезок банальной синусоиды на $|x/\pi| \in [0; 0,5 + \delta)$, $\delta \in (0; 0,5)$, включающий две вершины.

Следствие 1.1. В основе любой плоской извилины три элемента: две дуги с противоположными вершинами и перегиб в виде, как правило, локальной квазикубики

$$y = a_1x + a_3x^3(1 + a_4x + \dots), \quad a_3 \neq 0. \quad (1)$$

Возможны также, но более редки и высшие асимптотики перегиба: пентака, гептака и т.д. $\Leftrightarrow x^k$, $k = 5, 7, 9, \dots$. Противоположные дуги – локальные квазипараболы $y \sim x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, причём наиболее вероятен 2-ой порядок $y = a_2x^2(1 + a_3x + 0^2)$, $0^2 := 0(x^2)$, $a_2 \neq 0$.

Локальность будем часто подразумевать, L опускать, а степень K не уточнять, когда это не создаёт вопросы. Кроме квазипараболы x^{2k} возможны и другие приближения: через окружность $y^2 = 1 - x^2$ [47], выпуклость x^{-1} , гармоники и т.д. – где целая отрасль, Теория аппроксимации. Однако, алгебраическая асимптотика и редукция довольно эффективны и строго предопределены Подготовительной теоремой Вейерштрасса (ПТВ) и комплексным анализом [27, 28, ...]. Отметим также, что наша квазипарабола, с вершиной и асимптотикой чётного порядка $2k$, отлична от парабол в широком смысле x^n , произвольного порядка, $(k-1, n) \in \mathbb{N}$, [37, 48]. Вкл. и перегибы, а также и дробные, в т. ч. известную параболу Нейля $x^{3/2}$, с заострением.

1.3. О крестах и высоко-кратных особых точках

Сложность кривых соотносится с кратностью особых точек. Высоко-кратные сингулярности встречаются крайне редко. Действительно, по теореме ПТВ m – кратность точки определяется системой m уравнений, откуда следует условие не менее m независимых переменных и параметров и т.д. (это наше предварительное условие, в отл. от необходимого и достаточного...). Поэтому дуги, как правило, 2-го порядка, перегибы 3-го ($y = x^3 + 0^4$, $0^4 := 0(x^4)$), а кресты биквадратны.

Кресты или пересечения, простые, мы определили через бидвукратность [см. в 56]:

$$y = a_1x + a_2x\sqrt{1 + b_3x + 0^2} + 0^2.$$

Отметим, что этот, простой приём ($\pm\sqrt{1+x}$) использован нами независимо, а ранее в [1, т. 10, § 64]. Полагаем, что пересечения под острым углом – рис. 3. Если больше 90° , то острым будет смежный. Углы рассчитываются тригонометрически; в частности, для раскрыва $(45; 90)^\circ$, при $a_1 \in (0, \sqrt{2})$ и $a_2 = 1$ очень просто: $\theta_- - \theta_+ = \arctg(2/a_1)$.

В теории волн известен ряд работ по пересечениям типа а) и б); крест вида в), с обратной волной, тоже вполне реален. Пересечение же двух обратноволновых мод ($OB_1 \times OB_2$) крайне маловероятно, нам не известно.

Кресты с изломами, вида г) и д) – постановка нашей новой геометрической задачи, ещё не получившей анализа.

Замечание 1.3. А) Очевидно, первый крест был описан ещё до н.э. в Конхоиде Никомеда, хотя и косвенно; термин же из [55, с. 7]. В физической теории волн изучают пересечения дисперсионных кривых и соотв. квазирезонансы и др. критические режимы [46, ...]. Б) В соотв. с комплексным анализом, дуга

кривой $f(x)$ в геометрии идентична ветвлению двузначной аналитической $f(z)$, $z = x + iy$ – отсюда приемлемо: *порядок, степень дуги*. Также и многозначные гладкие кривые и аналитические функции, в частности, дисперсионные спектры волноводов.

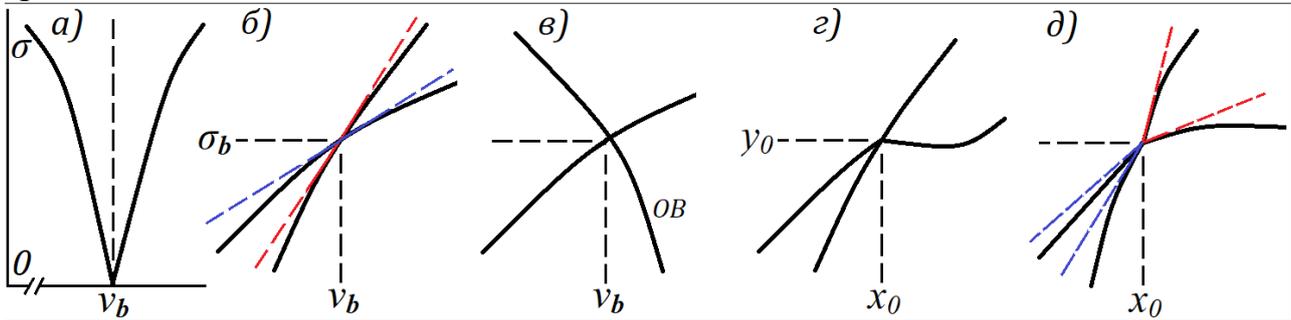


Рис. 3. Виды крестов, пересечений кривых. а) в нуле на абсциссе $(0, v_b)$, аналогично и на ординате. б) двух прямых волн. в) прямой и обратной (OB). Крест с изломами: г) с одним и д) с двумя.

В спектрах однородных волноводов, а также плазменных и др. волновых процессов, с простейшим алгебраическим уравнением $\sigma^2 - v^2 + q^2 = 0$, имеются только простейшие особенности, двукратные ветви на критических частотах $v = q$ (q – собственное число краевой задачи). Для волноводов, как правило, бесконечный спектр $\{q_n\}^\infty$, например, для цилиндра $J_1(q) = 0$, J_1 – функция Бесселя. В спектре Лэмбовских мод в однородной упругой пластине и Похгаммера-Кри в круглом стержне имеются уже 4-ёхкратные нулевые ($\sigma = 0$) точки на отдельных критических частотах и для отдельных упругих сред $(\sigma, v, p) = (0, v_{CR}, p_{CR})$ (здесь p – коэффициент Пуассона; см. [6, 56]). Пластина в сосуде – уже до 10-ой кратности [46]. Как известно, многократным нулевым корням соответствуют присоединённые моды-колебания, в последнем случае $A_{10}(r) \exp(ivt)$, $A_{10} = \sum_0^9 b_j r^j$, r – ось волновода.

Кресты дисперсионных кривых возможны среди волн Лэмба [36]; аналогично, как мы полагаем, и среди мод Похгаммера-Кри. Тем более реальны пересечения дисперсионных кривых лэмбовских со сдвигowymi SH-волнами пластины, а Похгаммера-Кри с крутильными цилиндра.

Сильно затухающие (кинематически, а не диссипативно), не бегущие моды-колебания мнимого и комплексного частей спектра, где также многочисленны кресты и др. сингулярности, мало интересны в физическом смысле. Кроме комплексных мод в радиофизике [16 и др.] и для построения корректного, точного и полного решения задач.

1.4. Петли

Пример петливой дисперсионной кривой $U(v)$ на рис. 4.

Определение 1.3. *Простая петля, плоская гладкая оваловидная (выпуклая), $y = \varphi(x)$ – это самопересекающаяся кривая, ограничивающая и замыкающая конечную область D в области своего определения E на плоскости uOx : $D + \partial D \subset E$; $\varphi \equiv \partial D$; имеющая три особенности, крест и две точки ветвления.*

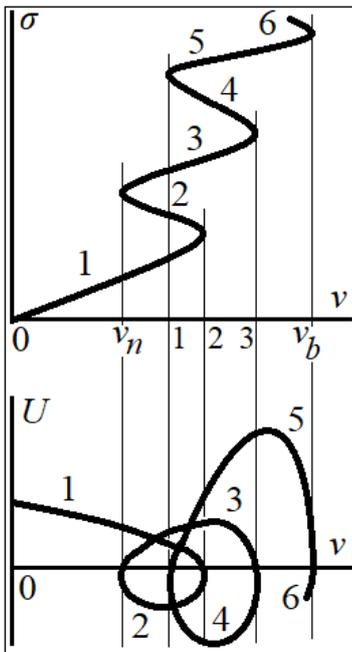


Рис. 4. Дисперсионная кривая волнового числа $\sigma(v)$ в пять извилин (по мотивам [57, с. 53]) и петлистая спираль групповой скорости $U(v)$, с 4-мя крестами, для 5 мод, вкл. две ОБ-моды, [56].

Кроме того, возможны петли в виде трёх- и много-значных замкнутых кривых, локально регулярных всюду, кроме креста и точек ветвлений. Две дуги с вершинами или более, соответственно, у всюду выпуклой (оваловидной) петли или при наличии в петле извилин и/или двух и более крестов (что здесь не изучается). Так собственно и сам греческий символ φ – это овальная петля, с «размашистым» крестом. Примеры крестово-многозначных петель на рис. 4 и 5 (ниже).

Петлю оваловидную строим на базе повернутой извилины, что в теории волн соответствует связи волнового числа $\sigma(v)$ и групповой скорости *обратной вол-*

ны (ОБ) $U = \partial v / \partial \sigma$ (см. ниже п. 2); отсюда же и эта наша [см. в 46, 56], конструктивная идея.

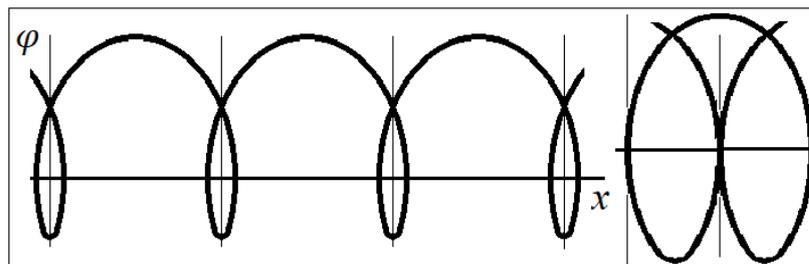


Рис. 5. Петли периодические, порождаемые наклонной синусоидой; справа – со сдвоенной петлём, крестом-самокасанием при повороте осей синусоиды на 78° .

Теорема 1.1. Петля $\varphi(x)$ порождается отрицательной извилиной гладкой убывающей функции $f(x)$ как производная обратной $\varphi = \partial x / \partial f$ и после адекватного поворота прямой перегиба на угол $\theta \in (90, 135^\circ)$,

$$\theta = \arctg(\partial f(x_m) / \partial x).$$

Доказательство графоаналитическое, например, рис. 4; x_m – точка перегиба. Интересно будет построить обратную теорему (т.е. некие петли имеют такие-то исходные извилины; через интеграл).

Данная петлистая осевая спираль на базе синусоиды возникает при повороте её декартовых осей на $45-90^\circ$ (при 90 вырождение в квазиэллипс). Что может служить простой аппроксимацией плоских петель и осевых спиралей, возникающих в приложениях.

Многие, если не большинство сингулярностей или, кратко, *сингул* (наша девиация термина) возникают в силу чётности и нечётности функций.

Лемма 1.1. Все регулярные плоские кривые, определяемые чётными, по y и/или x , уравнениями, имеют в нуле, соотв., на осях $(0; x)$ и/или $(y; 0)$, множе-

ство сингул, по меньшей мере, ветвления 2-го порядка и соответствующие вершины дуг.

Ремарка к лемме: парабола x^2 – простейшая кривая; прямая – вырождение. Доказательство – элементарно, через производную от $D(y^2; x^2)$. Приложение – например, дисперсионные кривые теории волн, где дисперсионные уравнения и функции, как правило, чётны.

2. Сингулярная кинематика обратных волн; скорость, затухание, Эйри-фаза и головной фронт

Обратноволновая кинематика, динамика и энергетика весьма сингулярны, что связано с частотной, как правило, узкополосностью или ограниченностью этих волн. Их дисперсия эффективно определяется сингулярными асимптотиками извилины волнового числа $\sigma(v)$ и полу-петли групповой скорости $U(v)$. И в целом ОВ-механика и физика являются сингулярными, уже в физическом смысле (см. п. 1.1), т.к. имеют необычную широкую феноменологию фундаментальных эффектов [5, 6, 45, 56 и др.].

Замечание 2.1. Например, замечательный эффект отрицательного *антизеркального отражения* в обратноволновых системах, предсказанный нами в 1983 г. [6, п. 7В; 70] и получивший в последние годы дальнейший анализ в ряде работ. Эффект аналогичен фундаментальному Андреевскому отражению квантовых заряда-дырки. См. литературу в [9, 46].

Теория обратных волн базируется на законах дисперсии $\sigma(v)$ и дисперсионных спектрах. ОВ-спектры регулярных и периодических волноводов квазипериодичны, с узловым периодом порядка π для любых волноводных профилей и структур (наше обобщение [56, 58]). Обратноволновые дисперсионные кривые в основном двух следующих типов.

Определение 2.1 (типичные ОВ). *Весьма типичны узкополосные обратные волны:*

$$(v_{Cr1}, v_{Cr2}), (v_{Cr2} - v_{Cr1}) \ll v_{CrK}, \quad (2)$$

v_{CrK} – две критические частоты. Их дисперсионные кривые – это отрицательно наклонённая извилина волнового числа и отрицательная полу-петля групповой скорости (рис. 4, 7б). Второй типичный вид – низкочастотный $(0, v_{Cr})$, с отрицательными (отрицательно наклонёнными) квазипараболами и волнового числа, и групповой скорости, с крестом в нуле частот $((\sigma_0, 0)$ и $(U_0, 0))$ и вершиной дуги на критической v_{Cr} (рис. 6). Принципами излучения определяются условно отрицательное число σ и положительная скорость U в волновом факторе и в огибающей: $A(x \pm Ut) \exp(i(\mp \sigma x \pm vt))$ – так что фаза бежит к источнику волны.

Доказательство индуктивное – обобщение множества работ за вековой период, вкл. наши обзоры и статьи [6, 52, 56, 61, 71]. Известны также иного вида обратноволновые кривые, контрпримеры, исключения и упрощения, например, на рис. 4, выше, и в [38, 57, 59, 60, 70 и др.]. О физических принципах и математических условиях излучения см. наши статьи [6, п. 6; 17; 58] и работы др. авторов ([41, 42] и мн. др.).

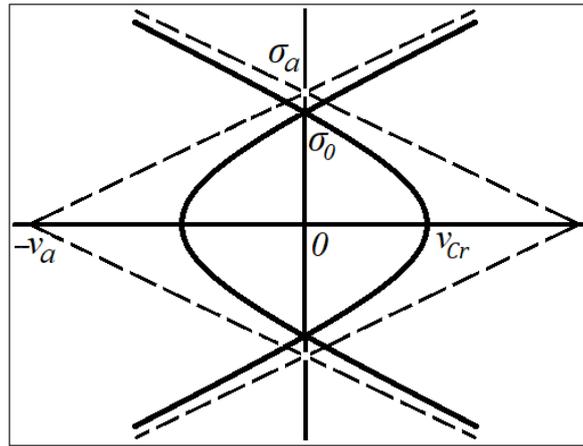


Рис. 6. Типичные, 2-го вида, дисперсионные кривые волнового числа обратных волн, аналогично и групповой скорости (3); штрихами – асимптоты.

Квазипарабола-дуга, очевидно, самый простой и ходовой вид и элемент, участок кривых не только в дисперсии волн, но и в большинстве других разнообразных приложениях и опытных данных (например, в [37]). Таковы и волноводные моды. А низкочастотные обратные волны описываются кривой неканонического вида, отрицательной гиперболой, квази-гиперболой (по дуге и кресту) рис. 6. Гиперболоидный, но не канонический вид в силу чётности и сложности дисперсионных уравнений. Связь квазигиперболы с квазипараболой через асимптотику, с контролируемой точностью. Асимптотики для $U(v)$: квазипарабола на критической v_{Cr} ,

$$U = a\sqrt{(v_{Cr} - v + 0^2)(1 - 0^1)}, \quad 0^K = 0((v_{Cr} - v)^K); \quad (3)$$

и крест в нуле – см. п. 1.3.

При основном типе обратноволновой дисперсии (2), эффективная асимптотика (1) в точке перегиба $(\sigma_m; v_m)$ предопределяет как групповую скорость в области её максимума, так и ещё одну важную характеристику волны, селективность и минимум затухания $\alpha(v)$, [29, 56]:

$$u(r, t) \sim A(r - U_{max}t) \exp(i\alpha_{max}r + \sigma_m r + v_m t);$$

$\alpha = \delta/U$, $\delta = \delta(v) \approx const$, $U(v) = U_m(1 - a_m \Delta^2 + 0^3)$; $\Delta = v - v_m$, $a_m > 0$, A – огибающая, $\delta(v)$ – как правило, монотонная, медленно растущая функция, описывающая диссипативные потери в структуре, однако в узком диапазоне существования ОВ (2) её можно полагать константой (конечно, не всегда – ср., например, [45, 69]). Отсюда аналогия кривых $\alpha(v)$ и $U(v)$, при небольшом сдвиге экстремумов и малом различии поведения (в силу достаточной, всё же зависимости $\delta(v)$). См. рис. 7.

Кроме того, точкой перегиба задаётся ещё и фаза Эйри, и передний фронт обратной волны – фундаментальные характеристики волновых импульсов. На базе нашего анализа и расчётов на рис. 8 дан качественный вид обратноволнового короткого импульса, в несколько основных колебаний. Начиная с 2007г [61], этот эскиз-рисунок предлагается нами в качестве эмблемы обратноволновой физики.

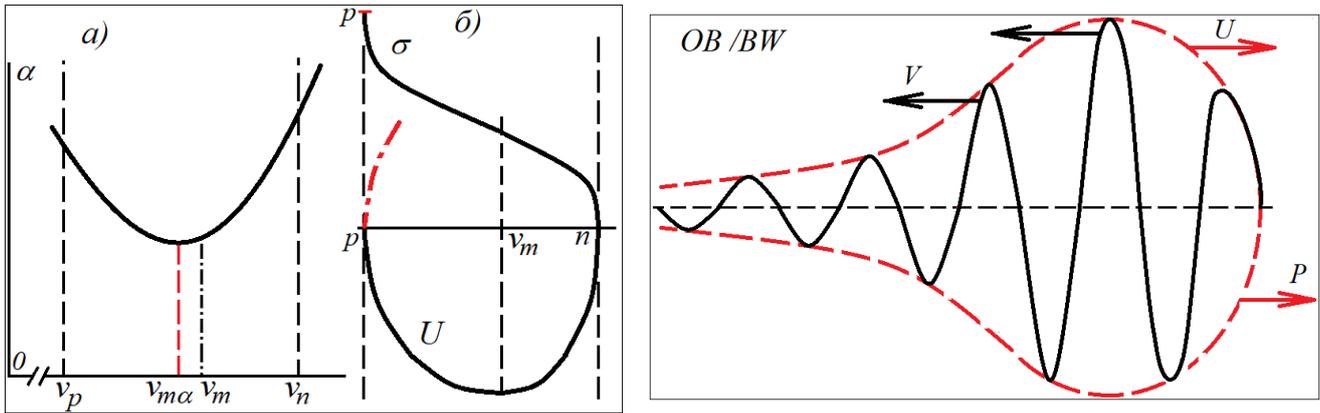


Рис. 7. Типичные дисперсионные кривые обратных волн: (а) коэффициент затухания α , (б) групповая скорость U и волновое число σ . Штрих-пунктирная кривая U для прямой волны, смежной в (σ_p, ν_p) .

Рис. 8. Обратноволновой импульс (OB/BW , backward wave) в дальней зоне с крутым головным фронтом и размытым хвостом. Схема; \underline{V} – фазовая скорость, \underline{U} – групповая, \underline{P} – поток мощности.

3. О практических расчётах

3.1. Связь исходной и локальной систем координат

Пример 3.1, перегиб–квазикубика. Расчёт типичного, наиболее распространённого перегиба, с квазикубикой $y = a_3 x^3 (1 + a_4 x + 0^2)$ – в локальной yOx . Исходная кривая или функция $f(\nu)$ и её график заданы на декартовых осях $fO\nu$ (в плоской системе координат, ДСК). Локальные оси поворачиваем на угол θ относительно исходных (по касательной-прямой перегиба; чем аннулируется $a_1 x$ в исходном разложении $y(x)$ (1)), и сдвигаем в точку перегиба $(f_m; \nu_m)$ (ср. с рис. 2а). Тогда имеем соотношения между ДСК-осями и, по сути, параметризацию $y(\nu, f(\nu))$, $x(\nu, f(\nu))$:

$x = (\nu - \nu_m) \cos \theta + (f - f_m) \sin \theta$; $y = (\nu_m - \nu) s + (f - f_m) c$, $s = \sin \theta$, $c = \cos \theta$.
Условия квази-кубики

$$y_m = y(0) = 0; y'_m = \partial y(0) / \partial x = 0; y''_m = 0; y_m^{(3)} = 6a_3 \neq 0.$$

Откуда через исходную $f(\nu)$, тоже 4 уравнения:

$$f_m = f(\nu_m); (f' - t) / (t f' + 1)|_m = 0, t = \operatorname{tg} \theta, f'_m = t;$$

$$f'' / c^3 (1 + t f')^3|_m = 0; (f^3 (1 + t f') - 3 t f''^2) / c^4 (1 + t f')^5|_m = f_m^3 c^4 = 6a_3.$$

Так что, не столь громоздкий переход.

Для особого перегиба при $\theta = 90^\circ$, берётся обратная функция $\nu(f)$.

В случае неявной функции $\Delta(f; \nu) = 0$, производные по известным правилам, однако третья производная будет уже довольно громоздка. И, в общем, имеем достаточно громоздкие соотношения и заключительные численные расчёты корней функции $\Delta(f_m; \nu_m) \equiv 0$ и её 1-ых / 3-их производных.

Для виртуальной, экспериментальной или численной кривой в расчётах нужны исходные табличные данные $f(\nu)$, а производные по известным формулам численного анализа, с оценкой погрешности (см., например, [52]).

Таким образом, точность анализа, *теоретически* декларируемые «сколь угодно точные асимптотики» и расчёты, *практически* будут ограничены всё более растущей громоздкостью расчётов, а при табличных, виртуальных данных – ещё и мощностью компьютера и растущей погрешностью.

3.2. О высоко-кратных перегибах, x^5 и выше

Визуально, конечно, заметен рост или убывание степени перегиба кривой $\sim x^{2j+1}$, кроме масштабирования и коэффициентов a_k . А для расчёта проверяются зануления производных:

$$y_m^{(k)} = 0, \quad k=2,3,4,\dots,2n, \quad n \in \mathbb{N}; \quad y_m^{(2n+1)} \neq 0.$$

Например, *пента-перегиб*: $y = a_1x + x^5(1 + a_6x + 0^2)$; $y_m^{(5)} = 5!$.

Перегибы высоких степеней возможны и, конечно, существуют в научно-технической практике. Однако, мы утверждаем апостериори, что высоко-кратные перегибы крайне редки, маловероятны по сравнению с квазикубикой. Что предварительно мы полагаем как следствие из теоремы ПТВ (это наше дополнение к теории неявных функций, ещё не законченное). Для зануления ряда производных неявной функции до n -го порядка необходимо выполнение системы n уравнений, $\Delta(f; v) = 0$, $\Delta_f^{(k)}(f; v) = 0$. Это, очевидно, необходимое условие, а все строго необходимые и достаточные условия ещё предстоит сформулировать.

4. Заключение

4.1. Заключительные замечания

Замечание 4.1. А) Об аппроксимации петли гистерезиса и др. ходовых кривых, типа извилины. Как известно (ещё со студенческой скамьи), в петле гистерезиса два перегиба и два заострения 2-го рода или, возможно (насколько обозримы многочисленные физико-технические исследования), два полу-креста. Группа советских математиков (*М. А. Красносельский* и др.) посвятили проблеме гистерезиса известный многолетний труд. Вместе с тем до сих пор, всё ещё выходят статьи по этой теме, например, [62]. Мы предполагаем, что в петле гистерезиса две извилины (наших извилины, изученных выше): можно предложить описание петли двумя «размашистыми» перегибами, по-видимому, до вершин извилины. Далее, экспериментальные сигмоидальные кривые в механике твёрдых тел (S -образные кривые; см. в [63] и др.) и широко известная релаксационная звука, имеющие вид извилины с бесконечными «хвостами» – асимптотами или конечными, с обрывами, также могут быть изучены по нашей методике.

Б) Об оптимальной аппроксимации извилины её асимптотиками. Оптимизация в двух аспектах: 1) при выборе локальных осей (см. п. 3.1); 2) при выборе двух точек стыковки перегиба и двух дуг, что продемонстрировано нами в [52].

Замечание 4.2. О строгости анализа. Надеемся, что уровень строгости данной нашей статьи приемлем для прикладной математики, в отл. от чистой математики с «вейерштрассовской, ε -», ε^{-1} -строгостью (*В. П. Маслов, А. Д. Мыш-*

кис и др. математики [54, с. 17, 24–25, ...]) или с «гауссовой строгостью» (Феликс Клейн и др. авторы [42, с. 107]).

Замечание 4.3. Мировая и Отечественная математика, современная и прошлого века, достигла значительных общепризнанных успехов; в частности, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН лидирует среди академических институтов России [64] и, очевидно, среди многих зарубежных. Вместе с тем в геометрии не доработана, насколько мы можем судить, проблематика трансцендентных функций и кривых, преобладают алгебраистика, вычислительные тренды и теоретико-множественный формализм, не вполне принимаемые даже математиками-специалистами [26, 54 и др.], не говоря уже о физиках. И характерно, что в передовой «Encyclopedia of Mathematics» (обновляемой онлайн, «with updates since 2011» [48], и переведённой с нашей советской пятитомной), трансцендентным функциям и кривым уделено лишь по несколько строк. А в Проблемах Гильберта, значительно предопределивших, как известно, математику 20-го века, нет трансцендентных объектов (кроме трансцендентных чисел). Так что современный аппарат трансцендентных функций – в значительной, преобладающей степени компьютерные программы [19,24,32,33,35,37, 39, 43, 47 и мн. др.]. Запущенность трансцендентного анализа отмечается и самими математиками (к сожалению, обзоров на эту тему не известно, ср. [34]). И в этом смысле показательна самокритика и рефлексия в самой математике, признание заслуг («царица наук»), самоирония и апологетика (апология), защита «служанки», «ещё не изгнанной» из прикладных наук, см. [25, 26, 54, 65–67].

4.2. Выводы и результаты по анализу плоских кривых и теории волн

Обратные волны – крайне важный и актуальный тренд в современной многопрофильной теории волн и волновых технологий, вышедший на высший уровень мировой и отечественной науки, престижных премий и номинаций (вкл. и нобелевский – [68] и др.). Обратноволновая дисперсия, наиболее сильная, отрицательная (выше аномальной), как раз и предопределяет их фундаментальную уникальную физику. Однако анализ дисперсионных уравнений, функций и кривых нормальных (собственных) и обратных волн сводится в основном к численным расчётам. С другой стороны, трансцендентные и другие сложные кривые востребованы как в физико-технической науке в целом, так и в прикладной математике и геометрии. В данной работе развивается аналитический подход к плоским кривым и гладким функциям произвольной сложности (трансцендентным, параметризуемым, виртуальным, алгебраическим высокого порядка и т.д.). Определена извилина, в отличие от перегиба, и её значение, как основного компонента достаточно сложных кривых и функций. Перегибу и двум дугам извилины даны простые асимптотики: квазипрямая и две противоположные квазипараболы – теоретически сколь угодно точные, практически ограничиваемые громоздкостью формул и объёмом расчётов. Рассмотрен аспект оптимальности приближений, в локальных системах координат анзац довольно прост и эффективен. Анализируются также петли, овалы, кресты и высоко-кратные

сингулярности. Этим геометрическим объектам и фигурам даётся приложение к дисперсии обратных и нормальных (собственных) диспергирующих волн.

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Уч. пос. для вузов/ В 10 тт. Отв. ред. Л.П. Питаевский/ Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Берестецкий В.Б., Питаевский Л.П. М.: ФМЛ, 2001, ТТ. 2–8, 10.
2. Mathematical Aspects of the Contemporary Continuum Mechanics: Conference / Emilian I. Parau, Sergey Gavriluyk, Michel Destrade, et al. Moscow, Steklov Mathematical Institute, Russia. November 2021. <https://www.mathnet.ru/eng/conf1951>
3. Days on Diffraction, Annual international conference, St. Petersburg Department of V.A. Steklov Institute of Mathematics, RAS, Euler International Mathematical Institute and SPb State Univ., SPb, 1968/92–2022. <http://www.pdmi.ras.ru/~dd/scope.php>
4. Lamb H. On group velocity// Proc. L. Math. Soc., Ser.2. 1904. V. 1. №849. P. 473-479.
5. Обратные волны: Науч. сессия отдел. Физич. наук РАН/ Вашковский А.В., Веселаго В.Г., Локк Э.Г., Силин Р.А.; М., ФИАН, янв. 2006// УФН. 2006. Т. 176. № 5. С. 557–565.
6. Бырдин В.М. Обратные волны: столетие первой работы, истоки и развитие обратноволновой механики и электродинамики (обзор)// Радиотехника и электр. 2005. Т. 50. № 12. С. 1413–1438.
7. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по СВЧ электронике для физиков. В 2 тт. Т. 1. М.: ФМЛ, 2003. 496 с.
8. Электромагнитные и акустические волны в метаматериалах и структурах: Науч. сессия отд. Физич. наук РАН, 24.02.2011// УФН. 2011. Т. 181. № 11. С. 1201–1234.
9. Physique des ondes et à ses applications ..., L'Institut Langevin, Paris. – Дата обращ. 14.1.2021. https://www.institut-langevin.espci.fr/the_langevin_institute?lang=fr
10. Virtual Institute for Artificial Electromagnetic Materials and Metamaterials. <https://www.metamorphose-vi.org/>
11. Special Issue on the History of Metamaterials, "The century of metamaterials", Editorial to the Special Is., Ed.: Sergei Tretyakov, Augustine Urbas and Nikolay Zheludev, J. of Optics, **19:8** (2017). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/2040-8986/aa77a8/meta>
12. Guo Z., Jiang H., Chen H., "Hyperbolic metamaterials: from dispersion manipulation to applications", Journal of Applied Physics, **127:7** (2020), 071101.
13. Грейсух Г.И., Данилов В.А., Ежов Е.Г., Антонов А.И. Метаповерхности в оптике: физические основы и достигнутые результаты. Обзор// Автометрия. 2020. Т. 56. № 2. С. 5–19.
14. Кейлис-Борок В.И. Об уравнении частот многослойной упругой среды// Докл. АН СССР. 1952. Т. 87. № 1. С. 25-28.
15. Краснушкин П.Е., Фёдоров Е.Н. О кратности волновых чисел нормальных волн в слоистых средах// Радиотехника и электр. 1972. № 6. С. 1129 – 1140.
16. Веселов Г.И., Краснушкин П.Е. О дисперсионных свойствах двухслойного экранир. круглого волновода и комплексных волнах// ДАН СССР. 1981. Т. 260. № 3. С. 576-579.
17. Бырдин В.М. Условия излучения для краевых задач с уравнениями Гельмгольца// ДАН СССР. 1978. Т. 238. № 2. С. 293–295.
18. Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering, Proc. of the 8th International Conference/ M. Papadarakakis and M. Fragiadakis (Eds.), Streamed from Athens, Greece, June 2021. <https://2021.compdyn.org/>
19. Effective Computational Geometry for Curves and Surfaces, Jean-Daniel Boissonnat and Monique Teillaud (Eds.), Series: Mathematics and Visualization, Springer, 2006.
20. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику: Уч. пос. М.: МФТИ, 1994. 528 с.
21. Вычислительные методы в современной радиофизике/ В.Ф. Кравченко (ред.), Лабунько О.С., Лерер А.М., Синявский Г.П. М.: Физматлит, 2009. 469 с.
22. Кутищев Г.П. Решение алгебраических уравнений произвольной степени. Теория, методы, алгоритмы. М.: ЛКИ, 2010. 229 с.

23. Jamshid Ghaboussi, Xiping Steven Wu. Numerical Methods in Computational Mechanics. CRC Press, 2016.
24. Ugboho J.A., Esuabana I.M. “Marching Method: A New Numerical Method for Finding Roots of Algebraic and Transcendental Equations”, American Journal of Computational and Applied Mathematics, **9**:1 (2019), 6–11.
25. Ильин В.П. Как реорганизовать вычислительные науки и технологии// Вестник РАН. 2019. Т. 89. № 3. С. 232–242.
26. Новиков С.П. Математика на пороге XXI века (Историко-математические исследования). Часть 1. Вторая пол. XX века и её итог: кризис физико-математического сообщества в России и на Западе. 2002. Дата обр. 24.2.2018: <https://www.liveinternet.ru/community/2281209/post147788692/> Часть 2. https://www.liveinternet.ru/community/2281209/post147926123/?aid_refresh=yes
27. Еругин Н.П. Неявные функции. Л.: ЛГУ, 1956. 59 с.
28. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1 и 2 (Функции одной – и – неск. переменных). 4 изд., М.–СПб: МГУ–«Лань», 2004. – 336, 464 сс. (1 изд. М., 1969)
29. Бырдин В.М. О затухании нормальных и поверхностных волн и зависимости их фазовых и групповых скоростей от потерь// Докл. АН СССР. 1978. Т. 238. № 3. С. 552–554.
30. Арнольд В.И. Замечание о подготовительной теореме Вейерштрасса// Функци. анализ и его прилож. 1967. Т. 1. № 3. С. 1–8.
31. Бахтин В.И. Подготовительная теорема Вейерштрасса–Мальгранжа в конечногладком случае// Функци. анализ и его прилож. 1990. Т. 24. № 2. С. 3–15.
32. Кац И.С., Маергойз М.Д. Решение нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1967. Т. 7. № 3. С. 654–661.
33. Брюс Дж.В., Гиблин П.Дж. Кривые и особенности: Геометрическое введение в теорию особенностей: Пер. с англ. 1-го изд. 1984 г./ И.Г. Щербак, под ред. и с предисл. В.И. Арнольда. М.: Мир, 1988. 262 с.
34. Rubel L.A. “A Survey of Transcendentally Transcendental Functions”, The American Mathematical Monthly, **96**:9 (1989), 777–788.
35. Малый В.Н. Явные выражения корней трансценных дисперсионных уравнений // Изв. РАН, МТТ. 1992. № 5. С. 56–57.
36. Zhu Q., Mayer W.G., “On the crossing points of Lamb wave velocity dispersion curves”, JASA, **93**:4 (1993), 1893–1895.
37. Шикин Е.В., Франк-Каменецкий М.М. Кривые на плоскости и в пространстве. Справочник с прилож. дискеты «Плоские кривые». М.: ФАЗИС, 1997. 337 с.
38. Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Стрелков П.С. Плазменная релятивистская СВЧ-электроника: Уч. пос., под ред. А.А. Рухадзе. М.: МГТУ, 2002. 544 с.
39. Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica/ 3rd ed., Alfred Gray, Simon Sala-mon, Elsa Abbena. L.–N-Y.: Boca Raton, Taylor & Francis, 2006.
40. Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В. Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. М.: ФМЛ, 2009. 320 с.
41. Касаткин Б.А., Злобина Н.В. Корректность постановки граничных задач в акустике слоистых сред. М.: Наука, 2009. 496 с.
42. Бабич В.М., Киселев А.П. Упругие волны. Высоочастотная теория. СПб: БХВ-Петер., 2014. 320 с.
43. Очков В.Ф., Фалькони А.Д. Семь вычислительных кривых или Велосипед Аполлония// Cloud of Science. 2016. Т. 3. № 3. С. 396–418.
44. Алексеев Г.В. Проблема невидимости в акустике, оптике и теплопереносе. Владивосток: Дальнаука, 2016. 224 с.
45. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Магнитостатические и электромагнитные волны в сложных структурах. М.: ФМЛ, 2017. 360 с.

46. Бырдин В.М. Дифракция нормальных волн в слоистых структурах с полубесконеч. элементами: модель уровнемера, модификация метода факторизации и квазирезонансы// ИАН, МТТ. 2017. № 3. С. 83-99.
47. Словеснов А.В. О приближении плоских кривых линиями второго порядка// Сибир. электрон. матем. изв. 2018. № 15. С. 1576–1594.
48. Encyclopedia of Mathematics, in 10 v. + 3 v. Supplements, Ed. Mihil Hasewinkel, European Mathematical Society, Translation from Russian, Kluwer Acad. Publ., 1987-2002. With updates since 2011. <https://encyclopediaofmath.org/>
49. Пархоменко А.С. Что такое линия? М.: ГИТТЛ, 1954. 140 с.
50. Special issue: Recent advances in Acoustic Black Hole research, F. Gautier, V.V. Krylov, Adrien Pelat and et., J. of Sound and Vibration, **476**:23 (2020).
51. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах/ Пер. с франц. М.: ИЛ, 1959. 457 с.
52. Бырдин В.М. Дисперсия, аппроксимация и асимптотика обратных, нормальных и диспергирующих волн// Проблемы машиностроения и автоматизации. 2007. № 1. С. 102-109.
53. Арнольд В.И. Исчезающие перегибы// Функцион. анализ и его прилож. 1984. Т. 18. № 2. С. 51–52.
54. Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложений математики/ 2 изд. М.: ФМЛ, 1990. 360 с. (3 изд. 2003)
55. Виро О.Я. Плоские вещественные алгебраические кривые: построения с контролируемой топологией// Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 5. С. 1–73.
56. Бырдин В.М. Об обратноволновой концепции в общей теории волн, в механике и электродинамике// Волны и вихри в сложных средах: 12-ая междун. конф.-школа, ИПМех РАН. Zoom. М., дек. 2021 г. М., ИСПО-принт, 2021. С. 44-49.
57. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн: Уч. пос. М.: ФМЛ, 1984. 432 с. (2 изд. 2000)
58. Бырдин В.М. Об условиях излучения и об обратных модах в волноведущих системах сложной структуры// Физика волновых процессов и радиотехнич. системы. 2003. Т. 6. № 1. С. 8–13.
59. Кузнецова И.Е., Недоспасов И.А., Кузнецова А.С. Прямые и обратные акустические волны в кристаллах с высокой пьезоактивностью и диэлектрической проницаемостью// Изв. РАН. Серия физич. 2018. Т. 82. № 5. С. 545–549.
60. Kouzaev G.A., “Graphene H-Waveguide for Terahertz Lasing Applications: Electromagnetic Quasi-Linear Theory”, Nanomaterials, **10** (2020), 2415/ doi:10.3390/nano10122415
61. Бырдин В.М. О работах В.В. Шевченко по теории обратных волн (к 70-летию со дня рождения)/ Под ред. С.А. Никитова, ИРЭ РАН, М., 2007. Рукопись доклада на Моск. электродинам. семинаре, ИРЭ РАН, 6.11.2007./ Scientific.ru; http://ieee.orbita.ru/leos/Rep07_%20LEOS.htm
62. Lapshin R.V., “Analytical model for the approximation of hysteresis loop and its application to the scanning tunneling microscope”, Review of Scien. Instruments, **66**:9 (1995), 4718–4730.
63. Хохлов А.В. Свойства семейства диаграмм деформирования, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для реономных материалов// ИАН. МТТ. 2019. № 2. С. 29–47.
64. Козлов В.В., акад. «Гиперзвуковые ракеты порождают множество фундаментальных проблем; обществу важно знать, чем занимаются российские ученые»// Коммерсантъ–Наука. № 6 (24.03.2020), 45. / <https://www.kommersant.ru/doc/4292026>
65. Харди Г.Г. Апология математики/ Пер. с англ. Ю.А. Данилова. Ижевск: РХД, 2000. 104с.
66. Клайн Морис. Математика. Утрата определенности. М.: Мир, 1984. 113 с.
67. Еровенко В.А. «Апология математики» в разнообразных взаимодействиях философских и математич. исследований// Гуманитарные науки в России. 2018. Т. 7. № 5. С. 335–345.
68. Гарнов С.В., Дианов Е.М., Пендри Дж.Б., Руденко О.В. и др. Памяти Виктора Георгиевича Веселаго// УФН. 2019. Т. 189. № 3. С. 335–336.

69. Селина Н.В., Хить Я.В., Иващенко Н.Г. Расчет потерь в многослойном круглом плазмонном волноводе // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2023. № 2. DOI:10.24412/2541-9269-2023-2-32-37.
70. Бырдин В.М. К теории холестерических жидких кристаллов// Оптика и спектроск. 1983. Т. 54. № 3. С. 456-458.
71. Бырдин В.М. О дисперсионных уравнениях в общей теории волн и в математической физике // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2023. № 2; URL: mathmod.esrae.ru/42-167