

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: mathmod.esrae.ru/45-189

Ссылка для цитирования этой статьи:

Никифоров А.А., Аскарлова А.Х., Ремизов М.Р., Янчук А.В., Дурейкин Д.Б. Измерение постоянного сигнала в шуме по дискретным отсчетам в случайные моменты времени // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2024. № 1

УДК 621.391, 621.391.82

DOI:10.24412/2541-9269-2024-1-33-44

ИЗМЕРЕНИЕ ПОСТОЯННОГО СИГНАЛА В ШУМЕ ПО ДИСКРЕТНЫМ ОТСЧЕТАМ В СЛУЧАЙНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

Никифоров А.А., Аскарлова А.Х., Ремизов М.Р., Янчук А.В., Дурейкин Д.Б.
Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
Россия, Саратов, ieei_director@mail.ru

MEASUREMENT OF A CONSTANT SIGNAL IN NOISE USING DISCRETE SAMPLING AT RANDOM TIME MOMENTS

A.A. Nikiforov, A.Kh. Askarova, M.R. Remizov, A.V. Janjuk, D.B. Dureykin
Yuri Gagarin State Technical University of Saratov,
Russia, Saratov, ieei_director@mail.ru

Аннотация. Работа представляет использование случайной выборки для восстановления постоянного сигнала на фоне шумов. Предложенный метод позволяет отказаться от использования сглаживающих фильтров, даже если частоты возмущений выше, чем максимальная частота дискретизации отсчетов сигнала. Демонстрируется использование фильтров случайной выборки и скользящего среднего для измерения сигналов постоянного тока теоретически и экспериментально.

Ключевые слова: Преобразование аналогового сигнала в цифровой, сбор данных, измерение постоянного тока, случайная выборка, обработка сигнала.

Abstract. This paper introduces the use of random sampling for the recovery of dc signals immersed in noise. This technique avoids the use of antialiasing filters even if the disturbance frequencies are higher than the maximum sampling frequency available. The use of random sampling and a moving average filter for the measurement of dc signals is mathematically and experimentally demonstrated.

Keywords: A/D acquisition, DC measurement, random sampling, signal processing.

Введение

Измерения постоянной составляющей тока на фоне случайных возмущений можно проводить, как с помощью аналоговой, так и цифровой обработки. Когда используется цифровая обработка, измеряемый сигнал должен быть дис-

кретизирован с частотой, превышающей удвоенную максимальную частоту входного сигнала (теорема В.А. Котельникова) [1]. В некоторых случаях система сбора данных не в состоянии выполнить это требование. Например, если один и тот же аналого-цифровой преобразователь (АЦП) получает множество сигналов из мультиплексированных каналов. В этих случаях требуется громоздкий и дорогой низкочастотный сглаживающий фильтр на каждый вход, чтобы избежать наложения спектров. При этом если использовать только один фильтр на выходе мультиплексора, то это приводит к неприемлемым временам переходных процессов при переключении каналов, даже для системы сбора данных с низким разрешением.

Отказ от использования сглаживающих фильтров приводит к систематическим погрешностям в измерениях. Это происходит потому, что информацию, полученную в результате обработки выборки, выполненной в равноотстоящие моменты времени, можно ошибочно интерпретировать как постоянную составляющую обрабатываемого сигнала. Более того, низкочастотные искажения сильнее заметны, когда частота дискретизации близка к частоте любой гармоники помехового сигнала. Помимо этого, ошибки тем больше, чем выше корреляция между мешающим сигналом и полученными дискретными отсчетами. По этой причине имеет смысл рассмотреть возможность использования случайной выборки вместо равноотстоящих по оси времени дискретных отсчетов. Цель случайной выборки — уменьшить или даже устранить корреляцию между помехой и отсчетами сигнала.

Проблема неравномерной выборки уже рассматривалась в [2, 3]. В этих работах проанализировано ее возможное применение для оценки спектральных функций. Авторы [4] применили стратегию случайной выборки и связанный с ней алгоритм фильтрации для эффективной реализации широкополосных измерительных приборов, основанных на нелинейном преобразовании сигнала. В последнее время случайная выборка используется для измерения спектральных функций [5, 6]. Авторы работ [7, 8] использовали этот прием для анализа искажений, вызванных случайным джиттером, который возникает в системах, использующих выборки в равноотстоящие моменты времени.

1. Математическая постановка задачи

Пусть необходимо измерить постоянную составляющую сигнала неизвестной амплитуды A . Будем предполагать, что помеховый сигнал, на фоне которого наблюдается полезный и который необходимо устранить, имеет чисто синусоидальный характер. Например, импульсивные возмущения предполагают наличие сигналов вида:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \cos(k2\pi ft).$$

Помимо этого считается, что помеховый синусоидальный сигнал имеет следующие параметры: 1) частота сигнала f неизвестна; 2) фаза ϕ — случайная

величина, равномерно распределенная на интервале от $-\pi$ до π ; 3) амплитуда помехового сигнала B .

Тогда входной сигнал имеет следующий вид:

$$x(t) = A + B \cos(2\pi ft + \phi).$$

Кроме того, предполагается, что выборка из непрерывного сигнала $x(t)$ производится в случайные моменты времени (далее будем называть ее «случайная выборка») с помощью идеальной функции выборки $\delta(t)$ (состоящей из последовательности δ -функций Дирака и схематично показанной на рис. 1). Интервал времени между двумя последовательными отсчетами выборки (переменный интервал дискретизации) равен T_i :

$$T_i = T_{A/D} + \tau_i \quad (1)$$

где $T_{A/D}$ — минимальный интервал дискретизации, определяемый возможностями используемой системы сбора данных (это обусловлено технологическими факторами, обычно, временем измерения). τ_i — случайные интервалы времени равномерно распределенные по закону:

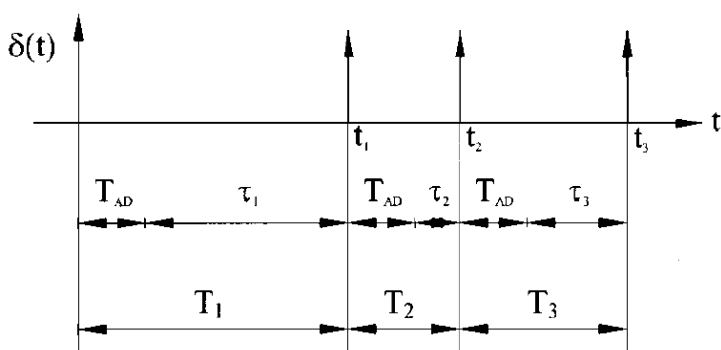


Рис. 1. Используемая функция взятия выборки

$$f(\tau_i) = \begin{cases} 1/T_S, & 0 < \tau_i < T_S; \\ 0, & \tau_i \notin (0, T_S), \end{cases}$$

где T_S — максимально возможное значение τ_i .

Значение T_S устанавливает корреляцию между выборкой и входными сигналами. Если T_S равно нулю, период снятия выборки постоянен, и возникает корреляция между функцией

выборки и теми входными помеховыми сигналами, частоты которых кратны $1/T_{A/D}$. Поэтому, T_S следует выбирать достаточно большим, чтобы гарантировать низкую степень корреляции между функцией выборки и любым входным сигналом.

Если в качестве функции преобразования входного сигнала μ_n взять фильтр скользящего среднего (ФСС) [9], то оценка значения постоянного тока \hat{A} может быть представлена как:

$$\hat{A} = \mu_n = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n x_m = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n x(t_m), \quad (2)$$

где x_m — мгновенное значение входного сигнала в момент t_m взятия отсчета выборки, а n — число отсчетов в ФСС. Выражение для значений x_m можно записать в следующем виде:

$$x_m = A + B \cos\left(2\pi f \sum_{i=1}^m T_i + \phi\right). \quad (3)$$

Нетрудно заметить, что выражение (3) зависит от $m+1$ случайных величин: начальной фазы ϕ и интервалов взятия отсчетов T_i , для $i=1, 2, \dots, m$. Из соотношений (2) и (3) имеем:

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \left[A + B \cos \left(2\pi f \sum_{i=1}^m T_i + \phi \right) \right]. \quad (4)$$

Для исследования качества полученной оценки \hat{A} (смещенности и эффективности в статистическом смысле) надо рассчитать ее первый момент распределения $M_1[\mu_n]$. Как известно, этот момент от функции нескольких случайных переменных [10, 11] можно представить в следующем виде:

$$M_1[\mu_n] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \mu_n W_{n+1}(\phi, T_1, \dots, T_n) d\phi dT_1 \dots dT_n, \quad (5)$$

где $W_{n+1}(\phi, T_1, \dots, T_n)$ — совместная плотность распределения вероятности величин $(\phi, T_1, \dots, T_n; T_1, \dots, T_n$ — периоды n последовательно взятых отсчетов в окне фильтра.

Случайные переменные ϕ, T_1, \dots, T_n являются статистически независимыми. Следовательно, совместная плотность распределения вероятностей примет вид [10, 11]:

$$W_{n+1}(\phi, T_1, \dots, T_n) = W_1(\phi) W_1(T_1) \dots W_1(T_n). \quad (6)$$

Так как все случайные параметры в (6) распределены равномерно на соответствующих интервалах, то последнее выражение можно переписать в виде:

$$W_{n+1}(\phi, T_1, \dots, T_n) = W_1(\phi) \cdot \prod_{i=1}^n W_1(T_i) = \frac{1}{2\pi T_S^n}. \quad (7)$$

В выражении (7) учтено, что $-\pi \leq \phi \leq \pi$ и $T_{A/D} < T_1, \dots, T_n < T_{A/D} + T_S$.

Подставляя (4), (7) и (1) в (5), имеем:

$$\begin{aligned} M_1[\mu_n] &= A + \frac{B}{n2\pi T_S^n} \int_{T_{A/D}}^{T_{A/D}+T_S} \dots \int_{T_{A/D}}^{T_{A/D}+T_S} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \left(2\pi f \sum_{i=1}^m T_i + \phi \right) d\phi dT_1 \dots dT_n = \\ &= A + \frac{B}{n2\pi T_S^n} \int_0^{T_S} \dots \int_{0-\pi}^{T_S \pi} \cos \left(2\pi f \sum_{i=1}^m (T_{A/D} + \tau_i) + \phi \right) d\phi d\tau_1 \dots d\tau_n = A. \end{aligned}$$

Из последнего равенства следует, что оценка параметра \hat{A} , задаваемая выражением (2), является несмещенной; более того, она не зависит от параметров n, T_S и $T_{A/D}$. Поэтому равномерная выборка ($T_S = 0$) и случайная выборка дают несмещенные значения оценок параметра A .

Теперь проведем исследование эффективности оценки (2) и сравним ее с эффективностью равномерной выборки. Для этого необходимо вычислить дисперсию этой оценки, которая, как известно [11], рассчитывается из соотношения:

$$\sigma_{\mu}^2 = M_2[\mu_n^2] - (M_1[\mu_n])^2, \quad (8)$$

где $M_2[\mu_n^2]$ — момент второго порядка. В (8) учтено, что математическое ожидание величины μ_n совпадает с ее первым начальным моментом $M_1[\mu_n]$. Как известно [10, 11], значение $M_2[\mu_n^2]$ определяется из соотношения:

$$M_2[\mu_n^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \mu_n^2 \cdot W_{n+1}(\phi, T_1, \dots, T_n) d\phi dT_1 \cdots dT_n$$

Подставляя в последнее выражение значение μ_n из (4) и (7), получаем:

$$M_2[\mu_n^2] = \frac{1}{n^2 2\pi T_S^n} \int_0^{T_S} \cdots \int_0^{T_S} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ nA + B \sum_{m=1}^n \cos \left(2\pi f \sum_{i=1}^m (T_{A/D} + \tau_i) + \phi \right) \right\}^2 d\phi d\tau_1 \cdots d\tau_n,$$

и после интегрирования окончательно:

$$M_2[\mu_n^2] = A^2 + \frac{B^2}{n} + \frac{B^2}{n^2} \sum_{m=1}^{n-1} (n-m) \cos \left[2\pi f \sum_{i=1}^m \left(T_{A/D} + \frac{T_S}{2} \right) \right] \frac{\sin^m(fT_S)}{(fT_S)^m}.$$

Тогда дисперсия из (8) будет:

$$\sigma_{\mu}^2 = M_2[\mu_n^2] - (M_1[\mu_n])^2 = \frac{B^2}{n} \left\{ 1 + \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n-1} (n-m) \cos \left[2\pi f \sum_{i=1}^m \left(T_{A/D} + \frac{T_S}{2} \right) \right] \frac{\sin^m(fT_S)}{(fT_S)^m} \right\}. \quad (9)$$

Из выражения (9) следует, что дисперсия величины μ_n зависит от амплитуды помехового сигнала B , числа отсчетов, усредняемых в ФСС, частоты синусоидальных колебаний, и значений периодов времени T_S и $T_{A/D}$. Для удобства рассмотрения нормализуем дисперсию (9) к дисперсии помехового сигнала $B^2/2$ [12, 13]:

$$\sigma_{\mu N}^2 = \frac{2}{n} \left\{ 1 + \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n-1} (n-m) \cos \left[2\pi f \sum_{i=1}^m \left(T_{A/D} + \frac{T_S}{2} \right) \right] \frac{\sin^m(fT_S)}{(fT_S)^m} \right\}. \quad (10)$$

На рис. 2 показана нормализованная дисперсия $\sigma_{\mu N}^2$ (10) (сплошные линии) как функция частоты f для двух значений параметра n у ФСС. Нормализованная дисперсия (10) имеет локальные минимумы примерно при одних и тех же значениях частоты помехового сигнала. Для обоих значений параметра n дисперсия (10) имеет минимальное значение приблизительно в точке $f = [2(T_S + 2T_{A/D})]^{-1}$.

Интересно, что с увеличением частоты рассматриваемая дисперсия оценки приближается к постоянной величине, равной дисперсии помехового сигнала, деленной на число отсчетов, используемых в ФСС. Этот результат получается таким же, как и в случае действия возмущения в виде нормального белого шума при равномерной дискретизации по времени [14]. Следовательно, предлагаемый метод дает возможность оценки значения постоянного тока A , поскольку он позволяет снижать влияние помехового сигнала любой частоты.

Интервал неопределенности измерения может быть установлен в зависимости от величины дисперсии. Если предположить, что в силу центральной предельной теоремы оценка (2) имеет нормальную плотность распределения вероятности [11], то можно считать с доверительной вероятностью, примерно равной

0,95 что пределы ошибки будут $\pm 2\sigma_{\mu N}$ [15]. Увеличивая параметр n у ФСС этот интервал неопределенности можно уменьшить до требуемой величины.

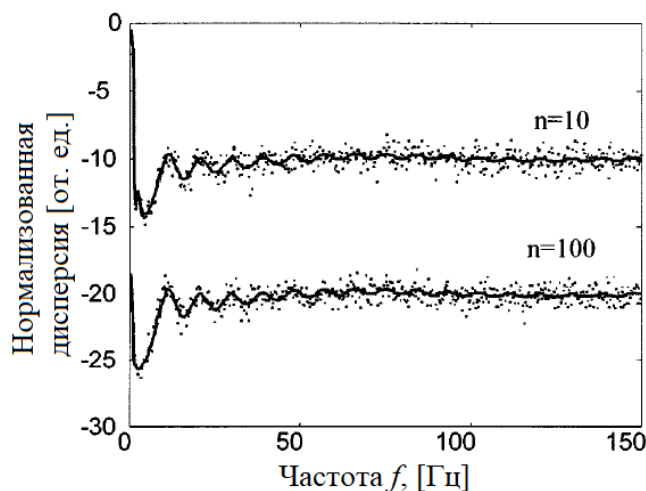


Рис. 2. График зависимости нормализованной дисперсии $\sigma_{\mu N}^2$ от частоты f : Сплошные линии — результаты расчета из выражения (10); точки — экспериментально измеренные дисперсии

При условии взятия случайной выборки корреляция между возмущением и функцией выборки $\delta(t)$ по-прежнему существует и зависит от отношения T_S/T_{AD} . Чем меньше это отношение, тем ближе дискретизация к случаю равномерной выборки. Это проиллюстрировано на рис. 3. Он демонстрирует нормализованную дисперсию в дБ как функцию частоты при параметре ФСС $n = 10$ и $T_{AD} = 10$ мс, для трех отношений периодов T_S/T_{AD} .

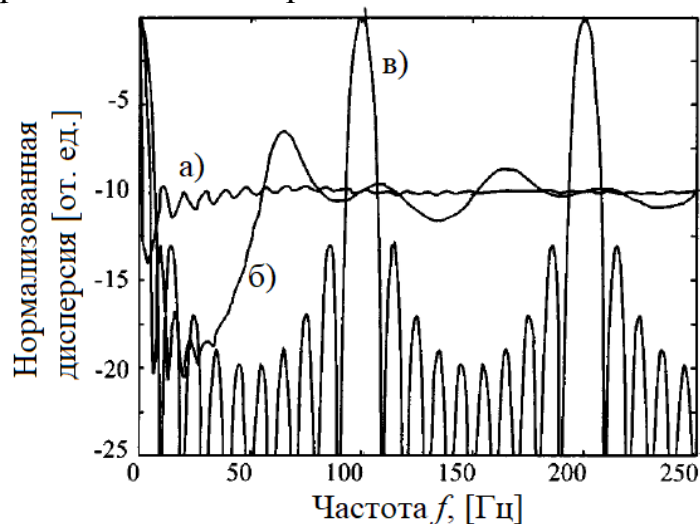


Рис. 3. График зависимости нормализованной дисперсии $\sigma_{\mu N}^2$ от частоты f для $n = 10$: а) $T_S/T_{AD} = 10$; б) $T_S/T_{AD} = 1$; в) $T_S/T_{AD} = 0$.

Случай в), когда $T_S/T_{AD} = 0$, соответствует равномерной дискретизации по времени. Из рисунка видно в среднем по всему частотному диапазону оценка постоянной составляющей сигнала A методом ФСС с равномерной дискретизацией более эффективна, чем при случайной выборке. Однако на некоторых частотах (когда частота дискретизации кратна частоте помехового сигнала) дисперсия оценки при равномерной выборке существенно превышает дисперсию оценки

для случайной. На этих частотах влияние помех при равномерной дискретизации вызывает большие погрешности оценивания. Работа посвящена именно устранению этих эффектов, для чего и разработан предлагаемый метод.

2. Проверка метода

Проверка метода была проведена, чтобы подтвердить теоретические результаты. Числовые эксперименты были выполнены с использованием Matlab. Каждый эксперимент состоял из набора μ_{ni} , где $i = 1, 2, \dots, 100$, являющихся выходными сигналами фильтра скользящего среднего. На входе фильтра скользящего среднего был синусоидальный сигнал постоянной частоты f и случайной фазы ϕ_i . Этот сигнал был измерен десять раз ($n = 10$) случайным образом, со снятием выборки интервалов, полученных в (1), $T_S = 100$ мс и $T_{A/D} = 10$ мс. Каждый μ_{ni} был получен из (5), где x_k — измеренное значение входа в t_k момент.

Дисперсия μ_n по набору из $100\mu_{ni}$ определяется как:

$$T_\mu^2 = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (\mu_{ni} - E[\mu_n])^2 \quad (11)$$

где $E[\mu_n]$ — среднее значение величины μ_{ni} .

Триста экспериментов было сделано для $n = 10$, охватывая частоты от 0 до 150 Гц с шагом 1/2 Гц, и еще 300 были сделаны для $n = 100$. Рис. 2 показывает результаты этих экспериментов. Зависимость нормализованной разницы от частоты представлена точками, в то время как теоретическое следствие (20) представлено сплошной линией. Можно заметить, что числовые и теоретические результаты расположены очень близко. Худший случай - эксперимент, выполненный около 35 Гц с отклонением -4 дБ от аналитического выражения. Согласно аналитическому выражению, моделирование определяет диапазон между 1 и 3 Гц, в котором имеется приближенное значение $[2(T_S + 2T_{A/D})]^{-1}$, выведенное из (10).

Важная характеристика дисперсии может быть получена на рис. 2. Дисперсия уменьшается и достигает величины насыщения, которая чувствительна к числу отсчетов n . Чем выше число отсчетов, тем ниже величина насыщения.

Результаты рис. 2 указывают, что сигнал постоянного тока, помещенного в синусоидальный шум, частота которого выше, чем максимально допустимая частота дискретизации, может быть легко измерен с использованием случайной выборки и ФСС. Ослабление переменного тока, нарушающего сигнал, обратно пропорционально числу выборок в фильтре скользящего среднего. Для $n = 10$, дисперсия обработанного помехового сигнала составляет 10 % от входной дисперсии сигнала переменного тока. В терминах мощности, ослабление равно 10 дБ для $n = 10$ и 20 дБ для $n = 100$. Если используется равномерная выборка, ослабление будет порядка 0 дБ на частотах, кратных частоте дискретизации выборки (рис. 3).

3. Результаты экспериментов

Для экспериментальной проверки теоретических результатов использовался цифровой сигнальный процессор (ЦСП) без сглаживающего фильтра, собранный на измерительной плате. Система была сконфигурирована с параметрами $T_S = 100$ мс и $T_{A/D} = 10$ мс. Был получен входной сигнал, который состоял из сигнала постоянного тока $A = 2$ В и пика сигнала переменного тока с частотой $f = 101$ Гц и амплитудой $B = 2$ В. Входной сигнал сглаживался с помощью ФСС, реализованного в ЦСП. Выходные значения были преобразованы в аналоговые, чтобы рассматривать их, используя осциллограф.

На рис. 4 приведен входной сигнал, который впоследствии обрабатывался с помощью ФСС для случая дискретизации входного сигнала путем взятия отсчетов в равноотстоящие моменты времени (равномерная выборка). Можно видеть синусоидальный сигнал с частотой 101 Гц, амплитудой 2 В и постоянной составляющей 2 В, которая является «полезным сигналом».

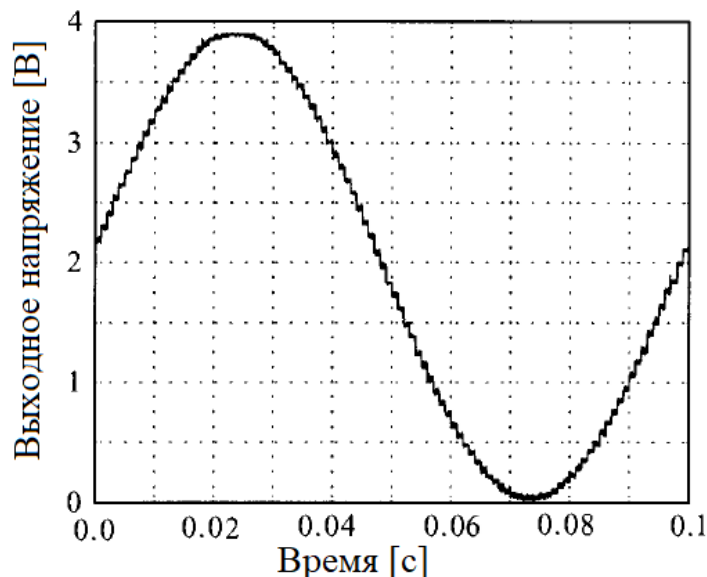


Рис. 4. Входной сигнал

На рис. 5 изображены результаты обработки входного сигнала, методом случайной выборки и ФСС для $n = 10$. На графике виден случайный сигнал, среднее значение которого приблизительно равно 2 В. Если из этого сигнала вычесть постоянную составляющую, равную 2 В, то дисперсия (мощность) оставшегося случайного сигнала равна $0,2441 \text{ В}^2$, что намного меньше аналогичного параметра сигнала, дискретизированного с помощью равномерной выборки. Рис. 5 также показывает, что примерно только 5 % значений выходят из диапазона $\hat{A} \pm \sigma_\mu$, где $\sigma_\mu^2 = 0.2441 \text{ В}^2$ и $\sigma_\mu = 0,9881 \text{ В}$.

Рис. 6 иллюстрирует осуществление случайной выборки, но со скользящим средним 100 измерений. Мощность шума — 0.0228 В^2 , то есть это еще лучше, чем получено на рис. 5. Значения из диапазона $\pm 2\Gamma(\mu)$ составляют 5 % полного значения, ($\pm 2\Gamma(\mu) = \pm 2(0.0228)^{1/2} = \pm 0.302$). Экспериментальные ре-

зультаты показали, что лучшие эксплуатационные показатели при увеличенных n , что соответствует теории.

$$T_{AD} = 10 \text{ мс}, T_S/T_{AD} = 10.$$

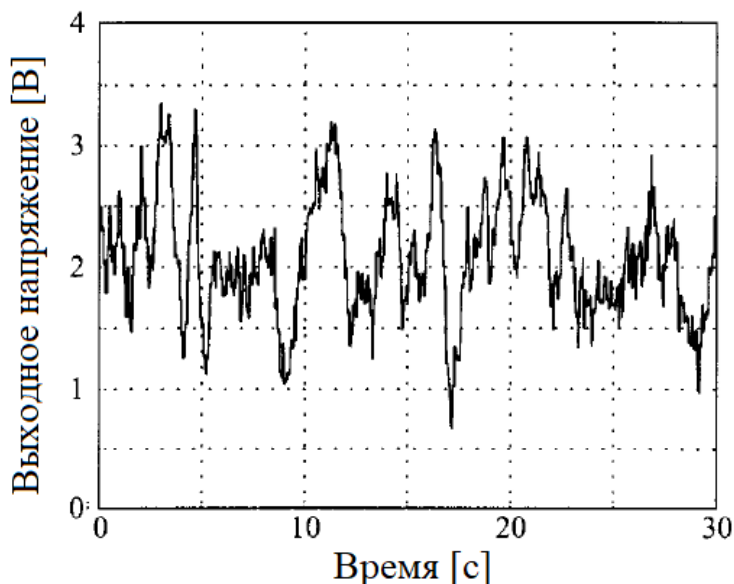


Рис. 5. Данные осциллографа при использовании случайной выборки и ФСС ($n=10$), $T_{AD} = 10$ мс, $T_S/T_{AD} = 10$

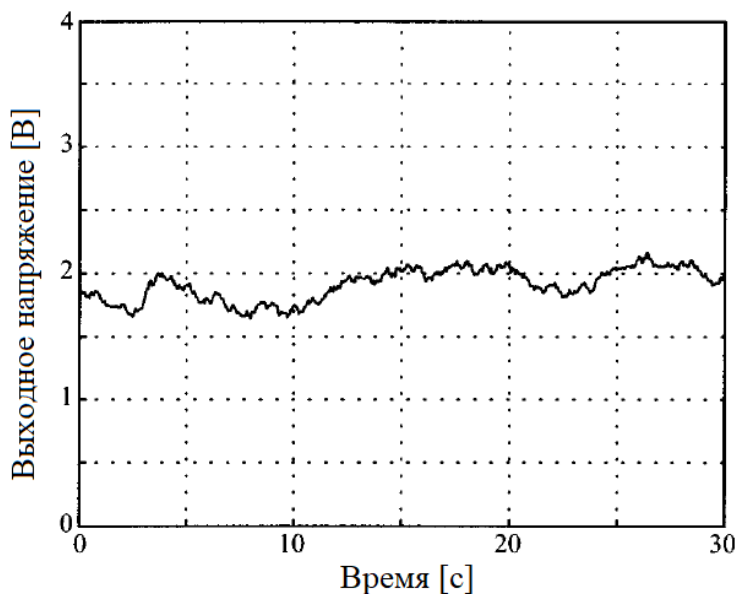


Рис. 6. Данные осциллографа при использовании случайной выборки и ФСС ($n=100$), $T_{AD} = 10$ мс, $T_S/T_{AD} = 10$

Заключение

Работа демонстрирует использование случайной выборки как метода исключения возможных проблем в системах измерения. Использование фильтра скользящего среднего и взятия отсчетов выборки в случайные моменты времени наиболее эффективно при измерении сигнала постоянного тока на фоне импульсных шумов. В этом случае можно не использовать антиалайзинговые фильтры [14], применение которых настоятельно рекомендуются для равномерной выборки. Более того описанный метод дает хорошие результаты оцени-

вания, даже если частоты помехового сигнала выше, чем максимальная допустимая частота дискретизации исследуемого сигнала.

В работе приведены теоретические результаты, которые проверяются экспериментальным путем. Показано, что использование случайной выборки позволяет снизить влияние импульсного помехового сигнала, который для простоты вычислений моделируется с помощью гармонического сигнала. Степень снижения влияния шума зависит от числа отсчетов, усредняемых фильтром скользящего среднего. Результаты также показывают, что эксплуатационные характеристики метода зависят от степени корреляции между функцией снятия выборки и возмущением. Чем больше корреляция, тем больше риск возникновения проблем, связанных алайзингом сигнала.

О других приложениях сглаживающих окон при обработке сигнала и выделении его из шума рассказано в работах [16–25].

Литература:

1. Котельников, В.А. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи / В.А. Котельников // Успехи физических наук. – 2006. – № 7. – С. 762–770.
2. Steiglitz, K. The Equivalence of Analog and Digital Signal Processing / K. Steiglitz // Information and Control, 1965. – Vol. 8, Iss. 5. – P. 455–467.
3. Oppenheim, A. Signals, Systems and Inference / A. Oppenheim, G. Verghese. – London, UK: Pearson, 2015. – 608 p.
4. Random Asynchronous Sampling Strategy for Measurement Instruments Based on Nonlinear Signal Conversion / F. Filicori, G. Iuculano, A. Menchetti, D. Mirri // IEE Proceedings. Ser. A, 1989. – Vol. 136. – Iss. 3. – P. 141–150.
5. A Broad-Band Harmonic Vector Voltmeter Based on a Random Sampling Strategy / D. Mirri, G. Iuculano, F. Filicori et al. // Proc. 10th Anniv. IEEE Int. Measurement and Technology Conf. – Hamamatsu: IEEE, 1994 – P. 1012–1015.
6. Lo, K.C. A New Approach for Estimating Spectra from Randomly Sampled Sequences / K.C. Lo, A. Purvis // Circuits Systems and Signal Processing, 1997. – Vol. 16. – No. 3. – P. 375–386.
7. Kan, E.P.F. Randomly Sampled Digital Filters / E.P.F. Kan, J.K. Aggarwal // IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, 1972. – Vol. AU-20. – No. 3. – P. 52–57.
8. Frey, P.R. The Effects of Random Sampling in a Digital Control System / P.R. Frey, C.L. Phillips // Proc. IEEE Southeastcon'78 of Region 3 Conf. – Atlanta: IEEE, 1978. – P. 507–510.
9. Исследование методов оценивания стандартного отклонения последовательности при контроле качества изделий / А.В. Абакумов, А.А. Львов, Е.Н. Скрипаль, Ю.А.Ульянина // Надежность и качество: сб. тр. Междунар. симп.: в 2 т. – Пенза: ПГУ, 2018. – Т. 2. – С. 92–96.
10. Papoulis, A. Probability, Random Variables, and Stochastic Processes / A. Papoulis. – New York: McGraw-Hill, 1991. – 858 p.

11. Львов, А.А. Основы статистической обработки измерительной информации в задачах автоматического управления: учеб. пособие для студ. вузов / А.А. Львов. – Саратов: СГТУ, 2005. – 84 с.
12. Мусатов, М.В. Применение общего метода наименьших квадратов при испытаниях АЦП / М.В. Мусатов, А.С. Моисеев, А.А. Львов // Вестник Саратовского государственного технического университета, 2010. – № 4(51). – Вып. 3. – С. 86–88.
13. Анализ алгоритмов тестирования АЦП, основанных на методе наименьших квадратов / М.В. Мусатов, В.Б. Половикова, А.С. Моисеев, А.А. Львов // Вестник Саратовского государственного технического университета, 2010. – № 4(51). – Вып. 3. – С. 156-160.
14. Schwartz, M. Signal Processing: Discrete Spectral Analysis, Detection, and Estimation / M. Schwartz, L. Shaw. – New York: McGraw-Hill, 1975. – 396 p.
15. Schiefer, H. Statistics for Engineers: An Introduction with Examples from Practice / H. Schiefer, F. Schiefer. – Springer, 2021. – 144 p.
16. Машкин, В.А. Высокоточные измерения переменного тока, основанные на применении метода Монте-карло / Машкин В.А., Львов А.А. // Вестник Саратовского государственного технического университета, 2009. – № 4(43). – Вып. 2. – С. 41-45.
17. Synthesis of a Wideband Multiprobe Reflectometer / В.М. Kats, V.P. Meshchanov, L.V. Shikova et al. // IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, 2008. – Vol. 56. – No. 2. – P. 507-514.
18. Северов, А.А. Построение математических моделей оптической головки оптико-механического привода / А.А. Северов, А.А. Львов // Вестник Саратовского государственного технического университета, 2009. – № 2(39). – Вып. 2. – С. 56-63.
19. Седов, И.В. Применение нелинейного усреднения к непараметрическому оцениванию частотных характеристик / И.В. Седов, А.А. Львов // Вестник Саратовского государственного технического университета, 2009. – № 2(39). – Вып. 2. – С. 63-73.
20. Сравнение методов оценивания параметров квазигармонических сигналов / А.А. Львов, А.А. Серанова, Р.В. Ермаков, А.С. Мучкаев // Радиотехника, 2019. – №8(12). – С. 88-95.
21. Comparison of Methods for Parameter Estimating of Superimposed Sinusoids / A. Seranova, R. Ermakov, A. Muchkaev et al. // Studies in Systems, Decision and Control, Vol. 337: Recent Research in Control Engineering and Decision Making. – Springer Nature Switzerland, 2020. – P. 140-151.
22. Северов, А.А. Алгоритм оценки параметров математических моделей линейных и нелинейных систем / А.А. Северов, А.А. Львов // Вестник Саратовского государственного технического университета, 2009. – № 4(43). – Вып. 2. – С. 77-81.
23. Moutchkaev, A.S. Parameter Estimation of Superimposed Sinusoids by Data Matrix Subfactorization: Theory and Algorithm / A.S. Moutchkaev, S.-H. Kong, A.A.

- L'vov // Proc. of the 2016 Int. Conf. on Actual Problems of Electron Devices Engineering. – Saratov, Russia: IEEE, 2016. – P. 1-6. DOI: 10.1109/APEDE.2016.7879042.
24. Moutchkaev, A.S. Parameter Estimation of Superimposed Sinusoids by Data Matrix Subfactorization: Analysis and Results / A.S. Moutchkaev, S.-H. Kong, A.A. L'vov // Proc. of the 2016 Int. Conf. on Actual Problems of Electron Devices Engineering. – Saratov, Russia: IEEE, 2016. – P. 1-8. DOI: 10.1109/APEDE.2016.7879043.
25. Optimal Estimation of the Motion Parameters of a Precision Rotating Stand by Maximum Likelihood Method / R.V. Ermakov, A.A. Seranova, A.A. L'vov, D.M. Kalikhman // Measurement Techniques, 2019. – Vol. 62. – No. 2. – P. 139-146.