

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: mathmod.esrae.ru/48-198

Ссылка для цитирования этой статьи:

Блинков Ю.А., Мельникова А.Н. Расчет теплообмена в ламинарном свободно-конвективном пограничном слое неньютоновской жидкости на пластине // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2024. №4

УДК 532.526.2

DOI:10.24412/2541-9269-2024-4-33-39

РАСЧЕТ ТЕПЛООБМЕНА В ЛАМИНАРНОМ СВОБОДНО- КОНВЕКТИВНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ НА ПЛАСТИНЕ

Блинков Ю.А.¹, Мельникова А.Н.²

¹ Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Россия, Саратов, blinkovua@info.sgu.ru

² Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Россия, Саратов, melnikova-a-n@mail.ru

HEAT TRANSFER CALCULATION IN A LAMINAR FREE-CONVECTIVE BOUNDARY LAYER IN NON-NEWTONIAN FLUID ON A FLAT PLATE

Blinkov Yu.A.¹, Melnikova A.N.¹

¹ Saratov State University, Russia, Saratov, blinkovua@info.sgu.ru

² Saratov State University, Russia, Saratov, melnikova-a-n@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается задача о стационарном пограничном слое на поверхности вертикальной проницаемой пластины, образованном двумя степенными неньютоновскими жидкостями с различными теплофизическими свойствами. Исследуется влияние сил вязкого трения на теплообмен в ламинарном свободно-конвективном пограничном слое. Предложена математическая модель, описывающая течение и теплоперенос в двухслойной системе, состоящей из внешнего и внутреннего подслоев, образованных окружающей и вдуваемой жидкостями соответственно. Решение задачи сведено к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается методом пристрелки. Показано, что существует значение параметра, при котором тепловой поток между пластиной и пограничным слоем отсутствует. Результаты могут быть полезны для анализа теплообмена в системах с проницаемыми поверхностями и неньютоновскими жидкостями.

Ключевые слова: пограничный слой, неньютоновская жидкость, поверхность разрыва, тепловой поток.

Abstract. The article addresses the problem of a steady boundary layer on the surface of a vertical permeable plate, formed by two power-law non-Newtonian fluids with different thermophysical properties. The influence of viscous friction forces on heat transfer in a laminar free-convective boundary layer is investigated. A mathematical model is proposed, describing the flow and heat transfer in a two-layer system consisting of outer and inner sublayers formed by the

surrounding and injected fluids, respectively. The problem is reduced to a boundary value problem for a system of ordinary differential equations, which is solved using the shooting method. It is shown that there exists a parameter value at which the heat flux between the plate and the boundary layer is zero. The results may be useful for analyzing heat transfer in systems with permeable surfaces and non-Newtonian fluids.

Keywords: boundary layer, non-newtonian liquid, discontinuity surface, heat flux.

Пограничные слои (ПС) вязких несжимаемых ньютоновских жидкостей с поверхностью разрыва изучены достаточно хорошо [1-3]. В [4] рассматривается случай, когда в область ПС ньютоновской жидкости на плоской пластине вдувается степенная неньютоновская жидкость. В [5] в автомобильной постановке найдено решение для теплового ПС двух несмешивающихся ньютоновских жидкостей вблизи передней критической точки затупленного пористого тела. В работе [6] результаты [5] обобщаются на случай степенных неньютоновских жидкостей с нелинейной теплопроводностью. В данной работе изучается влияние сил вязкого трения на теплообмен в ПС, возникающего на поверхности вертикальной проницаемой пластины.

1. Пусть в вязкую несжимаемую степенную неньютоновскую жидкость с нелинейной теплопроводностью вертикально помещена полубесконечная плоская пластина. Через проницаемую поверхность пластины со скоростью $v_w(x) = Ax^\alpha$ ($A = \text{const}$, $\alpha = \text{const} > 0$) вдувается другая вязкая несжимаемая степенная неньютоновская жидкость с нелинейной теплопроводностью, теплофизические свойства которой отличны от свойств окружающей пластину жидкости. Пусть $T_\infty = \text{const}$ и $T_w(x) = \text{const}$ - температуры окружающей и вдуваемой жидкостей соответственно. Вследствие нагрева окружающей жидкости вблизи поверхности пластины образуется ПС. Будем предполагать, что поток вещества сквозь поверхность разрыва отсутствует. Тогда ПС будет состоять из двух несмешивающихся подслоев - внешнего, образованного окружающей пластину жидкостью, и внутреннего, образованного вдуваемой жидкостью.

Для жидкостей, подчиняющихся степенному реологическому закону (τ - напряжение трения, μ^* , $n > 0$ - реологические характеристики жидкости)

$$\tau = \mu^* \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n$$

и нефурьевскому закону теплопроводности [9] (q - тепловой поток, λ^* , m - характеристики теплопроводности жидкости)

$$q = -\lambda^* \left| \frac{\partial T}{\partial y} \right|^{m-1} \frac{\partial T}{\partial y}$$

задача о стационарном пограничном слое с поверхностью разрыва на полубесконечной вертикальной пластине с учетом естественной конвекции и вязкой диссипации определяется следующими уравнениями и граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} = 0, \quad u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} = \frac{\mu_i^*}{\rho_i} n_i \left| \frac{\partial u_i}{\partial y} \right|^{n_i-1} \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + g\beta_i(T_i - T_\infty), \\ u_i \frac{\partial T_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial T_i}{\partial y} = \frac{\lambda_i^*}{\rho_i c_{p_i}} m_i \left| \frac{\partial T_i}{\partial y} \right|^{m_i-1} \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} + \frac{\mu_i^*}{\rho_i c_{p_i}} \left| \frac{\partial u_i}{\partial y} \right|^{n_i-1} \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} \right)^2; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{при } y = 0: u_2 = 0, v_2 = Ax^\alpha, T_2 = T_w; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{при } y = y_\delta(x): u_1 = u_2, v_1 = v_2 = 0, T_1 = T_2, \\ \mu_1^* \left| \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|^{n_1-1} \frac{\partial u_1}{\partial y} = \mu_2^* \left| \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|^{n_2-1} \frac{\partial u_2}{\partial y}, \quad \lambda_1^* \left| \frac{\partial T_1}{\partial y} \right|^{m_1-1} \frac{\partial T_1}{\partial y} = \lambda_2^* \left| \frac{\partial T_2}{\partial y} \right|^{m_2-1} \frac{\partial T_2}{\partial y}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{при } y \rightarrow \infty: u_1 \rightarrow 0, T_1 \rightarrow T_\infty. \quad (4)$$

В (1)-(4) x - продольная координата, y - поперечная координата, u_i - продольные скорости, v_i - поперечные скорости, T_i - абсолютные температуры, ρ_i - плотности, β_i - коэффициенты теплового расширения, c_{p_i} - удельные теплоемкости, g - ускорение свободного падения. При $i=1$ уравнения (1) описывают течение во внешнем подслое ($y_\delta \leq y < +\infty$), а при $i=2$ - во внутреннем подслое ($0 \leq y < y_\delta$), $y_\delta(x)$ - уравнение поверхности разрыва.

2. Введем безразмерные переменные по формулам ($\Delta T = T_w - T_\infty$)

$$\begin{aligned} u_i = \zeta x^{1/2} \varphi'_i, \quad v_i = -\frac{\dot{u}}{2n_1+2} [(2n_1+1)\varphi_i - n_1\eta\varphi'_i], \quad T_i = T_\infty + \Delta T \mathcal{G}_i, \\ \eta = \zeta y x^{-1/2} \dot{u}^{-1}, \quad \zeta = g\beta_1 \Delta T, \quad \dot{u} = \left[(n_1 \mu_1^* / \rho_1) x^{-1/2} \zeta^{2n_1-1} \right]^{1/(n_1+1)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\varphi_i = \varphi_i(\eta)$, $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}_i(\eta)$ - безразмерные представители функций тока ψ_i и абсолютных температур T_i соответственно, η - независимая безразмерная переменная.

Подстановка (5) в (1)-(4) сводит решение исходной задачи к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$|\varphi_i''|^{n_i-1} \varphi_i'' + k_{i1} \left[\frac{2n_i+1}{2n_i+2} \varphi_i \varphi_i'' - \frac{1}{2} (\varphi_i')^2 \right] + k_{i2} \mathcal{G}_i = 0, \quad (6)$$

$$|\mathcal{G}_i'|^{m_i-1} \mathcal{G}_i'' + n_1 k_{i2}^{\alpha_1} k_\rho^{-1} \text{Pr}_i^* \left[n_1 \frac{2n_i+1}{2n_i+2} \varphi_i \mathcal{G}_i' + \text{Ec}_i^* k_{i2}^{-1} (\varphi_i')^{n_i+1} \right] = 0, \quad (7)$$

$$m_1 = \frac{1}{n_1}, \quad \alpha_1 = \frac{1-n_1}{n_1},$$

$$k_{11} = k_{12} = 1, \quad k_{21} = k_\mu/k_\rho, \quad k_{22} = k_\mu/k_\rho/k_\beta, \\ k_\mu = \mu_1^*/\mu_2^*, \quad k_\rho = \rho_1/\rho_2, \quad k_\beta = \beta_1/\beta_2$$

с граничными условиями на поверхности пластины при $\eta = 0$

$$\varphi_2(0) = C, \quad \varphi_2'(0) = 0, \quad \varphi_2''(0) = a_1, \quad \mathcal{G}_2(0) = 1, \quad \mathcal{G}_2'(0) = a_2 \quad (8)$$

на поверхности разрыва при $\eta = \eta_\delta$

$$\varphi_1(\eta_\delta) = \varphi_2(\eta_\delta) = 0, \quad \varphi_1'(\eta_\delta) = \varphi_2'(\eta_\delta), \quad \varphi_1''(\eta_\delta) = k_\mu^{-1/m_1} \varphi_2''(\eta_\delta), \\ \mathcal{G}_1(\eta_\delta) = \mathcal{G}_2(\eta_\delta), \quad \mathcal{G}_1'(\eta_\delta) = k_\lambda^{-1/m_1} \mathcal{G}_2'(\eta_\delta), \quad k_\lambda = \lambda_1^*/\lambda_2^* \quad (9)$$

и вдали от пластины при $\eta \rightarrow +\infty$

$$\varphi_1'|_{\eta \rightarrow +\infty} \rightarrow 0, \quad \mathcal{G}_1|_{\eta \rightarrow +\infty} \rightarrow 0. \quad (10)$$

Отметим, что уравнения неразрывности при подстановке (5) в (1) обращаются в тождества.

В (7) \mathbf{Pr}_i^* , \mathbf{Ec}_i^* - обобщенные числа Прандтля и Эккерта соответственно. Параметр $C < 0$ характеризует скорость вдува жидкости через поверхность пластины. Через a_1 , a_2 обозначены неизвестные начальные условия. Положение поверхности разрыва η_δ также является неизвестным и определяется в ходе решения.

В исходной постановке задачи фигурируют степени α , n_1 , n_2 , m_1 , m_2 . Если задаться целью отыскания автомодельных решений задачи (1)-(4) необходимо, чтобы уравнения и граничные условия в безразмерных переменных удовлетворяли определенным условиям, а именно, необходимо, чтобы (6)-(10) не зависели от координаты x . Это приводит к следующим зависимостям:

$$\alpha = -\frac{1}{2n_1+2}, \quad m_1 = m_2 = n_2^{-1} = n_1^{-1}. \quad (11)$$

Из (11) следует, что некоторые теплофизические характеристики жидкостей должны быть близки. Кроме того, степень в законе распределения скорости вдува вдоль пластины не может быть произвольной, она определяется реологической характеристикой n_1 .

Далее, обратим внимание на выражения для \mathbf{Ec}_i^* :

$$\mathbf{Ec}_i^* = \frac{g\beta_i X}{c_{pi}}. \quad (12)$$

В (12) в явном виде входит координата x , которая при исходной постановке задачи не может быть исключена. Таким образом, решения краевой задачи (6)-(10) при соблюдении условий (11) в случае учета вязкой диссипации

будут лишь частично автомодельными, а без учета этого эффекта - полностью автомодельными. Однако следует иметь в виду, что величина Ec^* для некоторых жидкостей может быть достаточно мала и не будет заметно влиять на автомодельность течения при умеренных значениях координаты x .

3. Краевая задача (6)-(10) решается с применением метода пристрелки. Параметры a_1 , a_2 и η_δ в ходе итерационной процедуры должны быть подобраны так, чтобы были удовлетворены условия (10) и 1-ое условие в (9). Из-за учета естественной конвекции тепловая задача должна решаться совместно с динамической [7, 8]. Понижение порядка системы по аналогии с тем, как это сделано в [9], не представляется возможным. Если обе жидкости обладают одинаковыми теплофизическими свойствами, то решение краевой задачи упрощается [10].

Как правило, предметом инженерного интереса, возникающего при исследовании ПС, является теплообмен между поверхностью тела и жидкостью. На рисунках показано распределение безразмерной плотности теплового потока через единицу площади на проницаемой пластине

$$\frac{q_w}{q_{w0}} = - \left(n_1 k_\beta^{n_1/2} k_{22} \right)^{-1/(n_1+1)} g_2'(0)$$

при следующих значениях параметров $Pr_1^* = 1$, $Pr_2^* = 2$, $k_\mu = 0.8$, $k_\rho = 1$, $k_\beta = 0.9$, $k_\lambda = 0.8$.

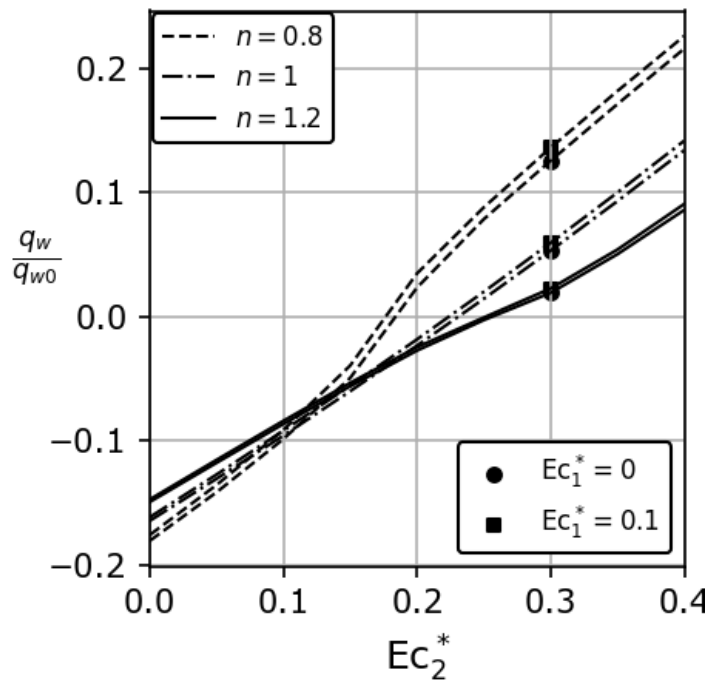


Рис.1 Тепловой поток, $C = -0.5$

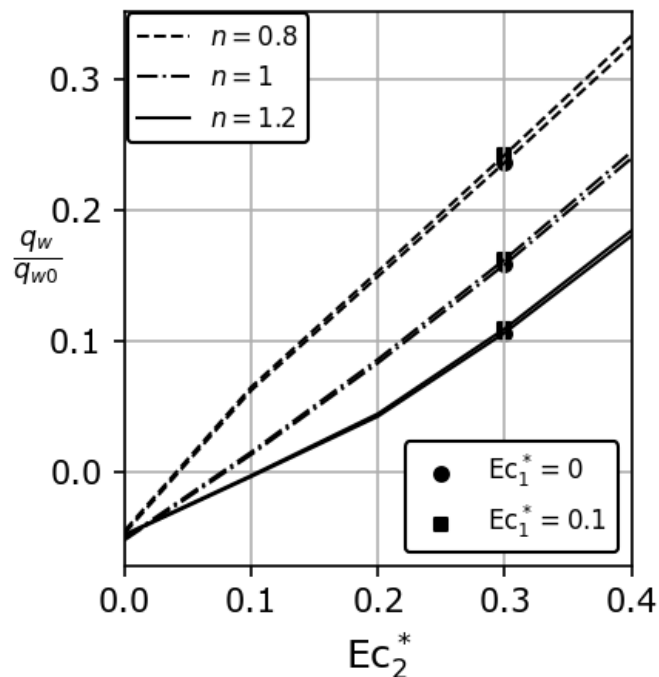


Рис.2 Тепловой поток, $C = -1.0$

Из рисунков 1 и 2 следует, что существует значение \overline{Ec}_2^* , при котором поток тепла между пластиной и ПС отсутствует. Если $Ec_2^* < \overline{Ec}_2^*$, то происходит нагрев жидкости, а если $Ec_2^* > \overline{Ec}_2^*$ - нагрев пластины. Значение \overline{Ec}_2^* тем меньше, чем больше скорость вдува, чем меньше n и чем больше Ec_1^* .

Литература

1. Яненко Н.Н., Шокин Ю.И. Об аппроксимационной вязкости разностных схем // Докл. АН СССР. 1968. Т. 182, № 2. С. 280–281.
2. Яненко Н.Н., Шокин Ю.И. О корректности первых дифференциальных приближений разностных схем // Докл. АН СССР. 1968. Т. 182, № 4. С. 776–778.
3. Черный Г.Г. Ламинарные движения газа и жидкости в пограничном слое с поверхностью разрыва // Изв. АН СССР, ОТН, 1954. № 12. С. 38-67.
4. Сулов А.И. О системе уравнений Прандтля для пограничного слоя с поверхностью разрыва // Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1976. Вып. 2. С. 243-259.
5. Бабиков П.Е., Ермак Ю.Н., Найда М.А. Исследование течения жидкой пленки на поверхности пластины при щелевом вдуве // Ученые записки ЦАГИ, 1991. Т. 22, № 3. С. 51-60.
6. Thompson E.R., Snyder W.T. Laminar boundary-layer flows of Newtonian fluids with non-Newtonian fluid injectants // J. Hydraulics, 1970. V. 4, № 2. P. 86-91. <https://doi.org/10.2514/3.48110>

7. Блинков Ю.А., Макеева А.А. Двухслойное конвективное течение вблизи поверхности затупленного пористого тела // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2021. Вып. 23. С. 79-81.
8. Блинков Ю.А., Макеева А.А. Двухслойное конвективное течение степенной неньютоновской жидкости вблизи передней критической точки затупленного пористого тела // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2023. Вып. 25. С. 109-113.
9. Кожанов В.С., Попова Е.В. Нестационарный ламинарный пограничный слой вблизи ускоряющейся бесконечной плоской горизонтальной пластины // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2019. Вып. 21. С. 79-81.
10. Кожанов В.С., Попова Е.В. Моделирование нестационарного пограничного слоя на плоской полубесконечной пластине в начальной стадии ее движения в неньютоновской жидкости // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках, 2019. № 2. С. 17-27.
11. Кожанов В.С., Уступкин Е.С. Применение метода преобразования к решению автомодельной задачи о слое смешения // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2016. Вып. 18. С. 107-110.
12. Кожанов В.С., Мыльцина А.С. Температурный пограничный слой вблизи передней критической точки затупленного тела с проницаемой поверхностью // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2018. Вып. 20. С. 97-99.