Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: **mathmod.esrae.ru/46-183**
Ссылка для цитирования этой статьи:
Григорьев С.А. Введение в математическое моделирование динамики вязкой жидкости // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2024. №2

УДК 532.517.2:539.3 DOI:10.24412/2541-9269-2024-2-12-16

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Григорьев С.А.[1]
[1]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, agstbf@gmail.com

INTRODUCTION TO MATHEMATICAL MODELING OF VISCOUS FLUID DYNAMICS

Grigorev S.A.[1]
[1]Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, agstbf@gmail.com

Аннотация. Данная статья представляет введение в построение математической модели динамики вязкой жидкости, рассматривая уравнение Навье-Стокса и уравнение неразрывности для несжимаемой и сжимаемой жидкости, понятия сжимаемости и вязкости. Так же в статье говорится о проблеме отсутствия точных решений уравнений движения жидкости.

Ключевые слова: математическое моделирование, динамика жидкости, уравнение Навье-Стокса, уравнение неразрывности, несжимаемая жидкость, сжимаемая жидкость.

Abstract. This article provides an introduction to the construction of a mathematical model of the dynamics of a viscous fluid, considering the Navier-Stokes equation and the continuity equation for incompressible and compressible fluids, the concepts of compressibility and viscosity. The article also talks about the problem of the lack of exact solutions to the equations of fluid motion.

Keywords: mathematical modeling, fluid dynamics, Navier-Stokes equation, continuity equation, incompressible fluid, compressible fluid.

Гидродинамика - это раздел физики, изучающий течение жидкостей, что имеет огромное значение в различных областях науки и техники, включая механику, океанографию, метеорологию и биологию. Основным

ISSN 2541-9269

математическим инструментом для изучения динамики жидкостей являются уравнение Навье-Стокса и уравнения неразрывности. Уравнение Навье-Стокса было впервые записано французским физиком Анри Навье в 1822 году, а затем, спустя 23 года, английским ученым Джонатаном Стоксом.

Уравнение Навье описывает изменение скорости жидкости в пространстве и времени, в паре с ним используется уравнение неразрывности, которое выражает закон сохранения массы. Они формулируются в виде дифференциальных уравнений, которые могут быть применены к широкому спектру физических систем.

Классическая версия уравнения Навье-Стокса описывает движение вязких несжимаемых жидкостей.

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V}\cdot\nabla)\bar{V}\right) = \mu\Delta\bar{V} - \nabla p + \rho F \qquad (1)$$

ρ – плотность, $\bar{V}$ – вектор скорости, t – время, ∇ – оператор набла, μ – сдвиговая вязкость, Δ – оператор Лапласа, p – давление, F – вектор внешних сил

Рассмотрим понятия сжимаемости и вязкости.

Сжимаемость – это свойство жидкостей изменять свой объём под воздействием давления. Изменение объёма обратно пропорционально изменению плотности. Несжимаемая жидкость не меняет свою плотность, следовательно, и объём, с течением времени. В реальности ни одна жидкость не является абсолютно несжимаемой, но для многих практических целей такое предположение оказывается достаточно точным. Это особенно верно для воды, масла и ртути при условиях нормального давления и температуры. Примерами сжимаемых жидкостей будут нефть и нефтепродукты (бензин, дизельное топливо, керосин).

Вязкость – это свойство жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной их части относительно другой. Сдвиговая вязкость – это сопротивление слоёв жидкости перемещению относительно друг друга. Из-за этого свойства, при течении жидкости по трубе, частицы, находящиеся в центре потока, будут двигаться немного быстрее частиц у стенки трубы. Так же, как и абсолютно несжимаемой, абсолютно невязкой жидкости не существует. Наглядными примерами жидкостей с низкой и высокой сдвиговой вязкостью будут вода и мёд [1].

Уравнение Навье-Стокса содержит в себе четыре неизвестных переменных: скорость, давление, плотность и вязкость. Если привести уравнение к скалярной форме, то мы получим три уравнения по одному для каждой оси координат [2]. Если в системе уравнений неизвестных больше, чем уравнений, то система становится неопределенной. Это означает, что есть свобода выбора для одной или нескольких переменных, и нельзя однозначно определить их значения только на основе заданных уравнений. Чтобы получить четыре уравнения, дополним систему уравнением неразрывности.

$$\nabla\cdot\bar{V} = 0 \qquad (2)$$

Уравнение неразрывности, также известное как уравнение сохранения массы, говорит о том, что поток массы (количество жидкости), проходящий через поверхность, ограничивающую жидкость, не меняется. При течении жидкости по трубе, скорость может изменяться в различных частях трубы, но объем воды, проходящий через любой поперечный срез трубы за единицу времени, остается постоянным.

$$\begin{cases} \rho\left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V}\cdot\nabla)\bar{V}\right) = \mu\Delta\bar{V} - \nabla p + \rho F \\ \nabla\cdot\bar{V} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Полученная система дифференциальных уравнений описывает движение несжимаемой жидкости [3].

Чтобы учесть сжимаемость, нужно добавить в уравнения движения жидкости изменение плотности с течением времени. В уравнении неразрывности это будет производная плотности по времени.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\bar{V}) = 0 \quad (4)$$

Уравнение неразрывности для сжимаемой жидкости утверждает, что изменение плотности жидкости во времени в определенном объеме пространства должно быть равно потоку массы через поверхность этого объема [4].

Уравнение Навье будет дополнено слагаемым с объёмной вязкостью

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V}\cdot\nabla)\bar{V}\right) = \mu\Delta\bar{V} - \nabla p + \rho F + \left(\eta + \frac{1}{3}\mu\right)\nabla\nabla\cdot\bar{V} \quad (5)$$

η – объемная вязкость

Объемная вязкость – это сопротивление жидкости изменению её объёма [5].

Одной из ключевых проблем гидродинамики является отсутствие точных решений. Проблема заключается в том, что для многих физически значимых задач не существует аналитических выражений (точных выражений в виде формул или функций) для решения уравнений движения жидкости [6]. Это означает, что даже при известных начальных и граничных условиях нет возможности найти точное аналитическое решение для поведения жидкости или газа во времени и пространстве.

Одной из основных причин этой проблемы является сложность уравнений Навье-Стокса и неразрывности. Эти уравнения являются нелинейными и включают в себя частные производные по времени и пространству. Даже при простейших граничных условиях они могут приводить к сложным математическим задачам, которые часто не имеют аналитических решений.

Для решения практических задач в гидродинамике часто используются численные методы, такие как метод конечных элементов или метод конечных объемов. Они позволяют аппроксимировать решения уравнений Навье-Стокса с заданной точностью, но требуют вычислительных ресурсов и времени.

Проблема отсутствия точных решений в гидродинамике остается актуальной и является предметом активных исследований в научном сообществе.

Уравнения Навье-Стокса и неразрывности являются фундаментальными для описания динамики жидкостей и газов. Кроме того, уравнения динамики вязкой жидкости активно применяются совместно с уравнениями упругости для решения сложных технических задач [7-9]. Однако проблема отсутствия точных аналитических решений остается актуальной и является объектом дальнейших исследований. Несмотря на достижения в численном моделировании, важно продолжать поиск новых методов и подходов к решению этой проблемы. Возможные пути решения включают развитие аналитических методов, применение современных численных методов и экспериментальных подходов. Совместные усилия ученых из разных областей помогут преодолеть вызовы, стоящие перед гидродинамикой, и продвинуть понимание физики жидкостей на новый уровень.

Литература

1. Understanding Viscosity. — Текст : электронный // The Efficient Engineer : [сайт]. — URL: https://efficientengineer.com/viscosity/ (дата обращения: 10.04.2024).
2. Sochaki J. S. Introduction to Compressible Computational Fluid Dynamics / J. S. Sochaki. — Текст : электронный // James Madison University : [сайт]. — URL: https://educ.jmu.edu/~sochacjs/navierstokes.pdf (дата обращения: 06.03.2024).
3. Хмельник С. И. Уравнения Навье-Стокса Существование и метод поиска глобального решения / С. И. Хмельник. — Четвертая редакция. — Израиль : Mathematics in Computer Corp, 2018. — 128 с. — Текст : электронный — URL: https://vixra.org/pdf/1403.0059v3.pdf
4. Бубнов В. А. Об учете объемной вязкости в гидродинамических течениях / В. А. Бубнов. — Текст : электронный // Вестник Московского городского педагогического университета. — 2011. — № 7. — С. 14-20. — URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=17671854
5. Introducing the Compressible Navier-Stokes Equation. — Текст : электронный // Cadence Design Systems : [сайт]. — URL: https://resources.system-analysis.cadence.com/blog/msa2021-introducing-the-compressible-navier-stokes-equation (дата обращения: 06.03.2024).
6. Веденяпин, В. В. Уравнения Эйлера и Навье–Стокса как следствия уравнений типа Власова / В. В. Веденяпин, Н. С. Смирнова. — Текст : электронный // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2019. — № 41. — 20 с. — URL: https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-41
7. Кондратов Д.В., Кондратова Ю.Н., Могилевич Л.И. Математическое моделирование ламинарного движения жидкости в упругой цилиндрической трубе кольцевого профиля со свободным опиранием по торцам // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2009. Т. 1. № 1 (37). С. 33-40.

8. Кондратов Д.В. Гидроупругость силового цилиндра с полым плунжером при свободном истечении жидкости // Вестник Саратовского госагроуниверситета им. Н.И. Вавилова. 2008. № 1. С. 38-43.
9. Блинкова О.В., Кондратов Д.В. Задача динамики взаимодействия сдавливаемого слоя вязкого сжимаемого газа с упругой пластиной // Труды МАИ. 2020. № 110. С. 21. DOI: 10.34759/trd-2020-110-21