Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: mathmod.esrae.ru/49-202
Ссылка для цитирования этой статьи:
Макеев Н.Н. Стационарные движения твёрдого тела в эллиптическом пространстве // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2025. №1

УДК 531.9 DOI:10.24412/2541-9269-2025-1-19-28

СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА В ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Макеев Н.Н.

STATIONARY MOTIONS OF A RIGID BODY IN ELLIPTICAL SPACE

Makeev N.N.

Аннотация. Рассматриваются свойства движения свободного абсолютно твёрдого тела в эллиптическом пространстве постоянной положительной кривизны (пространстве Римана). Определено многообразие регулярных и нерегулярных стационарных движений тела, движущегося по инерции. Исследована устойчивость стационарных движений при бифуркациях. Получено особое многообразие стационарных движений тела с осевой структурно-кинетической симметрией, движущегося в поле сил, зависящих от скорости вращения и сдвига. Представлен критерий устойчивости стационарного движения и условие существования бифуркаций особого многообразия. Установлено, что бифуркации существуют для множеств как устойчивых, так и неустойчивых положений равновесия тела. Определено существование вырожденных стационарных движений, порождаемых устойчивыми и неустойчивыми положениями равновесия тела.

Ключевые слова: твёрдое тело, стационарное движение, эллиптическое пространство, устойчивость стационарного состояния, бифуркация

Abstract. The properties of motion of a free absolutely rigid body in an elliptic space of constant positive curvature (Riemann space) are considered. The manifold of regular and irregular stationary motions of a body moving by inertia is determined. The stability of stationary motions with bifurcations is investigated. A special diversity of stationary body motions with axial structural-kinetic symmetry has been obtained, moving in a field of forces that depend on the speeds of rotation and displacement. A criterion for the stability of stationary motion and a condition for the existence of bifurcations of a special manifold are presented. It has been established that bifurcations exist for sets of both stable and unstable equilibrium positions of a body. The existence of degenerate stationary motions generated by stable and unstable equilibrium positions of a body is determined.

Keywords: rigid body, stationary motion, elliptical space, stability of stationary state, bifurcation

2025, №1
ISSN 2541-9269

Введение. В работе [1] приведены уравнения движения свободного абсолютно твёрдого тела, происходящего в трёхмерном эллиптическом пространстве под воздействием сил. В этой работе доказано существование алгебраических первых интегралов системы динамических уравнений тела в его инерционном движении, а также дополнительных по Уиттекеру [2, 84] квадратичных интегралов. Приведены доказательства аналитических свойств этих интегралов: их линейная зависимость и парная функциональная независимость. Рассмотрен случай стационарного винтового движения тела по инерции, обладающего центральной структурно-кинетической симметрией. Настоящая статья содержит продолжение данных исследований.

1. Предварительные положения и уравнения движения. Рассматриваются свойства движения свободного от связей абсолютно твёрдого тела, находящегося в поле сил трёхмерного пространства Римана S_3 с абсолютом, заданным уравнением

$$g_{ij}\, x^i x^j \equiv \sum_{s=1}^{4} (x^s)^2 = 0, \tag{1}$$

где g_{ij} – метрический тензор с вейерштрассовыми координатами. Под *вектором* в данном пространстве понимается простой бивектор, отождествляемый с соответствующим скользящим вектором. При этом бивектор, определяемый линейной комбинацией плюккеровых координат, рассматривается как *винт* данного пространства.

Введём автополярный относительно абсолюта (1) координатный тетраэдр $T = (e_1\, \ldots\, e_4)$ с вершинами – точками $e_i\, (i = \overline{1, 4})$, отождествляемый с *главным тетраэдром инерции* тела. Оси прямоугольных координат, совпадающие с рёбрами этого тетраэдра, принимаются за *главные оси инерции тела*, а его вершина e_4 – за *центр инерции* (центр масс). При этом моменты инерции тела относительно главных осей инерции принимаются за *главные осевые моменты инерции вращения*. Сдвиг пространства S_3 – одно из его свойств, позволяющее ввести понятия *главных моментов инерции сдвига* тела относительно осей координатного тетраэдра T [3].

Обозначим: $A_{r4}, B_{s4}\, (r, s = 1, 2, 3)$ – главные моменты инерции вращения и сдвига; $\mathbf{\Omega}\, (\omega^{r4}), \mathbf{V}(v^{s4})$ – бивекторы скоростей вращения и сдвига тела, заданные относительно тетраэдра T компонентами $\omega^{r4}, v^{s4}; \mathbf{L}(L^{r4}), \mathbf{N}(N^{s4})$ $(r,\ s = 1,\ 2,\ 3)$ – составляющие силового винта, соответствующие вращению и сдвигу тела, соответственно; k – длина радиуса гауссовской кривизны данного пространства.

В работе [1] приведены динамические уравнения твёрдого тела, движущегося в пространстве S_3:

$$\begin{aligned} &A_{14}\, \dot{\omega}^{14} + (B_{14} - B_{34})(\omega^{34}\omega^{24} - v^{34}v^{14}) = k^2 L^{14} \\ &B_{14}\, \dot{v}^{14} + (A_{24} - B_{24})(\omega^{14}v^{34} - \omega^{24}v^{24}) = k^2 N^{14} \end{aligned} \qquad (1,\ 2,\ 3). \tag{2}$$

Равенства (2) образуют систему шести уравнений, заданную приведёнными уравнениями-представителями; символ (1, 2, 3) здесь и всюду далее означает, что остальные уравнения данной системы могут быть получены из представленных циклической перестановкой индексов 1, 2, 3. Эта совокупность уравнений является многопараметрической системой эволюционного типа с квадратичной нелинейностью и задана в открытой регулярной области эллиптического пространства S_3.

Система уравнений (2) при условиях

$$L^{14} = N^{14} \equiv 0 \qquad (1, 2, 3) \tag{3}$$

определяет движение тела по инерции. Динамические уравнения инерционного движения свободного твёрдого тела в данном пространстве получены в работе [4], где приведён простейший частный случай их интегрирования.

2. Многообразия стационарных движений. В работе [1] доказано существование первых алгебраических интегралов системы уравнений (2), имеющих место при условиях (3), определяющих движение тела по инерции. Эти интегралы имеют вид:

$$U_1 \equiv \sum_{r=1}^{3}[(A_{r4}\omega^{r4})^2 + (B_{r4}v^{r4})^2] = h_1^2, \tag{4}$$

$$U_2 \equiv \sum_{(123)}(A_{14}\omega^{14})(B_{24}v^{24}) = h_2, \tag{5}$$

$$U_3 \equiv \sum_{r=1}^{3}[A_{r4}(\omega^{r4})^2 + B_{r4}(v^{r4})^2] = h^2. \tag{6}$$

В равенствах (4)–(6) h_1, h_2, h – постоянные интегрирования; в соотношении (5) символ (1 2 3) обозначает суммирование по величинам, получаемым циклической перестановкой числовых индексов в приведённых величинах.

Интегралы (4)–(6) являются инвариантами движения твёрдого тела по инерции и выражают постоянность модуля кинетического винта, неизменность величины проекции этого винта на его динамическую ось (аналог интеграла Э. Нетер [5, 76]), постоянность величины кинетической энергии тела.

Ранее выражения для этих интегралов без доказательства их существования были приведены в работе [4] и даны на основе эвристических положений, представленных в вербальной форме.

Рассмотрим многообразие стационарных движений тела, определяемых системой условий

$$\omega^{r4}(t) = \omega_0^{r4}, \qquad v^{s4}(t) = v_0^{s4} \qquad (r, s = 1, 2, 3), \tag{7}$$

Далее для значений $(L^{14}, N^{14}) = \mathrm{const}$ обозначим

$$L^{14} = m^{14}, \qquad N^{14} = n^{14} \qquad a_1 = B_{14} - B_{34}, \qquad b_1 = A_{24} - B_{24} \qquad (1, 2, 3)$$

и используем систему уравнений (2) при условиях (7) (здесь и всюду далее нулевой индекс опускается):

$$\begin{gathered} a_1(\omega^{34}\omega^{24}-v^{34}v^{14})=k^2m^{14} \\ b_1(\omega^{14}v^{34}-\omega^{24}v^{24})=k^2n^{14} \\ (1,2,3). \end{gathered} \tag{8}$$

Система уравнений (8) определяет многообразие стационарных движений тела как континуум и как дискретное множество.

При движении тела по инерции, происходящего согласно условиям

$$m^{14}=n^{14}\equiv 0, \qquad (a_1, b_1)\neq 0 \qquad (1,2,3),$$

из уравнений (8) получаем многообразие движений (7) с условиями

$$\frac{\omega^{14}}{v^{24}}=\frac{\omega^{24}}{v^{34}}=\frac{\omega^{34}}{v^{14}} \qquad (\omega^{r4}, v^{s4})\neq 0 \qquad (r,s=1,2,3).$$

Эти условия определяют *спиральное стационарное движение* тела, которое в определённом смысле является аналогом стационарного винтового движения тела в гиперболическом пространстве постоянной отрицательной кривизны (пространстве Лобачевского) [3].

Введём линейную связку интегралов (4)–(6)

$$U(\alpha,\beta)=U_1+\alpha U_2+\beta U_3, \tag{9}$$

где α, β – постоянные неопределённые множители. Интегральную связку (9) можно интерпретировать как линейное пространство данных интегралов над собственно евклидовом пространством параметров динамической системы, выбирая данные интегралы за базисные.

Многообразие стационарных движений тела в его инерционном движении описывается системой необходимых условий существования условного экстремума интегральной функции U (9):

$$\begin{gathered} q_{14}\equiv\frac{\partial U}{\partial\omega^{14}}=A_{14}[2(A_{14}+\beta)\omega^{14}+\alpha B_{24}v^{24}] \\ p_{14}\equiv\frac{\partial U}{\partial v^{14}}=B_{14}[2(B_{14}+\beta)v^{14}+\alpha A_{34}\omega^{34}] \\ (1,2,3). \end{gathered} \tag{10}$$

Система уравнений (10) определяет множество *преобразований Лежандра* (контактного преобразования или инволюции Лежандра [5, 330]) вида

$$(\omega^{r4}, v^{s4})\to(q_{r4}, p_{s4}) \qquad (r,s=1,2,3),$$

параметризованное через α, β. Согласно этому преобразованию многообразие стационарных движений тела в новых переменных описывается системой

$$q_{r4}=0, \qquad p_{s4}=0 \qquad (r,s=1,2,3). \tag{11}$$

Известно [5], что невырожденное преобразование Лежандра обратимо и аналитически устойчиво. Это свойство относится и к преобразованию, порождающему стационарное многообразие (11). Тогда стационарное состояние тела, определяемое соотношениями (7) и, следовательно, соответствующее этому преобразованию, также аналитически устойчиво по отношению к исходным переменным.

Обозначим

$$m_1 = 2B_{14}(B_{14} + \beta), \qquad n_1 = \alpha A_{14} B_{14}, \qquad l_1 = 2A_{14}(\beta - A_{14}) \qquad (1, 2, 3)$$

и введём симметрическую матрицу Гессе (гессиан):

$$H = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & n_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & n_3 \\ n_1 & 0 & 0 & l_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 & 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 & 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix}.$$

Определитель Якоби $J = \det H$ данного преобразования Лежандра, согласно соотношениям (10) равный

$$J(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^{3}(m_i l_i - n_i^2),$$

представляется в виде

$$J(\alpha, \beta) = \prod_{(1\,2\,3)} A_{14} B_{14} [4(B_{14} + \beta)(\beta - A_{14}) - \alpha^2 A_{14} B_{14}], \qquad (12)$$

где символ (1, 2, 3) означает произведение выражений, получаемых из данного путём циклической перестановки индексов 1, 2, 3.

Определим случаи, при которых преобразование Лежандра сохраняет свойство невырожденности, а также некоторые случаи его вырождения. Значения множителей $\alpha, \beta,$ для которых согласно равенсту (12) имеем $J \neq 0,$ соответствует группе невырожденных преобразований Лежандра. Эти значения на множестве возможных должны удовлетворять условиям, определяемым системой неравенств

$$\beta \neq \frac{1}{2}[b_3 \pm \sqrt{(A_{14} + B_{14})^2 + \alpha^2 A_{14} B_{14}}] \qquad (1, 2, 3). \qquad (13)$$

При выполнении условий (13) точке шестимерного пространства квазикоординат

$$q_{r4} = p_{s4} = 0 \qquad (r, s = 1, 2, 3) \qquad (14)$$

соответствует многообразие стационарных движений тела, определяемое системой уравнений (10). Исключая из данного многообразия состояние тела, при котором

$$\omega^{r4} = v^{s4} = 0 \qquad (r, s = 1, 2, 3), \tag{15}$$

согласно соотношениям (10), (14) получаем

$$\alpha^2 A_{14} B_{24} - 4(A_{14} + \beta)(B_{24} + \beta) = 0 \qquad (1, 2, 3). \tag{16}$$

Равенства (15) определяют стационарную точку шестимерного пространства квазикоординат, соответствующую состоянию статического равновесия твёрдого тела, при котором также выполняются условия (16).

Таким образом, стационарное состояние тела, определяемое равенствами (7), является *регулярной* (без особенностей) частью полного многообразия стационарных движений твёрдого тела.

В задаче исследования стационарных движений тела в пространстве S_3 могут иметь место случаи существования множества значений параматров Лагранжа α, β, для которых в пространстве переменных динамической системы ранг гессиана $\operatorname{rang} H < 6$ (меньше размерности пространства). В этих случаях якобиан преобразования $J = 0$ и тогда группа преобразований Лежандра является *вырожденной*, порождающей многообразие вырожденных (нерегулярных) стационарных движений тела, которые далее не рассматриваются. Аналогичным образом, не рассматривается и случай, при котором в равенстве (12) имеет место значение, определяемое равенством

$$4(B_{14} + \beta)(\beta - A_{14}) - \alpha^2 A_{14} B_{14} = 0, \tag{17}$$

тогда как остальные сомножители этого равенства – ненулевые. В этом случае согласно условию (17) не выполняется по крайней мере одно из условий (13) и преобразование Лежандра также является вырожденным.

3. Устойчивость стационарного состояния тела при бифуркациях. Рассмотрим особенности инвариантных многообразий тела, основываясь на свойствах системы его первых алгебраических интегралов. Актуальность этого исследования обусловлена его связью с задачами анализа структуры фазового пространства динамической системы твёрдого тела [6].

Введём кинетические тождества, доказанные для пространства S_3 [4]:

$$A_{14} + B_{24} = A_{24} + B_{34} = A_{34} + B_{14} = k^2 M, \tag{18}$$

где M – величина массы тела, и для анализа вращательной части движения тела рассмотрим подсистему, образованную первыми тремя уравнениями системы (2). Этим допускается гипотетически принимаемое положение о парциальности состояния тела, при котором существует его выделенное собственно вращательное движение в данном пространстве. Тогда преобразованная система уравнений (2) для принятых условий, при которых

$$(v^{s4}, n^{s4}) \equiv 0 \qquad (s = 1, 2, 3),$$

2025, №1
ISSN 2541-9269

имеет вид

$$A_{14}\dot{\omega}^{14} + a_1\omega^{24}\omega^{34} = k^2 m^{14} \qquad (1, 2, 3). \tag{19}$$

Обозначим $\omega^{14} = u,\ \omega^{24} = v$ и примем, что тело обладает осевой структурно-кинетической симметрией, при которой $B_{24} = B_{34}$. Тогда, согласно тождеству (18) имеем $A_{14} = A_{24} = A$, а из системы уравнений (20), полагая $m^{34} \equiv 0$, получаем $\omega^{34}(t) = \omega_0^{34} \neq 0$. При этих условиях уравнения (19) принимают вид

$$\dot{u} + Kv = F_1, \qquad \dot{v} - Ku = F_2, \tag{20}$$

где обозначено

$$K = A^{-1}a\omega_0^{34}, \qquad a = a_1 = -a_2 \neq 0, \qquad F_r = A^{-1}k^2 m^{r4} \qquad (r = 1, 2),$$

причём m^{r4} – заданные функции, определяемые равенствами

$$m^{14} = -Ak^{-2}c_1\int_0^t u\,d\tau, \qquad m^{24} = -Ak^{-2}c_2\int_0^t v\,d\tau.$$

В силу этого функции F_1, F_2, содержащиеся в уравнениях (20), определяются равенствами

$$F_1 = -c_1\int_0^t u\,d\tau, \qquad F_2 = -c_2\int_0^t v\,d\tau \qquad (c_1, c_2) > 0 \tag{21}$$

где постоянные c_1, c_2 – заданные характерные динамические параметры активных внешних сил.

Согласно выражениям (21) система уравнений (20) преобразуется к виду

$$\ddot{u} + c_1 u = -K\dot{v}, \qquad \ddot{v} + c_2 v = K\dot{u}. \tag{22}$$

Исследуем устойчивость многообразия стационарных состояний тела, определяемых системой уравнений (22), следуя подходу, применённому в работе [8]. Эта система уравнений имеет первый интеграл (интеграл энергии)

$$W_1 \equiv \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + c_1 u^2 + c_2 v^2 = D_1^2, \tag{23}$$

а также инвариант, существующий на множестве целых функций и представляемый квадратичной формой F:

$$W_0 \equiv F(\dot{u}, \dot{v}, u, v; K, c_1, c_2) = D_2, \tag{24}$$

где D_1, D_2 – произвольные постоянные (для D_2 эта произольность понимается как произвольный выбор начальных условий). Существование инваианта (24) обусловлено тем, что всякая динамическая система данного вида имеет если не точный интеграл, то, по крайней мере, адиабатический инвариант [5].

Положение равновесия динамической системы (22)

$$u = v = 0, \qquad \dot{u} = \dot{v} = 0, \tag{25}$$

ISSN 2541-9269

существующее в пространстве квазикоординат, является *особым стационарным состоянием* тела (термин [7]). Введём интегральную связку по Лагранжу

$$W\,(\dot{u},\dot{v},u,v)=W_0+\ell W_1, \tag{26}$$

где ℓ – множитель Лагранжа.

Многообразие *W* (26) параметризовано параметром $K\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\equiv P$ и для положения равновесия динамической системы (22) является *особым интегральным многообразием*, существующим при значениях параметра ℓ из интервала $\ell\in(-\infty,+\infty)\equiv Q$. Вследствие этого положению (25) ставится в соответствие особое многообразие в виде множества значений параметра $K\ell$. Здесь каждому фиксированному значению параметра $K\in P$ для данного положения равновесия однозначно соответствует значение параметра $\ell\in Q$.

Согласно критерию знакоопределённости квадратичной формы W_0 [8] получаем необхоимое и достаточное условие устойчивости тривиального решения динамической системы (22) по переменным $(\dot{u},\dot{v},u,v)$ в виде

$$R(K)=K^2-D^2>0,\qquad D=\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}. \tag{27}$$

Из соотношения (27) следует, что данное решение устойчиво, если выполняется ограничение

$$C=a\left|\omega_0^{34}\right|>AD. \tag{28}$$

Условие для якобиана $J(\ell)=0$, соответствующее стационарности функции *W* (26), позволяет получить условие, налагаемое на значения параметра ℓ, обуславливающее существование бифуркации особого множества. Это условие имеет вид

$$R(K)\overline{R}(K)\geq 0, \tag{29}$$

где обозначено $\overline{R}(K)=K^2-\overline{D}^2$, $\overline{D}=\sqrt{c_1}-\sqrt{c_2}$. Если выполняется условие (27), то ограничение (29) сводится к соотношению (28), в котором параметр *D* заменён на $\left|\overline{D}\right|$.

Из условия (29) следует, что бифуркации особого многообразия существуют в следующих случаях:

– для множества устойчивых положений равновесия – при выполнении условия (27);

– для подмножества неустойчивых положений равновесия – при значениях параметра *K*, соответствующих ограничению $\overline{R}(K)\leq 0$. Это условие сводится к неравенству $C<A\left|\overline{D}\right|$, где величина параметра *C* определяется равенством (28).

Введём зависимости

$$\Phi(K)=\mu-q,\qquad \overline{\Phi}(K)=\mu+q,\qquad q=K^{-1}(c_2-c_1), \tag{30}$$

 2025, №1
ISSN 2541-9269

где μ – заданный постоянный динамический параметр, величина которого определяется свойствами внешних сил.

Аналогичным образом можно показать, что:

– от устойчивых положений равновесия отделяются два вырожденных устойчивых многообразия, определяемых соотношениями

$$\Phi(K)\dot{u}+2c_2v=0, \qquad \overline{\Phi}(K)\dot{v}-2c_1u=0,$$

где функции $\Phi, \overline{\Phi}$ заданы равенствами (30);

– от неустойчивых положений равновесия для значений $-\overline{D}\le K\le\overline{D}$ отделяются два неустойчивых вырожденных многообразия.

4. Основная динамическая система. Под основной динамической системой здесь понимается система динамических уравнений (2). Представим эту систему в альтернативной форме.

Величина кинетической энергии тела, движущегося в пространстве S_3, определяется равенством [1]

$$T=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{3}[A_{r4}(\omega^{r4})^2+B_{r4}(v^{r4})^2]. \tag{31}$$

Примем определяющие условия

$$A_{r4}\ne 0, \qquad B_{s4}\ne 0 \qquad (r,s=1,2,3). \tag{32}$$

Структурно-кинетические условия (32) означают, что твёрдое тело не является бесконечно тонким стержнем и не вырождается в материальную точку. Тогда, согласно соотношениям (31), (32) система уравнений (2) с учётом кинетических тождеств (18) может быть представлена в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\omega^{14}}\right)+\left(\frac{1}{A_{34}}-\frac{1}{A_{24}}\right)\frac{\partial T}{\partial\omega^{24}}\frac{\partial T}{\partial\omega^{34}}+\left(\frac{1}{B_{14}}-\frac{1}{B_{34}}\right)\frac{\partial T}{\partial v^{14}}\frac{\partial T}{\partial v^{34}}=Q_1 \quad (1,2,3), \tag{33}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v^{14}}\right)+\left(\frac{1}{B_{34}}-\frac{1}{A_{14}}\right)\frac{\partial T}{\partial\omega^{14}}\frac{\partial T}{\partial v^{34}}+\left(\frac{1}{A_{24}}-\frac{1}{B_{24}}\right)\frac{\partial T}{\partial\omega^{24}}\frac{\partial T}{\partial v^{24}}=P_1 \quad (1,2,3), \tag{34}$$

где Q_r, P_s – символы обобщённых сил, содержащиеся в системе уравнений (2).

Уравнения (33), (34) могут быть представлены в более короткой и компактной форме, если воспользоваться их выражением через матрицу (или коммутатор) Пуассона [2, 15], однако такая абстрактная форма представления менее удобна для применения в практических целях.

Форма представления уравнений (33), (34) аналогична соотношениям, применённым в работах Пуанкаре, Чаплыгина (в задачах о движении тела в идеальной жидкости), Четаева, а также в работах П.В. Харламова [9, 10].

Литература

1. Макеев Н.Н. Интегралы уравнений движения твёрдого тела в эллиптическом пространстве // Вестник науки. 2025. Т. 2. № 2 (83). С. 739–749.
2. Джакалья Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.
3. Широков А.П. Винтовая регулярная прецессия в пространстве Лобачевского // Учёные записки Казанского ун-та. 1963. Т. 123. Кн. 1. С. 196–207.
4. Косогляд Э.И. Движение однородного шара в эллиптическом пространстве. М. 1982. Деп. в ВИНИТИ 01.06. 82, № 2699-82. 18 с.
5. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука. 1974. 432 с.
6. Смейл С. Топология и механика // Успехи математических наук. 1972. Т. 27. № 2. С. 78–113.
7. Иртегов В.Д. О смене устойчивости при бифуркациях // Проблемы аналитической механики, устойчивости и управления движением. Новосибирск: Наука. 1991. С. 73–79.
8. Кузьмин П.А. Малые колебания и устойчивость движения. М.: Наука. 1973. 207 с.
9. Харламов П.В. О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Прикладная механика и техническая физика. 1963. Т. 4, № 4. С. 17–29.
10. Харламов П.В. О решениях уравнений динамики твёрдого тела // Прикладная математика и механика. 1965. Вып. 3. С. 567–572.