

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: mathmod.esrae.ru/44-185

Ссылка для цитирования этой статьи:

Никифоров А.А., Пахомов Я.А. Никифорова О.В. Моделирование пространственного движения беспилотного воздушного судна самолётного типа // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2023. №4

УДК 629.7.05

DOI:10.24412/2541-9269-2023-4-29-38

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ БЕСПИЛОТНОГО ВОЗДУШНОГО СУДНА САМОЛЁТНОГО ТИПА

Никифоров А.А.¹, Пахомов Я.А.¹, Никифорова О.В.¹

¹Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
Россия, Саратов, nikiforovaa@sstu.ru

¹Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
Россия, Саратов, yroslav23451@gmail.com

¹Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
Россия, Саратов, nikiforovaov@sstu.ru

MODELING OF SPATIAL MOTION OF AN AIRCRAFT - TYPE UNMANNED AIRCRAFT

Nikiforov A.A.¹, Pakhomov Y.A.¹, Nikiforova O.V.¹

¹Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia,
Saratov, nikiforovaa@sstu.ru

¹Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia,
Saratov, yroslav23451@gmail.com

¹Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia,
Saratov, nikiforovaov@sstu.ru

Аннотация. Одной из задач использования беспилотных воздушных судов (БВС), является задача формирования закона движения судна на основе математических моделей. В данной статье, конкретизируются уравнения движения БВС применительно к самолетной схеме. При этом анализируя общепринятые уравнения движения самолета, приводится методика получения упрощенных уравнений БВС. На основе полученных математических моделей управления полётом БВС сформированы частные модели движения в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Ключевые слова: Беспилотные воздушные суда, беспилотные летательные аппараты, уравнения движения, математическое моделирование.

Abstract. One of the tasks of using unmanned aerial vehicles (UAVs) is the task of forming the law of vessel motion based on mathematical models. In this article, the equations of motion of a

UAV are specified in relation to an aircraft design. At the same time, analyzing the generally accepted equations of aircraft motion, a method is given for obtaining simplified equations for the aircraft. Based on the obtained mathematical models of UAV flight control, partial models of movement in two mutually perpendicular planes were formed.

Keywords: Unmanned aerial vehicles, unmanned aerial vehicles, equations of motion, mathematical modeling.

В работах [1 - 5] по динамике полета, беспилотное воздушное судно (БВС) рассматривается как абсолютно твердое тело, в пространстве с шестью степенями свободы.

Уравнения движения и вращения БВС в скоростной системе координат (СК) имеют вид:

$$m\dot{V}(t) = \sum F_x \quad (1)$$

$$mV(t)\omega_z = \sum F_y \quad (2)$$

$$mV(t)\cos\theta\omega_y = \sum F_z \quad (3)$$

$$\begin{aligned} J_x\dot{\omega}_x + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z &= M_x \\ J_y\dot{\omega}_y + (J_x - J_z)\omega_x\omega_z &= M_y \end{aligned} \quad (4)$$

$$J_z\dot{\omega}_z + (J_y - J_x)\omega_y\omega_x = M_z$$

здесь m – масса БВС; V – скорость БВС; $\dot{V}(t)$ – ускорение БВС; θ – угол наклона траектории БВС; $\sum F_i$ – суммы проекций сил, действующих на БВС по осям XYZ (соответственно); ω_i – угловые скорости вращения БВС относительно оси XYZ (соответственно); M_i – суммы проекций моментов на оси XYZ (соответственно) действующих на БВС относительно его центра масс; J_i – главные центральные моменты инерции БВС относительно осей XYZ (соответственно).

Для описания движения БВС используем следующие уравнения [4-5]:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{1}{\cos\vartheta}(\omega_y\cos\gamma - \omega_z\sin\gamma); \\ \dot{\vartheta} &= \omega_y\sin\gamma + \omega_z\sin\gamma; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\dot{\gamma} = \omega_x - tg\vartheta(\omega_y\sin\gamma - \omega_z\sin\gamma).$$

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \cos\alpha\cos\beta\sin\vartheta - (\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma)\cos\vartheta; \\ \sin\Psi\cos\theta &= \cos\alpha\cos\beta\sin\psi\cos\vartheta + \sin\alpha\cos\beta(\cos\psi\sin\gamma + \\ &\sin\psi\sin\vartheta\cos\gamma) - \sin\beta(\cos\psi\cos\gamma - \sin\psi\sin\vartheta\sin\gamma); \\ \sin\gamma\cos\theta &= \cos\alpha\sin\beta\sin\vartheta - \cos\vartheta(\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma). \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V\cos\theta\cos\Psi; \\ \dot{y} &= V\sin\theta; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\dot{z} = V\cos\theta\sin\Psi.$$

здесь ψ , ϑ , γ – углы рыскания, тангажа и крена БВС; Ψ – угол поворота траектории БВС; α , β – угол атаки и угол скольжения БВС; x , y , z – координаты БВС в системе координат земли.

Пятнадцать уравнений (1) – (7) описывают неуправляемое движение БВС в пространстве относительно осей координат земли.

Для осуществления управления полетом необходимо к уравнениям (1) – (7) добавить математическую зависимость управления силовой установкой:

$$\Delta(t) = (\delta_p(t), \delta_v(t), \delta_n(t), \delta_\alpha(t)) \quad (8)$$

здесь $\delta_p(t)$ – закон изменения положения управляющего органа силовой установки БВС; $\delta_v(t)$, $\delta_n(t)$, $\delta_\alpha(t)$ – законы отклонения рулей высоты, направления и элеронов этого БВС в момент времени t .

На рис. 1 представлено аэродинамическое управление полетом БВС самолетного типа классического вида.

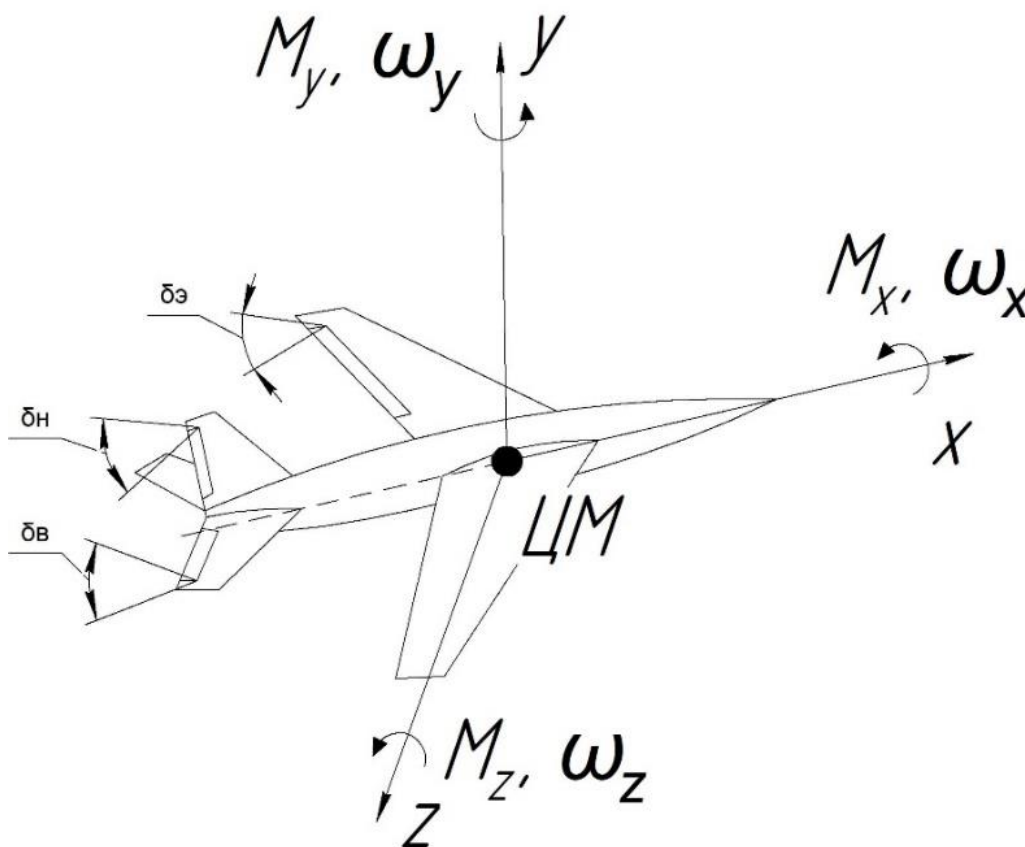


Рис. 1. Аэродинамическое управление полетом БВС самолетного типа классического вида.

Угол отклонение руля высоты – δ_v ; угол отклонение руля направления – δ_n ; угол отклонение элеронов – δ_α .

Предлагаемые выше модели (1) - (7) для решения являются весьма трудоемкими и непригодными для оперативного программирования полетов БВС. Проведем упрощение предложенной модели.

Как было сказано выше, воздушное судно рассматриваем, как материальную точку, (1) - (3) и (7) уравнения её движения. Введём допущения, для упрощения расчетов.

При натурном полете отклонения рулей $\delta_v \neq 0$, $\delta_\alpha \neq 0$, $\delta_n \neq 0$, углы α , β и γ в результате колебаний БВС устанавливаются не сразу, а через интервал

времени, называемый временем переходных процессов БВС по каналам тангажа, рыскания и крена.

Для эффективного управления воздушным судном - время реагирования должно стремиться к нулю или быть несоизмеримо мало, тогда, можно сказать, что углы α , β и γ мгновенно устанавливаются.

Данное допущение можно сделать для идеальной системы управления, что позволяет считать судно безынерционным вращающимся объектом. Тогда:

$$J_x = J_y = J_z = 0$$

Следовательно уравнение (4) примет вид:

$$M_x = M_y = M_z = 0 \quad (9)$$

Приравняем угловые скорости $\omega_z = \dot{\theta}$ и $\omega_y = \dot{\psi}$ получим:

$$\begin{aligned} m\dot{V}(t) &= \sum F_x \\ mV(t)\dot{\theta} &= \sum F_y \\ mV(t)\cos\theta\dot{\psi} &= \sum F_z \end{aligned} \quad (10)$$

Силы действуют на БВС во время полета: сила тяжести, сила тяги, лобовое сопротивление, подъемная сила, боковая сила (рис. 2):

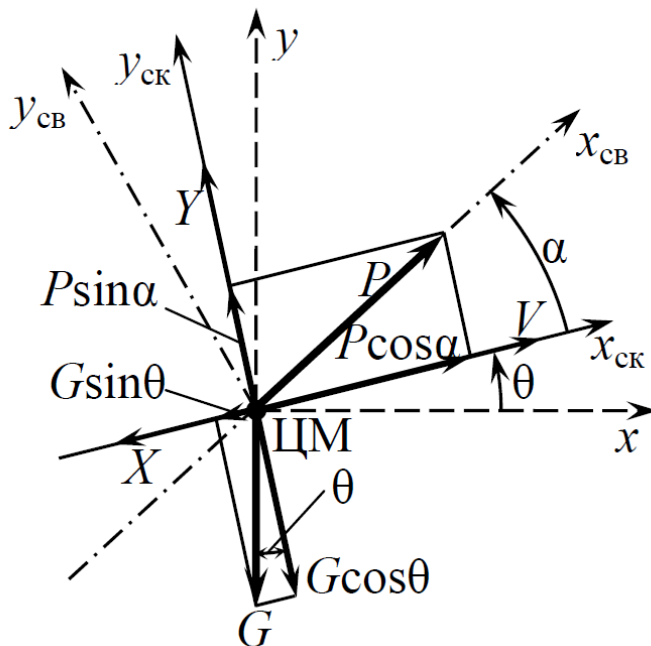


Рис. 2. Действующие силы на БВС в полёте

Проекций сил на ось Ox имеет вид:

$$\sum F_x = P\cos\alpha - X - G\sin\theta \quad (11)$$

Проекций сил на ось Oy имеет вид:

$$\sum F_y = P\sin\alpha + Y - G\cos\theta \quad (12)$$

Изобразим силы, действующие на БВС в проекции на плоскости xOz и yOz рисунок 3.

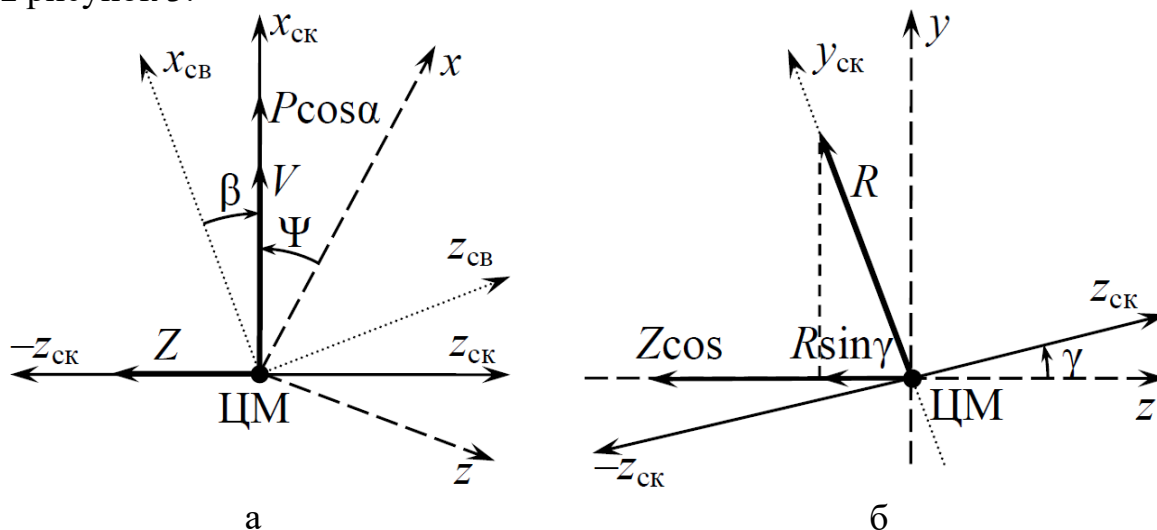


Рис. 3. Проекция сил на плоскости xOz и yOz

Определим равнодействующей всех сил:

$$R = Y + P \sin \alpha$$

Поворот вектора скорости $V(t)$ на угол Ψ в этом случае будет происходить под действием силы:

$$Z^* = (Y + P \sin \alpha) \sin \gamma + Z \cos \gamma$$

В связи с тем, что при крене БВС возникает скольжение угол β , имеем:

$$\sum F_z = (P \sin \alpha + Y) \sin \gamma + (-P \cos \alpha \sin \beta + Z) \cos \gamma \quad (13)$$

Таким образом, уравнения (10) после подстановки выражений (11)-(13) примут вид:

$$\begin{aligned} m\dot{V}(t) &= P \cos \alpha \cos \beta - X - mg \sin \theta \\ mV(t)\dot{\theta} &= (P \sin \alpha + Y) \cos \gamma - (Z - P \cos \alpha \sin \beta) \sin \gamma - mg \cos \theta \\ mV(t) \cos \theta \dot{\Psi} &= (P \sin \alpha + Y) \sin \gamma + (Z - P \cos \alpha \sin \beta) \cos \gamma \end{aligned} \quad (14)$$

Углы α и β , которые входят в эти уравнения, обычно не превышают 20° , тогда $\sin 20^\circ = 0,342$, $\cos 20^\circ = 0,940$, можно считать $\sin \alpha \approx \alpha$; $\sin \beta \approx \beta$, с ошибкой, не превышающей 2%. Тогда замена $\cos \alpha \approx 1$; $\cos \beta \approx 1$ даст ошибку не более 6%, тогда [3]:

$$\begin{aligned} m\dot{V}(t) &= P - X - mg \sin \theta \\ mV(t)\dot{\theta} &= (P \alpha + Y) \cos \gamma - (Z - P \beta) \sin \gamma - mg \cos \theta \\ mV(t) \cos \theta \dot{\Psi} &= (P \alpha + Y) \sin \gamma + (Z - P \beta) \cos \gamma \end{aligned}$$

Или в виде дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \frac{P - X}{m} - g \sin \theta, \quad t \in [t_0, t_k] \\ \dot{\theta} &= \frac{(P \alpha + Y) \cos \gamma - (Z - P \beta) \sin \gamma}{mV} - \frac{g}{V} \cos \theta \end{aligned} \quad (15)$$

$$\dot{\psi} = \frac{(P\alpha + Y)\sin\gamma + (Z - P\beta)\cos\gamma}{mV\cos\theta}$$

Для данной математической модели удобно использовать вектор $u(t) = (P(t), \alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$.

Дальнейшее упрощения можно осуществить если принять, что плоский разворот при угле крена $\gamma = 0$, тогда уравнения (15) примут вид:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= \frac{P - X}{m} - g\sin\theta, & t \in [t_0, t_k] \\ \dot{\theta} &= \frac{P(\alpha + \varphi_{дв}) + Y}{mV} - \frac{g}{V}\cos\theta \\ \dot{\psi} &= \frac{Z - P\beta}{mV\cos\theta}\end{aligned}\quad (16)$$

Тогда вектор косвенного управления для уравнения (16) $u(t) = (P(t), \alpha(t), \beta(t))$.

В модель введен угол $\varphi_{дв}$ установки двигателя, это углу между осью установки двигателя и базовой осью БВС. Значение этого угла выбирается при проектировании летательного аппарата с целью обеспечения его продольной устойчивости.

Угол $\varphi_{дв}$ должен быть введен во второе и третье уравнения системы (15), и в динамические уравнения (15) и (16) должны быть добавлены кинематические уравнения вида (7) для получения полных моделей движения БВС [6].

На практике наибольшее распространение получил второй способ бокового маневрирования. Боковая сила возникает при угле крена $\gamma \neq 0$, тогда считается, что $\beta = 0$ и $Z = 0$. Приняв это допущение, получим упрощённые уравнения (7) и (15) в интервале времени $[t_0, t_k]$, которая будет использована как база при формировании закона управления БВС:

$$\dot{V}(t) = \frac{P - X}{m} - g\sin\theta, \quad t \in [t_0, t_k] \quad (17)$$

$$\dot{\theta} = \frac{(P(\alpha + \varphi_{дв}) + Y)\cos\gamma}{mV} - \frac{g}{V}\cos\theta \quad (18)$$

$$\dot{\psi} = \frac{(P(\alpha + \varphi_{дв}) + Y)\sin\gamma}{mV\cos\theta} \quad (19)$$

$$\dot{x} = V\cos\theta\cos\psi; \quad (20)$$

$$\dot{y} = V\sin\theta; \quad (21)$$

$$\dot{z} = V\cos\theta\sin\psi. \quad (22)$$

Начальные условия для уравнений (7), (15), (16):

$$V(t_0) = V_0; \theta(t_0) = \theta_0; \psi(t_0) = \psi_0; \quad (23)$$

$$x(t_0) = x_0; y(t_0) = y_0; z(t_0) = z_0 \quad (24)$$

Уравнения (17) - (22) включает в себя девять неизвестных функций в шести уравнениях: $V(t)$, $\theta(t)$, $\psi(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $P(t)$, $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$.

Полёт БВС по заданной траектории будет выполняться при выполнении заданного закона управления тягой $P = P(t)$, углом атаки $\alpha = \alpha(t)$, углом крена $\gamma = \gamma(t)$.

Эти законы должны находиться в правой части уравнений (17) - (19), тогда система уравнений может быть проинтегрирована при начальных условиях (23), (24).

Решение (17) - (24) при заданном векторе косвенного управления $u(t) = (P(t), \alpha(t), \gamma(t))$, удовлетворяющего соответствующим ограничениям, сводится к решению задачи Коши

Запишем уравнения (17) - (19) в перегрузках, действующих на БВС. Вектора перегрузки БВС $n = (n_x, n_y, n_z)$ можно представить как:

$$\begin{aligned}n_x &= \frac{P - X}{mg} \\n_y &= \frac{P(\alpha + \varphi_{дв}) + Y}{mg} \\n_z &= \frac{Z - P\beta}{mg}\end{aligned}\quad (25)$$

Тогда уравнения (14) в безразмерной форме примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= (n_x - \sin\Theta)g \\ \dot{\Theta} &= \frac{(n_y \cos\gamma - n_z \sin\gamma - \cos\Theta)g}{V} \\ \dot{\Psi} &= \frac{(n_y \sin\gamma + n_z \cos\gamma)g}{V \cos\Theta}\end{aligned}\quad (26)$$

Уравнение (16) с учетом (25) примет вид:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= (n_x - \sin\Theta)g \\ \dot{\Theta} &= \frac{(n_y - \cos\Theta)g}{V} \\ \dot{\Psi} &= \frac{n_z g}{V \cos\Theta}\end{aligned}\quad (27)$$

Тогда (17) - (19) в перегрузках:

$$\dot{V} = (n_x - \sin\Theta)g \quad (28)$$

$$\dot{\Theta} = (n_y \cos\gamma - \cos\Theta) \frac{g}{V} \quad (29)$$

$$\dot{\Psi} = \frac{gn_y \sin\gamma}{V \cos\Theta} \quad (30)$$

Аэродинамические силы X , Y , и Z , входящие в уравнения (15) - (19), представляются в динамике полета БВС следующими выражениями:

$$\begin{aligned}X &= 0.5c_x q(y) V^2 S; \\ Y &= 0.5c_y q(y) V^2 S; \\ Z &= 0.5c_z q(y) V^2 S;\end{aligned}\quad (31)$$

здесь c_x , c_y , c_z – коэффициенты лобового сопротивления; $q(y)$ – плотность воздуха на определенной высоте, V – скорость полета, S площадь крыла воздушного судна.

Уравнения (31) для расчета сил X , Y и Z не учитывают сжимаемость воздуха и силы трения на корпусе воздушного судна. Данные допущения приемлемы для решения траекторных задач динамики полета наиболее распространенных на практике дозвуковых БВС.

Конкретизируем вид зависимостей $c_x = c_x(\alpha, V)$, $c_y = c_y(\alpha, V)$ и $c_z = c_z(\beta)$, входящих в выражения (31).

Представим коэффициент подъемной силы БВС:

$$c_y = c_y^\alpha (\alpha - \alpha_0) \quad (32)$$

здесь c_y^α – производная c_y по углу атаки α ; $\alpha_0 < 0$ – демпфирующее значение угла атаки.

При использовании конкретного значения угла α_0 следует:

$$c_y = c_y^\alpha \alpha + c_y^\alpha \alpha_0 \quad (33)$$

здесь значение c_{y0} коэффициента c_y при $\alpha = 0$ определяется как:

$$c_{y0} = c_y^\alpha \alpha_0 \quad (34)$$

Из экспериментальных результатов в аэротрубе получена зависимость производной c_y^α от значения Маха (M):

$$(M_i c_{yi}^\alpha), i = (\overline{1, k}).$$

Аппроксимируя эти данные получаем:

$$c_y^\alpha(M) = d_0 + d_1 M; \quad (35)$$

Тогда уравнения (33) и (34) будут:

$$\begin{aligned} c_y(\alpha, M) &= (d_0 + d_1 M)(\alpha + \alpha_0) \\ c_{y0}(M) &= \alpha_0(d_0 + d_1 M) = b_0 + b_1 M \end{aligned} \quad (36)$$

Коэффициент лобового сопротивления БВС:

$$c_x = c_{x0} + A c_y^2 \quad (37)$$

здесь c_{x0} – значение этого коэффициента при нулевой подъемной силе; A – коэффициент, зависящий от геометрических характеристик крыла БЛА [7-9].

Экспериментальные значения зависимости $c_{x0}(M)$, полученные из графиков поляры БВС при $c_y = 0$ и различных значениях числа M имеют вид следующего массива значений:

$$(M_j, c_{x0j}), \quad j = (\overline{1, r}).$$

Линейная аппроксимация этих данных записывается как:

$$c_{x0}(M) = c_0 + c_1 M$$

здесь c_0 , c_1 – коэффициенты аппроксимации, определяемые указанным выше методом.

Коэффициент A найдём:

$$A = \frac{1}{\pi \lambda_{эф}}, \quad (38)$$

здесь $\lambda_{эф}$ – эффективное удлинение крыла БЛА определяется выражением вида:

$$\lambda_{\text{эф}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\pi\lambda}{100\cos^2\chi}\right)}, \quad (39)$$

здесь χ – угол стреловидности крыла; λ – геометрическое удлинение крыла БЛА, вычисляется как:

$$\lambda = \frac{l}{b_A}, \quad (40)$$

здесь b_A – средняя аэродинамическая хорда крыла; l – размах крыльев БВС.

Тогда, выражение (37) примет вид:

$$c_x(\alpha, M) = (c_0 + c_1M) + A(d_0 + d_1M)^2(\alpha + \alpha_0)^2$$

Представим зависимости $c_x(\alpha, M)$ и $c_y(\alpha, M)$ как функции скорости полета V . Известно, что $M = V/a$, где $a = a(y)$ – скорость звука на высоте y .

Тогда выражения для c_y и c_x , которые используются для конкретизации зависимостей (31), примут следующий вид:

$$c_y(\alpha, V) = c_{y0}(V) + c_y^\alpha(V)\alpha = \left(b_0 + \frac{b_1}{a}V\right) + \left(d_0 + \frac{d_1}{a}V\right)\alpha \quad (41)$$

$$c_x(\alpha, V) = \left(c_0 + \frac{c_1}{a}V\right) + \left(d_0 + \frac{d_1}{a}V\right)^2 (\alpha + \alpha_0)^2$$

Если маршрут БВС выполняется с большим перепадом высот, в (41) необходимо ввести зависимость скорости звука от высоты $a = a(y)$ [10].

Для использования выражений (31) представим (41) в компактной записи:

$$c_y(\alpha, V) = B(V, a) + D(V, a)\alpha \quad (42)$$

$$c_x(\alpha, V) = E(V, a) + K(V, a)(\alpha + \alpha_0)^2 \quad (43)$$

Тогда значения примут вид:

$$B(V, a) = b_0 + \frac{b_1}{a}V; D(V, a) = d_0 + \frac{d_1}{a}V \quad (44)$$

$$E(V, a) = c_0 + \frac{c_1}{a}V; K(V, a) = AD^2(V, a)$$

здесь $b_0, b_1, c_0, c_1, d_0, d_1$ – экспериментальные коэффициенты.

Коэффициент c_z , входящий в выражения (31), определяется:

$$c_z = c_z^\beta \beta, \quad (45)$$

здесь c_z^β – производная по углу скольжения β , определяемая экспериментально.

Полученные зависимости были проверены на реальных примерах, которые показали положительные результаты.

Литература

1. Моисеев В.С. Прикладная теория управления беспилотными летательными аппаратами: монография. Казань: Республиканский центр мониторинга качества образования, 2013. 768 с.
2. Моисеев В.С. Основы теории эффективного применения беспилотных летательных аппаратов: монография. Казань: РИЦ «Школа», 2015. 444 с. (Серия «Современная прикладная математика и информатика»).

3. Моисеев В.С. Групповое применение беспилотных летательных аппаратов: монография. – Казань: Редакционно-издательский центр «Школа», 2017. 572 с. (Серия «Современная прикладная математика и информатика»).
4. Плотников П.К., Никифоров А.А., Захаров Ю.А., Здражевский Р.А. Измерение моментов возмущающих сил в летательном аппарате с комбинированными системами управления // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2021. – № 10. – С. 73-79.
5. Патент № 2786133 С1 Российская Федерация, МПК G05D 1/08, G01C 21/00, B64C 13/00. Измеритель внешних возмущающих сил и моментов этих сил, действующих на фюзеляж одновинтового вертолета: № 2022122044: заявл. 12.08.2022 : опубл. 19.12.2022 / Ю.А. Захаров, Р.А. Здражевский, А.А. Никифоров; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.".
6. Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1973. 616 с.
7. Моисеев Г.В. Экстремальное проектирование беспилотных авиационных комплексов // Проблемы и перспективы развития авиации, наземного транспорта и энергетики: VIII Международная научно-техническая конференция (АНТЭ-2015): сборник докладов. – Казань: Изд-во «Бриг», 2015. С. 46-51.
8. Лемешонок Т.Ю. Математические модели динамики движения летательных аппаратов: учебное пособие; Балт. гос. техн. ун-т. – СПб., 2020. – 122 с. ISBN 978-5-907324-08-4
9. Ermakov R. V., Nikiforov A. A., Balaban O. M. A method for determining the frequency of a helicopter main rotor // Системный синтез и прикладная синергетика : сборник научных работ X Всероссийской научной конференции, пос. Нижний Архыз, 28 сентября – 02 2021 года. – Ростов-на-Дону, Таганрог: Южный федеральный университет, 2021. – С. 237-241.
10. Пахомов, Я. А., Никифоров А. А. Алгоритм повышения точности функционирования систем беспилотных летательных аппаратов // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2022. – № 3. – С. 3-6.