Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: **mathmod.esrae.ru/47-193**
Ссылка для цитирования этой статьи:
Бырдин В.М. Трансцендентные осевые спирали и шлемовидная кривая на базе синусоиды, с петлями, пиками и крестами, и обратные волны // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2024. № 3

УДК: 514.86; 534.2; 537.87 DOI:10.24412/2541-9269-2024-3-16-23

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ОСЕВЫЕ СПИРАЛИ И ШЛЕМОВИДНАЯ КРИВАЯ НА БАЗЕ СИНУСОИДЫ, С ПЕТЛЯМИ, ПИКАМИ И КРЕСТАМИ, И ОБРАТНЫЕ ВОЛНЫ

Бырдин В. М.
Институт Машиноведения им. А.А. Благонравова РАН (ИМАШ РАН), Россия, Москва, V_M_Byrdin@mail.ru

TRANSCENDENT AXIAL SPIRALS AND HELMET-SHAPED CURVES ON THE BASIS OF A SINUSOID, WITH LOOPS, PIKES AND CROSSES, AND BACKWARD WAVES

Byrdin V.M.
A. A. Blagonravov Institute of Machines Science of the RAS (IMASH RAS), Russia, Moscow, V_M_Byrdin@mail.ru

Аннотация. Идея данных кривых возникла из анализа петли групповой скорости обратных волн. Через производную от повёрнутой синусоиды получим параметрическую функцию с набором периодических кривых: три новых типа осевых плоских спиралей и шлем-кривая. Наши спирали осевые, в отл. от завитых и от известных синус-спиралей. Все наши кривые сингулярно насыщенны: имеют кресты (пересечения), самокасания, петли и пики (или каспы – возвраты 1-го рода). Такие спирали и кривые дают простой анзац (описание и анализ), аппроксимацию фигур произвольной сложности (вкл. и суперпозицию), трансцендентных, неявных, экспериментальных и численных. В частности, анзац дисперсионных кривых обратноволновых мод в механике и электродинамике. Эти волны обладают «отрицательной» фазовой скоростью и рядом фундаментальных свойств, что и составило современный флагман-тренд многопрофильной теории волн и технологий.

Ключевые слова. Спирали, плоские осевые. Петли. Кресты (пересечения). Пики или возвраты 1-го рода. Кривые, трансцендентные, численные, экспериментальные, дисперсионные. Обратные волны.

Abstract. The paper proposes a new type of flat spirals. These are transcendental, axial, singularly rich spirals generated by a sinusoid, in contrast to the known sinusoidal spirals. These are axial spirals - unlike, as a rule, "point" ones, curled around a point. And these are singularly rich spirals - they include a number of features: arcs with double branching points, crosses, i.e. self-intersections and -touches, loops and peaks or cusps of the 1st kind. Spirals of this type were obtained by me as a simple ansatz of approximations of arbitrary complex (including superposition), transcendental, numerical and experimental dispersion laws and dispersion curves of backward-wave and waveguide processes. Backward waves are the most strongly dispersive waves with a "negative" (directed towards the emitter) phase velocity and a number of fundamental remarkable phenomena and properties; this is a modern creative direction of the multidisciplinary theory of waves and technologies.

Keywords. Spirals, flat, axial, transcendent. Arcs of double branching, crosses, loops, cusps. Approximation of curves. Numerical, experimental, dispersion curves. Backward waves.

1. Предисловие. Трансцендентные функции и кривые давно известны в математике и в точных отраслях всех уровней, от академического и профессорского и до инженеров и старшеклассников. Конечно, *Запредельность*, как переводится с лат. Transcendens, «говорит само за себя» и потому трансцендентные объекты аналитически весьма сложны, кроме *Элементарных*, доступных и школьнику. Тем не менее, тривиальная синусоида, как оказалось, не вполне изучена, порождает довольно интересные кривые, даже целые семейства. Этой темы мы уже касались в недавней статье [18] и в докладах на Конференциях здесь даём развитие вопроса.

Известная [1–3, 18, 19] полу-петля групповой скорости *U(ν)* обратных волн

$$a(r - Ut)\sin(\sigma r + \nu t)\,, U > 0, \sigma > 0$$

даётся производной, $U = \partial\nu/\,\partial\sigma$, от функции волнового числа *σ(ν)*, имеющей вид извилистой кривой, см. рис. 1. (ν – частота колебаний, t – время, r – осевая координата). Извилина дисперсионной кривой обратных волн всегда отрицательного наклона: $\sigma U < 0$. Так что волновой вектор и фазовая скорость противоположны групповой и энергетической скоростям, и фаза волны набегает на источник излучения. В большинстве обратноволновых волновых структур кривая *σ(ν)* обратной моды, как правило, в одну извилину, однако на рис. 1 представлена кривая для модели с пятью извилинами (по мотивам [1, с. 53]), что более адекватно нашей повёрнутой синусоиде (рис. 2а нижеслед.). И, заметим, Обратная волна и Обратная функция – омонимичные понятия.

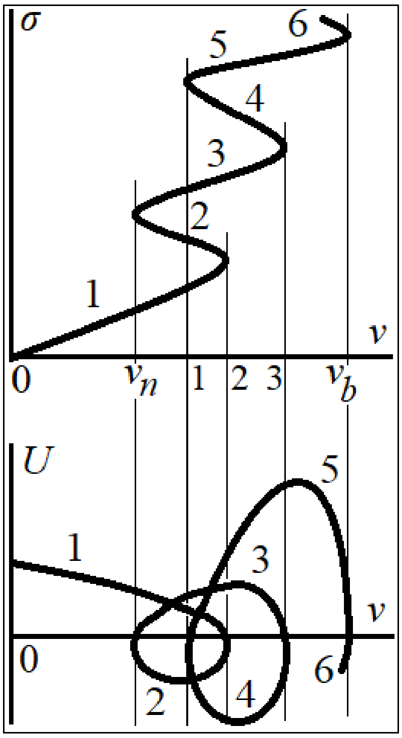

Рис. 1. Дисперсионная кривая волнового числа *σ(ν)* в пять извилин (по [1]) и петлистая спираль групповой скорости *U(ν)*, с 4-мя крестами, для 5 мод, вкл. две обратноволновые, 2-ая и 4, [2].

2. Обобщение идеи. Повернём синусоиду на некий острый угол *(0, 90°)*, полученную $y(x)$ дифференцируем $f(x) = 1/y'(x)$ – что и даёт набор нетривиальных периодических вещественных кривых. Во-первых, три новых типа плоских спиралей, трансцендентных, осевых, сингулярно насыщенных, хотя и порождённых, казалось бы, всего лишь повёрнутой банальной синусоидой, и в

2024, № 3
ISSN 2541-9269

отл. от классических синусоидальных спиралей. Это будут осевые спирали, в отл. от, как правило, «точечных», завитых вокруг точки. Возможно также обобщение: плоское, при искривлении оси x, и пространственное и ср. с винтовыми линиями (в п. 3.2 замечание 1). Кроме того, построено две периодических кривых, разрывная и шлемовидная, а также вырождение в эллипс. Все 5 видов полученных кривых содержат ряд сингулярностей: обычные перегибы и двукратные ветвления и нетривиальные петли, кресты (т.е. пересечения), самоприкосновения и пики или каспы – точки возврата 1-го рода с двумя симметричными ветвями. Такого типа спирали, названные нами Петлистой, Бинарной и Сгущённой, и Шлемовидная кривая представляют, по-видимому, простой анзац (описание и анализ) крестов, касаний, петель, извилин и каспов произвольных и сколь угодно сложных кривых и функций (вкл. суперпозицию). Таких как трансцендентные, неявные, специальные, алгебраические (высоких порядков) и не заданные аналитически, численные и экспериментальные. Чему нами и найдено приложение, в частности, в анализе дисперсионных кривых $\sigma(v)$ и $U(v)$ обратноволновых и волноводных процессов в механике и электродинамике. Обратные волны – это весьма, наиболее сильно диспергирующие волны, обладающие «отрицательной» фазовой скоростью (направленной к излучателю) и целым рядом фундаментальных эффектов, явлений и свойств. Так что обратноволновая физика – это современное, особенно последних 2-3 десятилетий, креативное направление, отмеченное мировыми и отечественными наградами и номинациями, и образовавшее передовой флагман-тренд многопрофильной теории волн и технологий ([2–5, 19] и мн. др.).

В современной геометрии собраны целые реестры всевозможных плоских, а также пространственных кривых, справочники и трактаты, каталоги и указатели, и множество сайтов, см., например, [6, 7]. В основном алгебраических кривых, т.к. трансцендентные объекты представляют собой извечную проблему прикладной и чистой математики, оправдывая в целом своё определение: «недоступные познанию», лат., – [6–9] и др. В частности, алгебраические плоские вещественные кривые высокой степени анализируются в рамках 16-й проблемы Гильберта – [11], [10], серия замечательных докладов. Так что рассмотренные здесь нами кривые нетривиально, будем надеяться, пополнят трансцендентную тематику. Заметим также, что в замечательной, онлайн обновляемой «Encyclopedia of Mathematics» [9], переведённой с нашей 5-томной, трансцендентным функциям и кривым уделено лишь по несколько строк, особенно в ср. с алгебраическими объектами.

3. Новые типы трансцендентных спиралей и периодическая шлемовидная кривая

3.1. Периодические кривые. Исходим из $y_u = a\sin(bx_u)$, $a, b \in \boldsymbol{R}$. Азбучный переход к другим координатам, при повороте на θ (рис. 2a) и с возможным сносом (на y_0, x_0), даёт для производной:

$$f(x) = \partial x/\partial y = (1 + abt\cos(bx_u))/(t - ab\cos(bx_u)), \quad (1)$$

2024, № 3
ISSN 2541-9269

$x = A + x_u c - sa\sin(bx_u);\ y(x) = (x_0 + x_u)s + (a\sin(bx_u) - y_{u0})c,$
$s = \sin\theta,\ c = \cos\theta,\ t = \tan\theta,\ A(\theta) = sy_0 - cx_0 = const(x_u).$

Полученная параметрическая *f(x)* немного подобна трохоиде.

Из набора кривых *f(x)* графо-аналитически определяем нижеследующие пять видов новых периодических кривых, вкл. три типа спиралей и шлемовидную кривую.

Разрывная кривая (разрывы 2-го рода, ±∞) – периодическая кривая при малых докритических углах $\theta < \theta_{Kp1} = \arctan(1/ab)$, ещё не спираль. ($\theta_{Kp1} = 45°$ при $a = b = 1$). Эта кривая отчасти подобна секансу, не имеет пик (каспов) и не касается абсциссы – не приведена на рис., не столь интересна. Точки её разрыва $x_\kappa(x_{u\kappa})$ даются из уравнения $ab\ cos bx_u = t$ с простым периодом по x_u, $x_{u\kappa} = (x_{u0} + 2\kappa\pi)/b,\ \kappa \in \mathbb{Z}$.

Шлемоида – шлемовидная, шлем-кривая *f(x)* при $\theta = \theta_{Kp1}$, рис. 2c. Шлемоида подобна циклоиде. Это периодическая кривая, опёртая пиками на ось x и с вершинами до бесконечности. Здесь точки возврата 1-го рода, при $bx_u = \pi + 2\kappa\pi$, представляют собой, в данном случае, *вырождение* петли в остриё (см. замечание 2Б, ниже).

3.2. Три вида осевых трансцендентных спиралей

Петлистая спираль, рис. 2a. Для $\theta \in (\theta_{Kp1}; \theta_{Kp2})$, $\theta_{Kp2} = \arctan(3\pi/2ab)$, или $45° < \theta \leq 78°$ при единичных a и b. Данная петлисто-спиральная кривая подобна удлинённой циклоиде-трохоиде.

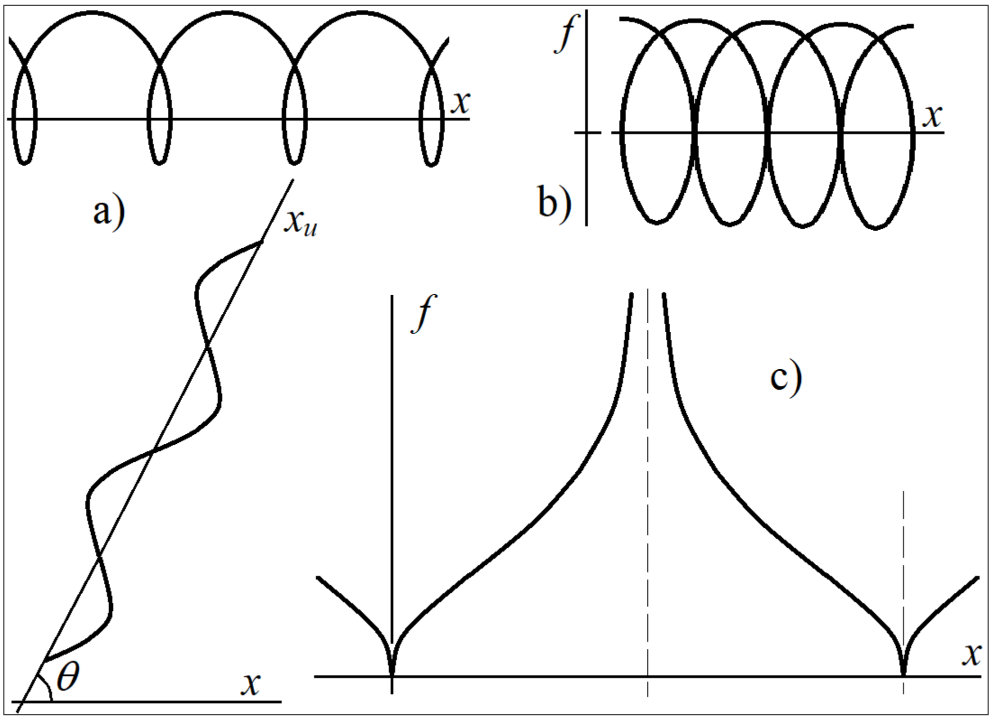

Рис. 2. Два вида спиралей на базе повёрнутой синусоиды: a) с петлями (вкл. кресты), при поворотах $\theta_{Kp1} < \theta < \theta_{Kp2}$ и b) с точками самоприкосновения, при $\theta = \theta_{Kp2}$.

ISSN 2541-9269

И шлемовидная кривая (c), при $\theta = \theta_{Kp1}$.

Бинарная спираль, рис. 2b. Критический угол $\theta_{Kp2} \approx 78{,}02°$, при $a = b = 1$, или в общем случае $\theta_{Kp2}(a, b) = \arctan(3\pi/2ab)$. Бинарная спираль имеет на одном периоде две точки пересечения, по одной-две петли и точки самоприкосновения, или, кратко, *самокасания* (наш термин).

Сгущённая спираль. При повороте, $\theta_{Kp2}<\theta<90°$, спираль сгущается по сравнению с бинарной. Появляются возрастающие, с ростом угла, счётные множества петель и крестов, а также дискретно (по θ) возникающие точки самокасания.

Эллипс. При *90^O – вырождение* спирали в эллипс, с полуосями a и ab, и, в частности ($b = 1$), в окружность.

Для сравнения отметим, что классическая синус- или синусоидальная спираль ($\rho^n = a^n \cos(n\varphi)$; *Колин Маклорен*, 1718г.) включает в себя, как частные случаи, при различных n, ряд классических кривых. Это лемниската Бернулли, кубика Чирнгауза (или Лопиталя), логарифмическая спираль Декарта, обычные гипербола и парабола и др. кривые. Наша функция (1) включает четыре новых трансцендентных периодических кривых, три вида осевых спиралей и шлемовидную кривую, а также обычный эллипс.

Замечание 1, о подобии с проекциями цилиндрического винта $t \to (a\cos t, a\sin t, t/b)$. Взяв в руки винтовую пружину, можно продемонстрировать следующее. Косая проекция винта на любую из плоскостей, параллельных оси z, даст подобные рассмотренным, осевые спирали, петлистую, бинарную и сгущённую. Однако это чисто внешнее подобие, а не количественное совпадение. Кроме того, шлемовидная проекция винта содержит только пики, противоположных вершин, в отл. от рис. 2c. В проекциях нет также разрывной кривой (см. в п. 3.1). Различие также и в получении круга и эллипса (п. 3.2). Т.о., в целом структура нашей функции (1) и её плоских кривых сложнее проекций винтовой.

Замечания 2, терминологические. *А)* Краткий термин *Крест* известен в современной геометрии и топологии [11, с. 7]. Символ же пересечения ∩, уже общенаучный (а не только теорий множеств, вероятностей и математической логики), был введён *Дж. Пеано* ещё в 1888г. В физической же теории волн обычно говорят о *Пересечении* дисперсионных кривых (см., например, [5; 12, § 64]), где понятие «пересечения», пожалуй, общелитературное. Отмечу также, что крест плоских кривых с острым углом и, в частности, с прямым, с которым в основном и ассоциируется слово Крест.

Б) Термин *Пика*, как лаконичный синоним заострению (или возврату) 1-го рода и второму синониму *Касп*, введён нами в 2018 г. [5] и независимо Авторами статьи «Касп» в Википедии (правки дек. 2018). Причём в отличие от крайне острой Пики, *Пик* более адекватен излому с угловой точкой, ввиду различия их этимологии: Пика – от фр. *pique*, колющее оружие, а Пик – лат. и фр. *pic* – остроконечная вершина с острым или же тупым углом.

В) Общепринятому выражению «точка самоприкосновения», предлагается наше краткое *самокасания*, вполне не затрагивающее смысл этой сингулярности.

Г) Вообще, терминологическая проблематика важна в науке и, в частности, в физике и математике, [2, с. 1415; 11, с. 30; 13; 14] и др. Вплоть до диссонанса меж дисциплинами и эпохами, с «архаичной», хотя классической, и современной терминологией и публикациями (см., например, [8, p. iii–iv]). Философский и науковедческий анализ взаимоотношений в целом математики, механики, а также физики, предпринят в уникальной книге [14]. Как известно, большинство советских математиков, *А. Д. Мышкис, С. П. Новиков, Б. В. Шабат* и многие другие, успешно сотрудничали с механиками и физиками, см. например, [14, 15]. И более того, *Анатолий Дмитриевич Мышкис* свою указанную [14] междисциплинарную книгу «Механика и прикладная математика …» считал «*самым серьёзным делом моей <целой – В.Б.> жизни*» [16, с. 243].

4. Заключение. Обратноволновая физика – это новое, последних 2-3 десятилетий, весьма перспективное, фундаментальное направление в теории волн и технологий ряда отраслей механики и электродинамики. Причём Россия, вслед за Советским Союзом, начиная с 1940/50-ых гг. (знаменитые лекции *Л. И. Мандельштама*, лампы ЛОВ– обратной волны, обратноволновая электроника СВЧ), сохраняет передовые позиции в теории обратных волн, благодаря трудам *Веселаго В. Г., Ерофеев В. И., Кузнецова И. Е., Малюжинца Г. Д., Шевченко В. В.* и целой плеяды отечественных учёных и коллег ([2–5, 19] и др.). Получение, расчёт или измерение, и анализ дисперсионных кривых волнового числа, групповой и фазовой скоростей представляет значительную, базовую проблему в современной теории и технологии волн, тем более обратных, наиболее диспергирующих волн. Дисперсионные уравнения, функции и кривые в аналитических задачах, как правило, трансцендентны, нередко неявны, рассчитываются в основном асимптотически и численно, или, в вычислительных отраслях – численными методами, в экспериментальных работах – измеряются. В двух последних – *виртуальные* функции и кривые (автор, 2017, см. в [18]). Здесь и возникла наша идея [5] производной от извилистой кривой, в частности, от синусоиды. Обобщая и абстрагируясь, получаем анзац не только дисперсии волн, но и вообще крестов, петель, пик и других сингулярных элементов и фигур сложных аналитических и виртуальных, численных и экспериментальных кривых. (Заметим, *анзац* – формулы, приближение, асимптотика, описание и анализ, ср. [17, с. 35] и др.). А простая связь, через производную, извилины и петли, перегиба и пики представляется конструктивным методом анализа этих сингулярных объектов произвольных плоских функций и кривых.

Работа была представлена ранее на конференциях механиков в ИПМех РАН, 2022, машиноведов в ИМАШ РАН, 1918г, и отчасти математиков, ВСГУТУ-Байкал, 2017, [см. в 18].

Литература

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн: Уч. пос. М.: ФМЛ, 1984. 432 с.
2. Бырдин В.М.: А) Обратные волны: столетие первой работы, истоки и развитие обратноволновой механики и электродинамики (обзор) // Радиотехника и электроника. 2005. Т. 50. № 12. С. 1413–1438. Б) О работах В.В. Шевченко по теории обратных волн (К 70-летию со дня рождения) // Московский электродинам. семинар. М., ИРЭ РАН, 10.2007. В) То же. М.: ИРЭ РАН, 2007. 28 с.
3. Обратные волны: А) Научная сессия отделения Физических наук РАН / Вашковский А.В., Веселаго В.Г., Локк Э.Г. и др.; М., ФИАН, янв. 2006 // УФН. 2006. Т. 176. № 5. С. 557–565; Б) Электромагнитные и акустические волны в метаматериалах и структурах: Научная сессия отделения Физических наук РАН, февр. 2011 // УФН. 2011. Т. 181. № 11. С. 1201–1234.
4. 16th International Congress on Artificial Materials for Novel Wave Phenomena (Metamaterials 2022). Sep 2022, University of Siena - Dep. of Inform. engin. and math., Italy – https://www.clocate.com/international-congress-on-artificial-materials-for-novel-wave-phenomena-metamaterials/16694/ – дата обр. 23.6.2024.
5. Бырдин В.М. Об обратноволновой концепции в общей теории волн, в механике и электродинамике // Волны и вихри в сложных средах: 12-ая Международная конф.-школа. ИПМех РАН. М., дек. 2021 г. М.: ИСПО, 2021. С. 44–49.
6. Шикин Е.В., Франк-Каменецкий М.М. Кривые на плоскости и в пространстве. Справочник с прилож. «Плоские кривые». М.: ФАЗИС, 1997. 336 с.
7. Lawrence J.D. A catalog of special plane curves. N.-Y.: Dover Publ., 1972. XI+218 p., 89 ill.
8. Dolgachev I.V. Classical Algebraic Geometry: a modern view. Cambridge Univ. Press, 2012. 710 p.
9. Transcendental curve; – function; Cusp // Encyclopedia of Mathematics, in 10 v. + 3 v. Supplements, Ed. Mihil Hasewinkel, European Mathematical Society, Translation from Russian, Kluwer Acad. Publ., 1987-2002. (With updates since 2011). https://encyclopediaofmath.org/ – дата обр. 7.7.2024.
10. А) Борисов И.М. О применении метода кусочного конструирования Виро к классификации распадающихся алгебраических кривых степени 8. **Б)** *Горская В.А*. О классификации М-распадающихся кривых степени 7. **В)** *Пучкова Н.Д*. Классификация кривых степени 8, распадающихся в объединение двух М-кривых степени 4, содержащее конфигурацию ‘‘змея без свободного конца’’ // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 62 // Материалы Международной конф. ”Лобачевские чтения”. Казань: Изд. КФУ, 2022. 128 с. Сс. 20-22. 35-38. 103-105. – https://kpfu.ru/portal/docs/F_1591875385/LR2022.pdf – дата обр. 12.8.2022.
11. Виро О.Я. Плоские вещественные алгебраические кривые: построения с контролируемой топологией // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 5. С. 1–73.
12. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: ФМЛ, 2001. 536с

13. Арнольд В. И. Математика и физика: родитель и дитя или сестры? // УФН. 1999. Т. 169. № 12. С. 1311–1323.
14. Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложений математики. 2 изд. М.:ФМЛ, 1990. 360 с. (3 изд. 2003г.).
15. Новиков С.П. (2002г.). Математика на пороге XXI века (Историко-математические исследования). *Часть 1.* Вторая половина XX века и её итог: кризис физико-математического сообщества в России и на Западе / https://www.liveinternet.ru/community/2281209/post147788692/ *Часть 2* / https://www.liveinternet.ru/community/2281209/post147926123/?aid_refresh=yes – дата обр. 24.2.2018.
16. Мышкис А.Д. Советские математики. Мои воспоминания. М.: ЛКИ, 2007. 304 с.
17. Бабич В.М., Киселев А.П. Упругие волны. Высокочастотная теория / ПОМИ, СПб НЦ РАН. СПб.: *БХВ*-Петербург, 2014. 320 с.
18. Бырдин В.М., Пузакина А.К. Извилины, дуги и петли дисперсионных, трансцендентных и виртуальных функций, уравнений и кривых & сингулярный анзац, нормальные и обратные волны // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2023. № 3. С. 8-25. DOI 10.24412/2541-9269-2023-3-08-25.
19. Акустические волны в материалах и элементах конструкций с дефектами, неоднородностями и микроструктурой / Отв. ред. Ерофеев В.И., Мальханов А.О. Авторы: Аносов М.С., Антонов А.М., Бочкарев А.В. и др. Н.-Новгород: НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2021. 311 с. ISBN 978-5-502-01502-8.