

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: [mathmod.esrae.ru/44-177](http://mathmod.esrae.ru/44-177)

Ссылка для цитирования этой статьи:

Блинков Ю.А. Качественное исследование схем типа Кранка-Николсона с использованием первого дифференциального приближения на примере уравнения Котревега де Вриза // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2023. №4

УДК 681.3.06, 004.94, 519.62

DOI:10.24412/2541-9269-2023-4-12-28

**КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СХЕМ ТИПА  
КРАНКА-НИКОЛСОНА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПЕРВОГО  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ НА ПРИМЕРЕ  
УРАВНЕНИЯ КОТРЕВЕГА ДЕ ВРИЗА**

Блинков Ю.А.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского сообщения, Россия, Саратов, [blinkovua@info.sgu.ru](mailto:blinkovua@info.sgu.ru)

**QUALITATIVE INVESTIGATION OF CRANK-NICOLSON-TYPE  
SCHEMES USING THE FIRST-ORDER DIFFERENTIAL  
APPROXIMATION ON THE EXAMPLE  
OF THE KORTEWEG-DE VRIES EQUATION**

Blinkov Yu.A.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Saratov State University, Russia, Saratov, [blinkovua@info.sgu.ru](mailto:blinkovua@info.sgu.ru)

**Аннотация.** На примере первого дифференциального приближения проведено исследование для двух разностных схем типа Кранка-Николсона для уравнения Котревега де Вриза. Это позволило качественно оценить невязку метода и предложить простые критерии выбора шага по времени и по пространству при проведении расчетов.

Представленные методы позволяют провести эффективные вычисления средствами систем компьютерной алгебры. При исследовании применялись авторские программы для работы с первым дифференциальным приближением реализованные в системе компьютерной алгебре SymPy. Проведенные подробные символьные и численные расчеты для одно- и двух-солитонных решений.

Ключевые слова: разностные схемы, первое дифференциальное приближение, уравнения Котревега де Вриза, компьютерная алгебра, базисы Грёбнера.

**Abstract.** Using the first-order differential approximation, a qualitative study was conducted for two Crank-Nicolson-type schemes for the Korteweg-de Vries equation. This allowed to qualitatively assess the method's truncation error and propose simple criteria for selecting the time and space steps during calculations.

The presented methods allow for efficient computations using computer algebra systems. For the research, author's programs for working with the first-order differential approximation implemented in the computer algebra system SymPy were used. Detailed symbolic and numerical

calculations were performed for single- and two-soliton solutions.

Keywords: difference schemes, first-order differential approximation, Korteweg-de Vries equations, computer algebra, Gröbner bases

## Введение

В 60-х годах прошлого века Н. Н. Яненко и Ю. И. Шокиным [1-5] сформулирован метод дифференциальных приближений разностной схемы. Основная идея этого метода состоит в замене исследования свойств разностной схемы исследованием некоторой задачи с дифференциальными уравнениями, занимающими промежуточное положение между исходной дифференциальной задачей и аппроксимирующей ее разностной схемой.

Первое дифференциальное приближение (FDA - first-order differential approximation) для дифференциальных уравнений в частных производных эволюционного типа и в частности уравнения Korteweg-de Vries с использованием систем компьютерной алгебры рассмотрено в [6], а для уравнений Навье-Стокса в [7].

В [8] рассмотрено FDA для разностных схем, описывающих обыкновенные дифференциальные уравнения. Обсуждена связь между сингулярным возмущением исходной системы и понятием FDA. Для этого простого случая показана связь между методом оценки ошибки аппроксимации решения, основанным на анализе FDA, и методом Ричардсона - Калиткина. Приведены примеры, когда при аппроксимации совместной системы дифференциальных уравнений в частных производных не всегда получаются совместные разностные системы уравнений. В качестве способа проверки совместности системы разностных уравнений предлагается проверять совместность FDA для разностной системы. Рассмотрены вопросы вычисления FDA в системах компьютерной алгебры, Sage и SymPy.

В данной работе в качестве демонстратора FDA для исследования разностных схем выбрано уравнение Котревега де Вриза (1). Это нелинейное уравнение в частных производных, которое описывает распространение волн в нелинейных средах и хорошо исследовано и имеет обширную библиографию. Уравнение Котревега де Вриза [9] является одним из основных инструментов в теории нелинейных волн и используется для моделирования различных физических явлений, таких как распространение звуковых волн, волн на поверхности воды и волн в плазме.

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

Одно- и двух-солитонные решения уравнения Котревега де Вриза - это решения, которые описывают распространение волн в нелинейных средах. Одно-солитонное решение (2) представляет собой бегущую волну  $\xi = k(x - 4k^2t)$ , зависящую от параметра  $k$ , которая распространяется без изменения формы и амплитуды [10]:

$$u = \frac{2k^2}{\cosh^2 \xi} \quad (2)$$

Двух-солитонное решение (3) описывает взаимодействие двух волн  $\xi_1 = k_1(x - 4k_1^2 t)$  и  $\xi_2 = k_2(x - 4k_2^2 t)$ , зависящих от параметров  $k_1$  и  $k_2$ , при котором они сохраняют свою форму и амплитуду при дальнейшем движении [10]:

$$u = \frac{(8k_1^2 - 8k_2^2)(k_1^2 \cosh^2 \xi_2 + k_2^2 \sinh^2 \xi_1)}{((k_1 - k_2) \cosh(\xi_1 + \xi_2) + (k_1 + k_2) \cosh(\xi_1 - \xi_2))^2} \quad (3)$$

В книге [11, Глава 1] рассмотрено большое количество разностных схем с порядком точности  $O(\tau, h^2)$ ,  $O(\tau, h^4)$ ,  $O(\tau^2, h^2)$  и  $O(\tau^2, h^4)$ . Для рассмотренных явных схем приведены оценки сходимости на шаг по времени  $\tau$  и шаг по пространству  $h$ . Среди неявных схем отсутствуют схемы аналогичные схеме Кранка-Николсона для уравнения теплопроводности [12].

В настоящей работе будут исследованы две следующие схемы аналогичные схеме Кранка-Николсона для уравнения теплопроводности. Следующая схема второго порядка по  $h$  рассмотрена в работе [6], а также в многочисленных работах для уравнений и систем уравнений типа Котревега де Вриза [13,14] (модифицированного Котревега де Вриза, Шамеля):

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{3}{4h} \left( (u_{j+1}^{2n+1} - u_{j-1}^{2n+1}) + (u_{j+1}^{2n} - u_{j-1}^{2n}) \right) + \\ & + \frac{1}{4h^3} \left( (u_{j+2}^{n+1} - 2u_{j+1}^{n+1} + 2u_{j-1}^{n+1} - u_{j-2}^{n+1}) + \right. \\ & \left. + (u_{j+2}^n - 2u_j^{n+1} + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n) \right) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Разностная схема (4) имеет порядок  $O(\tau^2, h^2)$ . Также рассмотрим схему повышенного порядка  $O(\tau^2, h^4)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \frac{3}{24h} \left( (u_{j+2}^{2n+1} - 8u_{j+1}^{2n+1} + 8u_{j-1}^{2n+1} - u_{j-2}^{2n+1}) + \right. \\ & \left. + (u_{j+2}^{2n} - 8u_{j+1}^{2n} + 8u_{j-1}^{2n} - u_{j-2}^{2n}) \right) + \\ & - \frac{1}{16h^3} \left( (u_{j+3}^{n+1} - 8u_{j+2}^{n+1} + 13u_{j+1}^{n+1} - 13u_{j-1}^{n+1} + 8u_{j-2}^{n+1} - u_{j-3}^{n+1}) + \right. \\ & \left. + (u_{j+3}^n - 8u_{j+2}^n + 13u_{j+1}^n - 13u_{j-1}^n + 8u_{j-2}^n - u_{j-3}^n) \right) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

### 1. Первое дифференциально приближение схемы второго порядка

Построение FDA использует только алгебраические операции и может быть эффективно реализовано алгоритмически средствами компьютерной алгебры [18-20].

Если разностная схема не совместна или имеет меньшее пространство решений по сравнению с исходной системой дифференциальных уравнений, то при построении первого дифференциального приближения будут получены лишние уравнения и вычисления можно остановить. Эта проверка значительно проще, чем проверка совместности в разностном случае как по требуемому времени, так и по памяти и легко может быть реализована обычными средствами систем компьютерной алгебры.

В данной работе предлагается в рамках универсального алгоритма построения базисов Грёбнера [15,16] для коммутативной алгебры средствами компьютерной алгебры проверить совместность исходной системы дифференциальных уравнений и аппроксимирующей ее разностной схемой, прямо и в рамках первого дифференциального приближения. Хотя алгоритм построения базисов Грёбнера и встроен в большинство систем компьютерной алгебры, он как правило имеет ограничения на работу с дифференциальными уравнениями, разностными схемами и формально бесконечными рядами Тейлора необходимыми FDA [18-20].

Авторская программа реализована в системе компьютерной алгебры с открытым исходным кодом SymPy (<https://www.sympy.org>) и может быть скачана [https://github.com/blinkovua/sharing-blinkov/blob/master/KDV\\_FDA\\_Crank-Nicolson.ipynb](https://github.com/blinkovua/sharing-blinkov/blob/master/KDV_FDA_Crank-Nicolson.ipynb).

Алгоритмически применение алгоритма построения базиса Грёбнера для построения FDA можно представить как работу с бесконечным модулем с упорядочением *POT* (*позиция старше термина* - упорядочение сначала по зависимым переменным, а затем по независимым) [16,17] при этом роль *позиции* играют шаги по времени  $\tau$  и по пространству  $h$ . При этом вычисления проводятся до первых не равных нулю членов ряда по  $\tau$  и  $h$ .

### 1.1 Лексикографическое упорядочение

Изначально метод FDA представлял собой разложение разностной схемы (4) в ряд Тейлора в центральной точке шаблона разностной схемы в точке  $(\tau/2, 0)$  будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & 6u_{xx} + u_t + u_{xxx} + h^2 \left( uu_{xxx} + \frac{u_{xxxx}}{4} + 3u_{xx}u_x \right) + \\ & + \tau^2 \left( \frac{3uu_{tx}}{4} + \frac{u_{ttt}}{24} + \frac{u_{ttxxx}}{8} + \frac{3u_{tt}u_x}{4} + \frac{3u_{tx}u_t}{2} \right) + \dots = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку формальный ряд Тейлора (6) равен нулю, то его линейная комбинация самого ряда и его дифференциальных следствий также будет равна нулю. Этим можно воспользоваться и привести его к каноническому виду, который может быть использован для исследования свойств не только разностных схем линейных уравнений, но и нелинейных [1-5].

В работах [1-5] исследовались уравнения эволюционного типа. Это позволяло выполнить преобразование формального ряда Тейлора (6) заменой всех производных по времени, через пространственные производные:

$$\begin{aligned}
 & 6u_{xx} + u_t + u_{xxx} + h^2 \left( uu_{xxx} + \frac{u_{xxxx}}{4} + 3u_{xx}u_x \right) + \\
 & + \tau^2 \left( 18u^3u_{xxx} + 9u^2u_{xxxx} + 162u^2u_{xx}u_x + \frac{3uu_{xxxxx}}{2} + \right. \\
 & + 63uu_{xxx}u_x + 99uu_{xx}u_{xx} + 108uu_x^3 + \frac{u_{xxxxxxx}}{12} + \\
 & + 6u_{xxxx}u_x + \frac{27u_{xxxx}u_{xx}}{2} + 21u_{xxx}u_{xxx} + \\
 & \left. + 81u_{xx}u_x^2 + 99u_{xx}^2u_x \right) + \dots = 0
 \end{aligned} \tag{7}$$

Полученный канонический вид (7) заменой всех производных по времени, через пространственные производные позволяет во первых точно определить порядок разностной схемы, а также позволяет вывести определенные заключения о таких свойствах разностных схем, как устойчивость, аппроксимация, точность, монотонность, консервативность, групповые свойства и др. [1-5].

Замена всех производных по времени, через пространственные производные соответствуют построению базиса Грёбнера лексикографическому упорядочению сначала по времени  $t$  потом по  $x$  ( $t \succ x$ ).

Поскольку зная разложение в ряд Тейлора в выбранной точке, можно с его помощью *формально* пересчитать производные искомой функции (в данном случае это дифференциальное уравнение) в другой выбранной точке. Поэтому от выбора точки разложения FDA не зависит, что и требуется для канонического представления. Для примера, рассмотрим разложение разностной схемы (4) в ряд Тейлора в точке  $(\tau, -h)$

$$\begin{aligned}
 & 6u_{xx} + u_t + u_{xxx} + h(6u_{xx} + u_{tx} + u_{xxx} + 6u_x^2) + \\
 & + h^2 \left( 4uu_{xxx} + \frac{u_{txx}}{2} + \frac{3u_{xxxx}}{4} + 12u_{xx}u_x \right) + \\
 & + \tau \left( -3uu_{tx} - \frac{u_{tt}}{2} - \frac{u_{txx}}{2} - 3u_tu_x \right) + \\
 & + \tau h \left( -3uu_{txx} - \frac{u_{txx}}{2} - \frac{u_{txxx}}{2} - 6u_{tx}u_x - 3u_tu_{xx} \right) + \\
 & + \tau^2 \left( \frac{3uu_{txx}}{2} + \frac{u_{ttt}}{6} + \frac{u_{txxx}}{4} + \frac{3u_{tt}u_x}{2} + 3u_{tx}u_t \right) + \dots = 0
 \end{aligned} \tag{8}$$

В разложении (8) видно что члены ряда при  $\tau$ ,  $th$  представляют собой простые дифференциальные следствия исходного уравнения (1). При более старших членах разложения уже кроме самого исходного уравнения могут быть задействованы и младшие члены исходного разложения. Построение базиса Грёбнера приведет ряд (8) к виду (7).

Выбор точки разложения влияет только на объем вычислений, учитывая нелинейность уравнений, высокий порядок применяемых производных и символные параметры задачи. Гораздо более сильное сокращение объема вычислений можно получить проводя вычисление не в лексикографическом упорядочении, а в упорядочение по полной степени, а потом в обратном лексикографическом (degrevlex - degree reverse lexicographic) [15,16].

## 1.2 Упорядочение degrevlex

Первоначальное разложение в ряд Тейлора не зависит от упорядочения, а зависит только от точки разложения.

$$\begin{aligned}
 & 6uu_x + u_t + u_{xxx} + h(-6uu_{xx} - u_{tx} - u_{xxxx} - 6u_x^2) + \\
 & + h^2\left(4uu_{xxx} + \frac{u_{txx}}{2} + \frac{3u_{xxxx}}{4} + 12u_{xx}u_x\right) + \\
 & + \tau\left(3uu_{tx} + \frac{u_{tt}}{2} + \frac{u_{txx}}{2} + 3u_tu_x\right) + \\
 & + th\left(-3uu_{txx} - \frac{u_{ttx}}{2} - \frac{u_{txxx}}{2} - 6u_{tx}u_x - 3u_tu_{xx}\right) + \\
 & + \tau^2\left(\frac{3uu_{ttx}}{2} + \frac{u_{ttt}}{6} + \frac{u_{ttxx}}{4} + \frac{3u_{tt}u_x}{2} + 3u_{tx}u_t\right) + \dots = 0
 \end{aligned} \tag{9}$$

Поэтому используя разложение (6) или разложение в точке (0,0) (9) получим в упорядочении degrevlex компактный, по сравнению с (7), следующий вид FDA:

$$\begin{aligned}
 & 6uu_x + u_t + u_{xxx} + h^2\left(3u^2u_x + \frac{uu_t}{2} - \frac{u_{txx}}{4} - \frac{3u_{xx}u_x}{2}\right) + \\
 & + \tau^2\left(-\frac{u_{ttt}}{12}\right) + \dots = 0
 \end{aligned} \tag{10}$$

В этом конкретном случае, можно получить данный вид и в лексикографическом упорядочении если поменять порядок переменных  $x \succ t$ , но подход основанный на применении упорядочения degrevlex в большинстве случаев даст наиболее компактный вид FDA или близкий к нему [15,16] и не так зависит от выбора порядка переменных.

### Первое дифференциально приближение схемы четвертого порядка

Разложение разностной схемы (5) в ряд Тейлора в центральной точке шаблона разностной схемы в точке  $(\tau/2, 0)$  будет иметь вид:  $(\tau/2, 0)$

$$\begin{aligned}
 & 6u_{x_t} + u_t + u_{xxx} + h^4 \left( -\frac{uu_{xxxx}}{5} - \frac{7u_{xxxxxx}}{120} - \right. \\
 & \left. - u_{xxx}u_x - 2u_{xx}u_{xx} \right) + \tau^2 \left( \frac{3uu_{ttx}}{4} + \frac{u_{ttt}}{24} + \frac{u_{ttxx}}{8} + \right. \\
 & \left. + \frac{3u_{tt}u_x}{4} + \frac{3u_{tx}u_t}{2} \right) + \dots = 0
 \end{aligned} \tag{11}$$

Построенное в лексикографическом упорядочении с порядком переменных  $t \succ x$  примет вид:

$$\begin{aligned}
 & 6u_{x_t} + u_t + u_{xxx} + h^4 \left( -\frac{uu_{xxxx}}{5} - \frac{7u_{xxxxxx}}{120} - u_{xxx}u_x - 2u_{xx}u_{xx} \right) + \\
 & + \tau^2 \left( 18u^3_{xxx} + 9u^2_{xxxx} + 162u^2_{xx}u_x + \frac{3uu_{xxxxxx}}{2} + \right. \\
 & + 63uu_{xxx}u_x + 99uu_{xx}u_{xx} + 108u^3_x + \frac{u_{xxxxxxx}}{12} + \\
 & + 6u_{xxxxx}u_x + \frac{27u_{xxxx}u_{xx}}{2} + 21u_{xxx}u_{xxx} + \\
 & \left. + 81u_{xx}u_x^2 + 99u^2_{xx}u_x \right) + \dots = 0
 \end{aligned} \tag{12}$$

Компактный вид FDA в упорядочении  $\text{degrevlex}$  с тем же порядком переменных:

$$\begin{aligned}
 & 6u_{x_t} + u_t + u_{xxx} + h^4 \left( \frac{27u^3_x}{5} + \frac{9u^2_t}{10} - \frac{uu_{ttx}}{2} - \frac{81uu_{xx}u_x}{5} - \right. \\
 & \left. - \frac{7u_{ttx}}{120} - \frac{29u_{tx}u_x}{20} - \frac{37u_tu_{xx}}{20} - \frac{9u^3_x}{2} \right) + \tau^2 \left( -\frac{u_{ttt}}{12} \right) + \dots = 0
 \end{aligned} \tag{13}$$

Как видно из сравнения FDA в лексикографическом упорядочении (7) и (12) для разностных схем (4) и (5) соответственно члены при  $\tau^2$  полностью совпадают. Тоже наблюдается и для упорядочения  $\text{degrevlex}$  в FDA (10) и (13). Это говорит, что свойства разностных схем (4) и (5) относительно разностной производной по времени совпадают. Разница только в аппроксимации по пространственной переменной  $x$ .

## 2. Символьные эксперименты

Несмотря на очень громоздкий вид, особенно при лексикографическом упорядочении, первые дифференциальные приближения могут быть эффективно проверены на точных решениях. Точнее, FDA при подстановке в него точного решения позволяет оценить саму схему без ее программирования и проведение вычисленных экспериментов для ее проверки.

Подставим точное решение (2) в FDA (7) или (10) получим следующий вид FDA:

$$\begin{aligned} & h^2(-8k^7(\tanh \xi - 1)(\tanh \xi + 1) \times \\ & \times (15 \tanh^4 \xi - 16 \tanh^2 \xi + 3) \tanh \xi) + \tau^2(-256k^{11}(\tanh \xi - 1) \times \\ & \times (\tanh \xi + 1)(3 \tanh^2 \xi - 2) \tanh \xi/3) + \dots = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Поскольку  $\xi$  представляет собой бегущую волну, а значение гиперболического тангенса лежит в интервале от  $-1$  до  $1$  основной вклад в невязку разностной схемы (4) на точном решении (2) можно представить в виде  $O(\tau^2 k^{11}, h^2 k^7)$ .

В результате можно сделать вывод, при  $0 < k < 1$  на погрешность выполнения уравнения (1) на сетке больше будет влиять величина шага  $h$ , чем  $\tau$  и наоборот при  $k > 1$ . Конечно необходимо учитывать, что разностная схема (4) это в некотором роде аппроксимация искомого решения многочленом, а решение (2) экспоненциально, вдобавок от величины  $k$  зависит амплитуда и крутизна излома солитона.

Подставим точное решение (2) в FDA (12) или (13). Слагаемое при  $\tau^2$  совпадет с соответствующим слагаемым в (14), а вот при  $h^4$  примет следующий вид

$$\begin{aligned} & 32k^9(\tanh \xi - 1)(\tanh \xi + 1)(945 \tanh^6 \xi - 1800 \tanh^4 \xi + \\ & + 1014 \tanh^2 \xi - 152) \tanh \xi/15 \end{aligned} \quad (15)$$

В результате основной вклад в невязку разностной схемы (5) на точном решении (2) можно представить в виде  $O(\tau^2 k^{11}, h^2 k^9)$  и провести рассуждения аналогичные FDA схемы (4).

Подстановка точного двух-солитонного решения (3) в FDA дает очень большие по размеру символьные выражения, что затрудняет их анализ. В данном случае, поскольку это решение является нелинейной композицией рассмотренного односолитонного решения (2) можно предположить справедливость ограничений полученных выше.

## 3. Численные эксперименты

Программа численных экспериментов реализована в пакетах с открытым исходным кодом SciPy (<https://scipy.org>) и Matplotlib (<https://matplotlib.org/>) и



может быть скачана [https://github.com/blinkovua/sharing-blinkov/blob/master/KDV\\_FDA\\_Crank-Nicolson.ipynb](https://github.com/blinkovua/sharing-blinkov/blob/master/KDV_FDA_Crank-Nicolson.ipynb).

В FDA при лексикографическом упорядочении (7) и (12) при слагаемом  $\tau^2$  встречается 9-ая производная по  $x$ . Вычисление разностной производной 9-го порядка на симметричном шаблоне требует 10 точек и при большом шаге будет давать сильные осцилляции. При компактном представлении FDA при упорядочении  $\text{degrevlex}$  (10) и (13) имеют максимум третью производную, как и само исходное уравнение (1). Все численные эксперименты ниже были проведены используя компактное представление FDA.

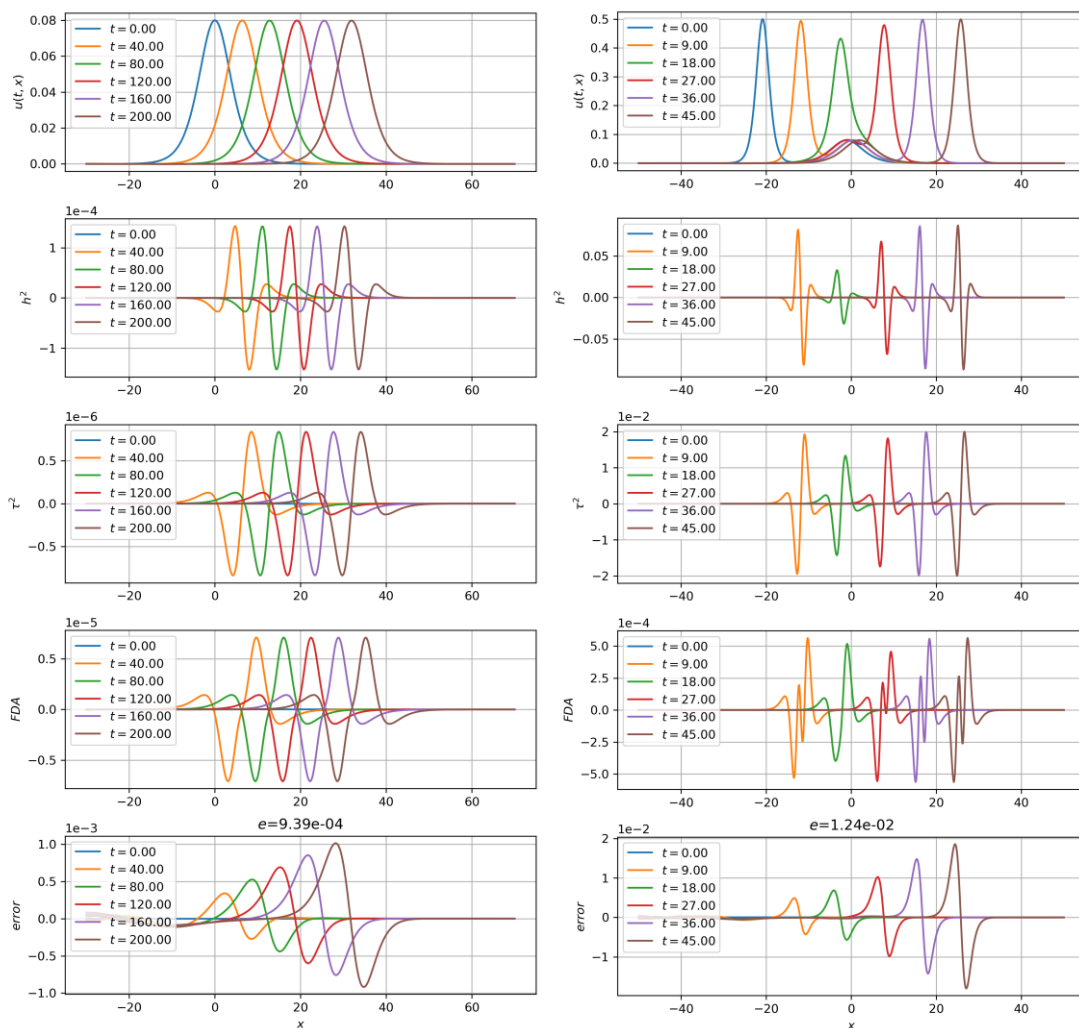


Рис.1 Начальное условие (2),  $k = 0.2$ ,  $h = 0.25$  и  $\tau = 16h$   
Рис.2 Начальное условие (3),  $k_1 = 0.5$ ,  $k_2 = 0.2$ ,  $h = 0.25$  и  $\tau = 2h$

При проведении расчетов по обоим разностным схемам (4) и (5) на границах задавались условия  $u_x = 0$ . Поскольку схемы нелинейны относительно следующего временного слоя, система нелинейных уравнений решалась методом простой итерации. Число итераций до получения разности итераций по норме Фробениуса  $10^{-12}$  не превышало 4.

Расчеты по разностной схеме (4) представлены на рисунках 1 и 2. Параметры расчетов представлены в подписях к рисункам. В верхнем под рисунке само решение. Во втором с подписью по оси ординат  $h^2$  значение при слагаемом  $h^2$  в FDA (7) или (10). В третьем сверху рисунке значение при слагаемом  $\tau^2$  в FDA (8) или (11). В четвертом сверху рисунке представлено подсчитанное значение FDA (8) или (11). В нижнем рисунке представлена относительная погрешность по сравнению с точными решениями по формуле:

$$\max_{n,j} \frac{|u_j^n - (* )_j^n|}{1 + |(* )_j^n|} \quad (16)$$

В формуле (16) звездочкой (\*) обозначено точное решение (2) или (3). Из нижнего рисунка видно, что относительная погрешность качественно ведет себя также, как и значение FDA целиком, так и значение FDA при слагаемых при  $h^2$  и  $\tau^2$ . Рост относительной погрешности связан с тем, что расчетные узлы в точности не попадают на пик солитона или солитонов и это приводит к накоплению погрешности по времени. Если искусственно сместить на несколько шагов  $h$  точное решение по  $x$  будет оставаться примерно одинаковым, хотя и с большой величиной. Также необходимо учитывать, FDA это погрешность самой разностной схемы, точнее погрешность выполнения алгебраических уравнений в узлах сетки, а относительная погрешность это связь точного и численного решения, т.е. самой искомой функции.

В таблицах 1, 2, 3, 4 проведены расчеты по разностной схеме (4). В левой колонке приведены значения  $h$ , а в заголовке  $\tau$  через коэффициент при  $h$ .

Как видно из значений FDA и относительной погрешности представленных в таблицах (4) имеет порядок  $O(\tau^2, h^2)$ .

$k = 0.2$

Таблица 1

$h \setminus \tau = *h$	16.0	8.0	4.0	2.0	1.0	0.5	0.25
$\max_{n,j}  FDA _j^n$							
2.500e-01	7.1e-06	5.7e-06	8.1e-06	8.7e-06	8.9e-06	8.9e-06	9.1e-06
1.250e-01	1.8e-06	1.4e-06	2.0e-06	2.2e-06	2.2e-06	2.2e-06	2.3e-06
6.250e-02	4.7e-07	3.6e-07	5.1e-07	5.5e-07	5.6e-07	5.6e-07	5.6e-07
3.125e-02	1.2e-07	8.9e-08	1.3e-07	1.4e-07	1.4e-07	1.4e-07	1.4e-07
$\max_{n,j}  u_j^n - (* )_j^n  / (1 +  (* )_j^n )$							
2.500e-01	9.4e-04	3.2e-04	1.7e-04	1.3e-04	1.2e-04	1.2e-04	1.2e-04
1.250e-01	2.4e-04	8.1e-05	4.2e-05	3.3e-05	3.1e-05	3.0e-05	3.0e-05
6.250e-02	5.9e-05	2.0e-05	1.0e-05	8.3e-06	7.7e-06	7.6e-06	7.6e-06
3.125e-02	1.5e-05	5.0e-06	2.6e-06	2.1e-06	1.9e-06	1.9e-06	1.9e-06
$\tau^2 k^{11}$							
2.500e-01	3.3e-07	8.2e-08	2.0e-08	5.1e-09	1.3e-09	3.2e-10	8.0e-11
1.250e-01	8.2e-08	2.0e-08	5.1e-09	1.3e-09	3.2e-10	8.0e-11	2.0e-11

6.250e-02	2.0e-08	5.1e-09	1.3e-09	3.2e-10	8.0e-11	2.0e-11	5.0e-12
3.125e-02	5.1e-09	1.3e-09	3.2e-10	8.0e-11	2.0e-11	5.0e-12	1.3e-12
$h^2 k^7$							
2.500e-01	8.0e-07	8.0e-07	8.0e-07	8.0e-07	8.0e-07	8.0e-07	8.0e-07
1.250e-01	2.0e-07	2.0e-07	2.0e-07	2.0e-07	2.0e-07	2.0e-07	2.0e-07
6.250e-02	5.0e-08	5.0e-08	5.0e-08	5.0e-08	5.0e-08	5.0e-08	5.0e-08
3.125e-02	1.3e-08	1.3e-08	1.3e-08	1.3e-08	1.3e-08	1.3e-08	1.3e-08

$k = 0.4$

Таблица 2

$h \setminus \tau = *h$	8.0	4.0	2.0	1.0	0.5	0.25	0.125
$\max_{n,j}  FDA _j^n$							
2.500e-01	2.6e-03	7.9e-04	7.2e-04	1.0e-03	1.1e-03	1.1e-03	1.2e-03
1.250e-01	1.2e-03	2.3e-04	1.8e-04	2.6e-04	2.8e-04	2.8e-04	2.9e-04
6.250e-02	3.7e-04	5.9e-05	4.6e-05	6.5e-05	7.0e-05	7.2e-05	7.2e-05
3.125e-02	9.6e-05	1.5e-05	1.1e-05	1.6e-05	1.8e-05	1.8e-05	1.8e-05
$\max_{n,j}  u_j^n -_j^n  / (1 + \ j^n)$							
2.500e-01	9.4e-02	3.1e-02	1.1e-02	5.9e-03	4.7e-03	4.3e-03	4.4e-03
1.250e-01	2.8e-02	8.0e-03	2.8e-03	1.5e-03	1.2e-03	1.1e-03	1.1e-03
6.250e-02	7.2e-03	2.0e-03	7.0e-04	3.7e-04	2.9e-04	2.7e-04	2.7e-04
3.125e-02	1.8e-03	5.0e-04	1.7e-04	9.2e-05	7.3e-05	6.8e-05	6.6e-05
$\tau^2 k^{11}$							
2.500e-01	1.7e-04	4.2e-05	1.0e-05	2.6e-06	6.6e-07	1.6e-07	4.1e-08
1.250e-01	4.2e-05	1.0e-05	2.6e-06	6.6e-07	1.6e-07	4.1e-08	1.0e-08
6.250e-02	1.0e-05	2.6e-06	6.6e-07	1.6e-07	4.1e-08	1.0e-08	2.6e-09
3.125e-02	2.6e-06	6.6e-07	1.6e-07	4.1e-08	1.0e-08	2.6e-09	6.4e-10
$h^2 k^7$							
2.500e-01	1.0e-04	1.0e-04	1.0e-04	1.0e-04	1.0e-04	1.0e-04	1.0e-04
1.250e-01	2.6e-05	2.6e-05	2.6e-05	2.6e-05	2.6e-05	2.6e-05	2.6e-05
6.250e-02	6.4e-06	6.4e-06	6.4e-06	6.4e-06	6.4e-06	6.4e-06	6.4e-06
3.125e-02	1.6e-06	1.6e-06	1.6e-06	1.6e-06	1.6e-06	1.6e-06	1.6e-06

$k = 0.8$

Таблица 3

$h \setminus \tau = *h$	0.5	0.25	0.125	0.0625
$\max_{n,j}  FDA _j^n$				
1.250e-01	2.3e-02	3.3e-02	3.5e-02	3.6e-02
6.250e-02	5.8e-03	8.3e-03	8.9e-03	9.1e-03
3.125e-02	1.5e-03	2.1e-03	2.3e-03	2.3e-03
$\max_{n,j}  u_j^n -_j^n  / (1 + \ j^n)$				
1.250e-01	5.3e-02	2.8e-02	2.2e-02	2.1e-02
6.250e-02	1.3e-02	7.1e-03	5.6e-03	5.2e-03

3.125e-02	3.3e-03	1.8e-03	1.4e-03	1.3e-03
$\tau^2 k^{11}$				
1.250e-01	3.4e-04	8.4e-05	2.1e-05	5.2e-06
6.250e-02	8.4e-05	2.1e-05	5.2e-06	1.3e-06
3.125e-02	2.1e-05	5.2e-06	1.3e-06	3.3e-07
$h^2 k^7$				
1.250e-01	3.3e-03	3.3e-03	3.3e-03	3.3e-03
6.250e-02	8.2e-04	8.2e-04	8.2e-04	8.2e-04
3.125e-02	2.0e-04	2.0e-04	2.0e-04	2.0e-04

$$k_1 = 0.5, k_2 = 0.2$$

Таблица 4

$h \setminus \tau = *h$	2.0	1.0	0.5	0.25	0.125
$\max_{n,j}  FDA _j^n$					
1.250e-01	5.6e-04	1.0e-03	1.3e-03	1.3e-03	1.4e-03
6.250e-02	1.4e-04	2.6e-04	3.2e-04	3.4e-04	3.4e-04
3.125e-02	3.6e-05	6.6e-05	8.1e-05	8.5e-05	8.6e-05
$\max_{n,j}  u_j^n - u_j^n  / (1 +  u_j^n )$					
1.250e-01	1.2e-02	5.0e-03	3.1e-03	2.7e-03	2.6e-03
6.250e-02	3.1e-03	1.2e-03	7.8e-04	6.7e-04	6.4e-04
3.125e-02	7.8e-04	3.1e-04	2.0e-04	1.7e-04	1.6e-04
$\tau^2 k_1^{11}$					
1.250e-01	3.1e-05	7.6e-06	1.9e-06	4.8e-07	1.2e-07
6.250e-02	7.6e-06	1.9e-06	4.8e-07	1.2e-07	3.0e-08
3.125e-02	1.9e-06	4.8e-07	1.2e-07	3.0e-08	7.5e-09
$h^2 k_1^7$					
1.250e-01	3.3e-03	3.3e-03	3.3e-03	3.3e-03	3.3e-03
6.250e-02	8.2e-04	8.2e-04	8.2e-04	8.2e-04	8.2e-04
3.125e-02	2.0e-04	2.0e-04	2.0e-04	2.0e-04	2.0e-04

В результате видно, что при увеличении  $k$  происходит необходимость уменьшения шага по времени, как и следует из (14). Для точного решения (3) можно предположить выполнения той же зависимости, что и подтверждает таблица 4.

При других значениях  $h$ ,  $\tau$  происходит значительное увеличение итераций при построении следующего временного слоя и решения разваливаются.

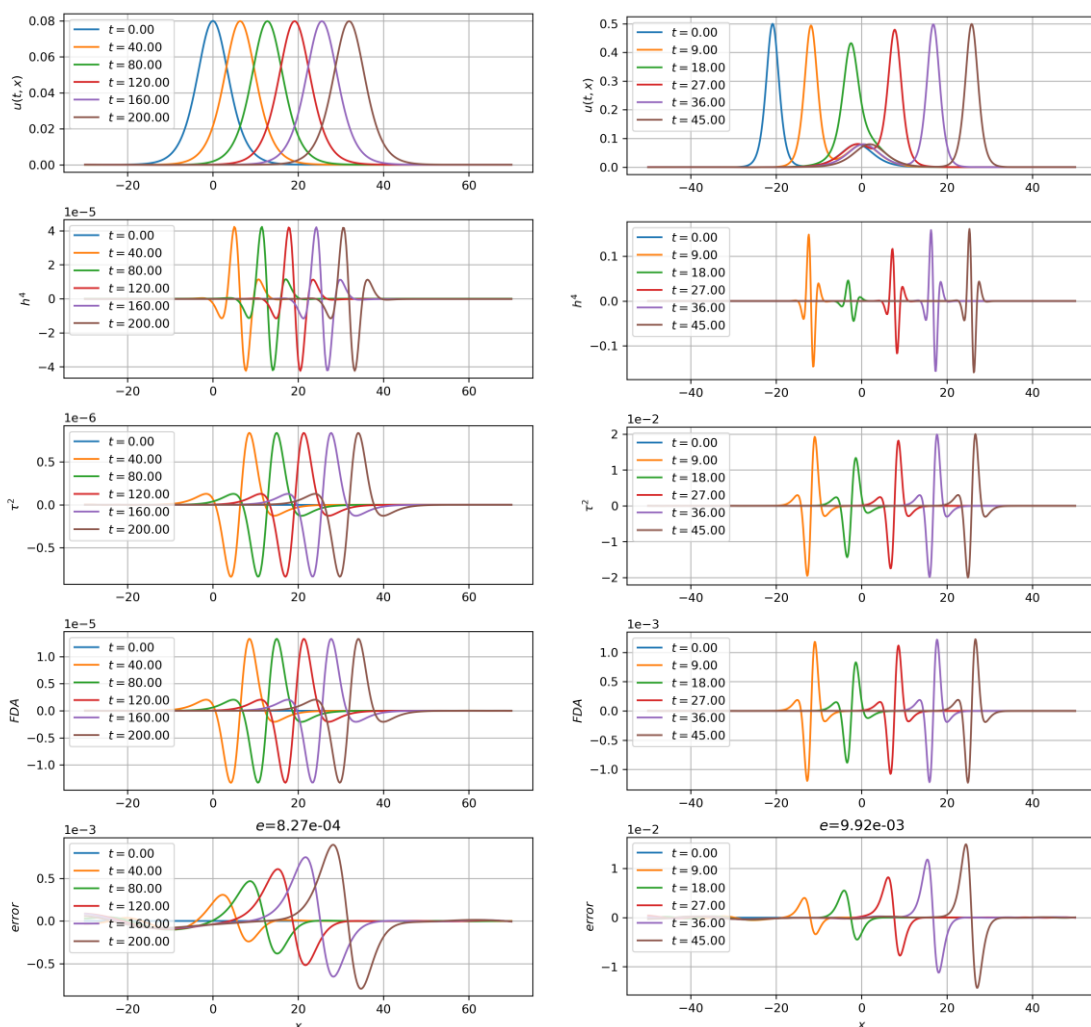


Рис.3 Начальное условие (2),  $k = 0.2$ ,  $h = 0.25$  и  $\tau = 16h$   
Рис.4 Начальное условие (3),  $k_1 = 0.5$ ,  $k_2 = 0.2$ ,  $h = 0.25$  и  $\tau = 2h$

Расчеты по разностной схеме (5) представлены на рисунках 3 и 4. Параметры расчетов представлены в подписях к рисункам

В таблицах 5, 6, 7, 8 проведены расчеты по разностной схеме (5). Как видно из значений FDA и относительной погрешности представленных в таблицах (5) имеет порядок  $O(\tau^2, h^4)$ .

$k = 0.2$

Таблица 5

$h \setminus \tau = *h$	16.0	8.0	4.0
$\max_{n,j}  FDA _j^n$			
2.500e-01	1.3e-05	3.4e-06	8.0e-07
1.250e-01	3.5e-06	8.8e-07	2.2e-07
6.250e-02	8.9e-07	2.2e-07	5.5e-08
3.125e-02	2.2e-07	5.6e-08	1.4e-08
$\max_{n,j}  u_j^n - u_j^n  / (1 +  u_j^n )$			
2.500e-01	8.3e-04	2.1e-04	5.2e-05

1.250e-01	2.1e-04	5.2e-05	1.3e-05
6.250e-02	5.2e-05	1.3e-05	3.1e-06
3.125e-02	1.3e-05	3.2e-06	7.5e-07
$\tau^2 k^{11}$			
2.500e-01	3.3e-07	8.2e-08	2.0e-08
1.250e-01	8.2e-08	2.0e-08	5.1e-09
6.250e-02	2.0e-08	5.1e-09	1.3e-09
3.125e-02	5.1e-09	1.3e-09	3.2e-10
$h^2 k^9$			
2.500e-01	3.2e-08	3.2e-08	3.2e-08
1.250e-01	8.0e-09	8.0e-09	8.0e-09
6.250e-02	2.0e-09	2.0e-09	2.0e-09
3.125e-02	5.0e-10	5.0e-10	5.0e-10

$k = 0.4$

Таблица 6

$h \setminus \tau = *h$	4.0	2.0	1.0
$\max_{n,j}  FDA _j^n$			
1.250e-01	4.3e-04	1.1e-04	2.5e-05
6.250e-02	1.1e-04	2.8e-05	6.9e-06
3.125e-02	2.8e-05	7.1e-06	1.8e-06
$\max_{n,j}  u_j^n - u_j^{n-1}  / (1 + \ u_j^n\ )$			
1.250e-01	7.0e-03	1.8e-03	4.3e-04
6.250e-02	1.8e-03	4.4e-04	1.1e-04
3.125e-02	4.4e-04	1.1e-04	2.7e-05
$\tau^2 k^{11}$			
1.250e-01	1.0e-05	2.6e-06	6.6e-07
6.250e-02	2.6e-06	6.6e-07	1.6e-07
3.125e-02	6.6e-07	1.6e-07	4.1e-08
$h^2 k^9$			
1.250e-01	4.1e-06	4.1e-06	4.1e-06
6.250e-02	1.0e-06	1.0e-06	1.0e-06
3.125e-02	2.6e-07	2.6e-07	2.6e-07

$k = 0.8$

Таблица 7

$h \setminus \tau = *h$	1.0	0.5
$\max_{n,j}  FDA _j^n$		
1.250e-01	4.4e-02	1.2e-02
6.250e-02	1.4e-02	3.5e-03
3.125e-02	3.6e-03	9.0e-04
$\max_{n,j}  u_j^n - u_j^{n-1}  / (1 + \ u_j^n\ )$		
1.250e-01	1.3e-01	3.3e-02

6.250e-02	3.3e-02	8.3e-03
3.125e-02	8.3e-03	2.1e-03
$\tau^2 k^{11}$		
1.250e-01	1.3e-03	3.4e-04
6.250e-02	3.4e-04	8.4e-05
3.125e-02	8.4e-05	2.1e-05
$h^2 k^9$		
1.250e-01	2.1e-03	2.1e-03
6.250e-02	5.2e-04	5.2e-04
3.125e-02	1.3e-04	1.3e-04

$$k_1 = 0.5, k_2 = 0.2$$

Таблица 8

$h \setminus \tau = *h$	2.0	1.0
$\max_{n,j}  FDA _j^n$		
1.250e-01	1.2e-03	3.0e-04
6.250e-02	3.3e-04	8.1e-05
3.125e-02	8.3e-05	2.1e-05
$\max_{n,j}  u_j^n - u_j^{n-1}  / (1 +  u_j^n )$		
1.250e-01	9.9e-03	2.5e-03
6.250e-02	2.5e-03	6.2e-04
3.125e-02	6.2e-04	1.6e-04
$\tau^2 k^{11}$		
1.250e-01	5.4e-03	1.3e-03
6.250e-02	1.3e-03	3.4e-04
3.125e-02	3.4e-04	8.4e-05
$h^2 k^9$		
1.250e-01	2.1e-03	2.1e-03
6.250e-02	5.2e-04	5.2e-04
3.125e-02	1.3e-04	1.3e-04

В результате видно, что при увеличении  $k$  происходит необходимость уменьшения шага по времени, как и следует из (15). Для точного решения (3) можно предположить выполнения той же зависимости, что и подтверждает таблица 8.

При других значениях  $h$ ,  $\tau$  происходит значительное увеличение итераций при построении следующего временного слоя и решения разваливаются.

### Заключение

Применение первого дифференциального приближения позволяет провести качественное и в частных случаях количественное исследование разностной схемы. За счет выбора упорядочения при построении первого

дифференциального приближения возможно сильно сократить, как объем символьных вычислений, так и получить его более компактный вид, который содержит производные гораздо меньшего порядка. На примере разностных схем типа Кранка-Николсона для уравнения Котрвега де Вриза удалось не только провести аналитическое исследование применимости солитонного решения в зависимости от параметров, но используя компактный вид и численное. Результаты подтверждены численными расчетами для одно- и двух-солитонных решений.

### Литература

1. Яненко Н.Н., Шокин Ю.И. Об аппроксимационной вязкости разностных схем // Докл. АН СССР. 1968. Т. 182, № 2. С. 280–281.
2. Яненко Н.Н., Шокин Ю.И. О корректности первых дифференциальных приближений разностных схем // Докл. АН СССР. 1968. Т. 182, № 4. С. 776–778.
3. Яненко Н.Н., Шокин Ю.И. О первом дифференциальном приближении разностных схем для гиперболических систем уравнений // Сиб. матем. журн. 1969. Т. 10. № 5. С. 1173–1187. DOI: 10.1007/BF00971662
4. Шокин Ю.И. Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука, 1979. 222 с.
5. Шокин Ю.И., Яненко Н.Н. Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1985. 364 с.
6. Блинков Ю.А., Гердт В.П., Маринов К.Б. Дискретизация квазилинейных эволюционных уравнений методами компьютерной алгебры // Программирование. 2017. № 2. С. 28-34.
7. Блинков Ю.А., Ребрина А.Ю. Исследования разностных схем для двумерных уравнений Навье–Стокса алгоритмами компьютерной алгебры // Программирование. 2023. № 1. С. 32-37.
8. Блинкова А.Ю., Малых М.Д., Севастьянов Л.А. О дифференциальных приближениях разностных схем // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21. № 4. С. 472-488. DOI: 10.18500/1816-9791-2021-21-4-472-488
9. D. J. Korteweg, G. de Vries. On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves (англ.) // Philosophical Magazine. 1895. Vol. 39. P. 422-443. DOI: 10.1080/14786449508620739
10. Полянин А. Д. Точные решения дифференциальных, интегральных, функциональных и других математических уравнений. М.: Издательство «ИПМех АН», 2023. 600 с.
11. Belashov V.Yu., Vladimirov S.V. Solitary Waves in Dispersive Complex Media: Theory, Simulation, Applications. Berlin: Springer-Verlag, 2005. 303 p.



12. Crank, J.; Nicolson, P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type. Proc. Camb. Phil. Soc. 1947. 43 (1). P. 50-67. DOI:10.1017/S0305004100023197
13. Блинков Ю.А., Евдокимова Е.В., Могилевич Л.И., Кондратов Д.В. Нелинейные волны в цилиндрической оболочке, содержащей вязкую жидкость с учетом инерции ее движения, при воздействии окружающей упругой среды и конструкционного демпфирования в продольном направлении // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2019. № 1. 14 с.
14. Блинков Ю.А., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попов Е.В. Эволюция уединенных гидроупругих волн деформации в двух коаксиальных цилиндрических оболочках с физической нелинейностью Шамеля // Вычисл. мех. сплош. сред. 2023. Т. 16. № 4. С. 430-444. DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.4.36
15. Buchberger B. Bruno Buchberger's PhD thesis 1965: An algorithm for finding the basis elements of the residue class ring of a zero dimensional polynomial ideal. Journal of Symbolic Computation. Volume 41, Issues 3–4, March–April 2006, Pages 475-511 DOI: 10.1016/j.jsc.2005.09.007
16. Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры. М.: Мир, 2000. 687 с.
17. Kolchin E. R. Differential Algebra and Algebraic. Academic Press, New York, 1973. 446 P.
18. Gerdt V.P., Robertz D. Consistency of Finite Difference Approximations for Linear PDE Systems and its Algorithmic Verification / In: S. Watt (ed.). Proceedings of ISSAC 2010 P. 53-59.
19. Gerdt V.P. Consistency Analysis of Finite Difference Approximations to PDE Systems / Mathematical Modelling in Computational Physics 2011. LNCS. Vol. 7125. 2012. P. 28-42.
20. Scala R.L. Gröbner bases and gradings for partial difference ideals // Math. Comput. 2015. No 84. P. 959-985.