Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: **mathmod.esrae.ru/49-203**
Ссылка для цитирования этой статьи:
Мирошников В.И. Термофлуктуационная модель деформирования и разрушения на примере коелгинского мрамора // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2025. №1

УДК 622.011:539.3 DOI:10.24412/2541-9269-2025-1-29-45

ТЕРМОФЛУКТУАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ НА ПРИМЕРЕ КОЕЛГИНСКОГО МРАМОРА

В.И. Мирошников
Институт горного дела Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИГД ДВО РАН) обособленное подразделение Хабаровского Федерального исследовательского центра Дальневосточного отделения Российской академии наук (ХФИЦ ДВО РАН)
Россия, Хабаровск, mirosh19@bk.ru,

THERMAL FLUCTUATION MODEL OF DEFORMATION AND DESTRUCTION USING KOELGINSKY MARBLE AS AN EXAMPLE

V.I. Miroshnikov
Institute of Mining of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences (IGD FEB RAS)
a separate unit of the Khabarovsk Federal Research Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences (KhFIC FEB RAS) Russia, Khabarovsk, mirosh19@bk.ru.

Аннотация. Предложена модель, описывающая термофлуктуационные процессы пластического деформирования и микротрещинообразования в геосреде. Кинетические свойства материала представлены характеристическими функциями твердости и хрупкости, характеризующие сопротивление пластической и хрупкой деформации геосреды. Аргументами этих функций являются: температура, главные компоненты тензора напряжений, и структурные параметры интенсивность пластических деформаций и пористость материала.

Ключевые слова: Деформирование горных пород, термофлуктуационный процесс, пластичность, микротрещинообразование

Abstract. A model describing thermo fluctuation processes of plastic deformation and microcrack formation in the geo-environment is proposed. The kinetic properties of the material are represented by characteristic functions of hardness and brittleness, characterizing the resistance to plastic and brittle deformation of the geo-environment. The arguments of these functions are: temperature, the main components of the stress tensor, and structural parameters, the intensity of plastic deformations and the porosity of the material.

Keywords: Deformation of rocks, thermal fluctuation process, plasticity, microcrack formation

Разработка месторождений полезных ископаемых всегда сопровождается деформированием и разрушением горных пород, и управление этими процессам в нужном направлении имеет большое значение в горном деле. С увеличением глубины разработки ужесточаются условия устойчивости выработок, влияющие на безопасность проведения горных работ, а применение динамических способов разработки в тех же выработках накладывает требования решать задачи с широким диапазоном изменяющихся во времени параметров процессов [1]. Исследования геомеханического состояния геосред в сложных горно-геологических условиях и на больших глубинах численными методами осуществляются на основе упрощенных моделей твердого тела [2-4]. Существующие в настоящее время теории пластичности и прочности материалов [5-7] не отражают в полной мере результаты экспериментальных исследований таких сложных объектов [8--10]. Состояние горных пород в области концентрации механических напряжений с течением времени претерпевает значительные изменения.

С ростом возможностей цифровой техники на второй план уходят вопросы сложности алгоритмов, а на первый план выходят проблемы достаточной точности описания многофакторных физических процессов, а так же накопления баз данных о свойствах горных пород. Состояние горных пород в области концентрации механических напряжений с течением времени претерпевает значительные изменения. Для более адекватного описания сложных геомеханических процессов, протекающих в геосредах в настоящей работе предлагается модель деформирования материала, разработанная на основе термофлуктуационной теории, учитывающая зависимость свойств от структурных параметров напряженно-деформированного состояния.

1. Кинетическая концепция прочности

Наиболее обоснованы теоретические представления о кинетических процессах деформирования и разрушения в широкой области параметров состояния (напряжения и температуры) предложены в концепции прочности твердых тел С.Н.Журкова [11,12], охватывающие временной интервал в десять порядков. В отличие от наиболее распространенной концепции предельных состояний основным положением кинетической концепции С.Н. Журкова является положение о том, что разрушение твердых тел не является критическим событием. Согласно этой концепции, деформирование и разрушение представляют собой кинетические процессы, идущие в пространстве и времени.

Термофлуктуационная природа деформирования и разрушения твердых тел приводит к выражению долговечности одноосного растяжения до разрушения с использованием фактора Больцмана:

$$\tau = \tau_0 \exp\left(\frac{U_0 - \gamma\sigma}{kT}\right), \tag{1}$$

где

τ_0 - константа, определяющая кинетику разрушения,
U_0 - энергия активации;
T - температура;
σ - растягивающее напряжение;
γ - активационный объём;
k - постоянная Больцмана.

Аналогичное выражение скорости необратимого процесса пластической деформации:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_0 \exp\left(-\frac{U_0 - \gamma\sigma}{kT}\right), \tag{2}$$

где $\dot{\varepsilon}_0$ - константа, определяющая кинетику пластического течения. Оба предэкспонециальных множителя предполагаются универсальными константами, имеющими порядок $\tau_0 \sim 10^{-13} s$ $\dot{\varepsilon}_0 \sim 10^{13} s^{-1}$ [12], а их произведение

$$\tau_0 \dot{\varepsilon}_0 = const, \tag{3}$$

полученное для установившейся стадии ползучести, определяет связь разрушения и деформации. При этом параметры $\{\tau_0, U_0\}$ остаются неизменными. Выражения (1-2) однако имеют существенные различия: τ - интегральное время процесса, $\dot{\varepsilon}_0(t)$ - переменная функция времени. Оба выражения получены для условий $\sigma = const$. Но второе предполагается использовать при переменном напряжении. В выражении (1) параметр $\gamma = \phi(T, \sigma)$ - является функцией температуры и напряжения. Как показывают опыты с некоторыми материалами γ меняет свое значение на разных стадиях деформации ползучести [12].

Аргумент экспоненты величина безразмерная, удобно выражается через относительные величины. Представим (2) в виде:

$$\dot{\varepsilon}^{\eta} = \dot{\varepsilon}_0 \exp\left(-\frac{T_A}{T}\right) \exp\left(\frac{\sigma}{\sigma_h(T)}\right), \tag{4}$$

где $\sigma_h(T) = \frac{kT}{\gamma}$ - фактор твердости, $T_A = \frac{U_A}{k}$ - температура активации пластического процесса [13,14]. Такая замена на наш взгляд является более наглядной. В описании процесса ползучести время присутствует явным образом

ISSN 2541-9269

[15]. Разделение деформаций на вязкие и пластические условное, что позволяет определить вязкость процесса.

2. Разложение тензора деформации

Перейдем к трехмерному описанию процесса деформирования элемента среды (образца). Будем различать необратимые термофлуктуационные процессы двух видов. Это пластические (вязкопластические) сдвиговые деформации, которые происходят без изменения плотности материала, и хрупкие деформации при образовании дефектов или микротрещин, которые имеют конечный объем и приводят к дилатансии материала. Оба этих процесса зависят главным образом от времени и от девиатора напряжений. Для простого осесимметричного нагружения полные тензоры деформации $\overset{\circ}{\varepsilon}$ (кружок сверху) и соответственно скоростей деформации $\overset{\circ}{\dot{\varepsilon}}$ разложим на слагаемые: упругие объёмную $\overset{\circ}{\varepsilon}{}^{V}$, сдвиговую $\overset{\circ}{\varepsilon}{}^{\lambda}$, и необратимые - пластическую $\overset{\circ}{\varepsilon}{}^{\eta}$ и хрупкого микротрещинообразования $\overset{\circ}{\varepsilon}{}^{\zeta}$ [16]:

$$\overset{\circ}{\varepsilon} = \overset{\circ}{\varepsilon}{}^{V} + \overset{\circ}{\varepsilon}{}^{\lambda} + \overset{\circ}{\varepsilon}{}^{\eta} + \overset{\circ}{\varepsilon}{}^{\zeta},$$

$$\overset{\circ}{\dot{\varepsilon}} = \overset{\circ}{\dot{\varepsilon}}{}^{V} + \overset{\circ}{\dot{\varepsilon}}{}^{\lambda} + \overset{\circ}{\dot{\varepsilon}}{}^{\eta} + \overset{\circ}{\dot{\varepsilon}}{}^{\zeta}. \tag{5}$$

2.1. Обратимые деформации

Приведем уравнения зависимости упругой деформации от тензора напряжений. Предполагаем, что элемент тела содержит материал, деформируемый как сплошное тело под действием среднего напряжения и девиатора с постоянными модулями упругости. Пустоты трещин, удерживаемые берегами в квазиравновесном состоянии сопротивления внешним напряжениям, в итоге приводят к нелинейной упругости в случае рассмотрения элемента тела как единого [17, 18].

Пусть тензор напряжений сжатия, обозначим его $\overset{\circ}{p}$ в отличие от тензора напряжений растяжения $\overset{\circ}{\sigma} = -\overset{\circ}{p}$, имеет главные компоненты $p_1 \geq p_2 \geq p_3$. Девиатор напряжений есть тензор $\Delta\overset{\circ}{p} = \overset{\circ}{p} - \hat{p}\,\overset{\circ}{\mathrm{I}}$, где $\hat{p} = \frac{1}{3}\left(p_1 + p_2 + p_3\right)$ - первый инвариант тензора напряжений. Квадратичный инвариант девиатора напряжений (интенсивность) $\Delta p_{Int} = \sqrt{\left(\Delta p_1\right)^2 + \left(\Delta p_2\right)^2 + \left(\Delta p_3\right)^2}$. В приближении линейной упругости для бездефектного элемента

ISSN 2541-9269

$$\hat{p} = -K\ \varepsilon^V, \quad \text{и} \quad \overset{\circ}{\Delta p} = -2G\,\overset{\circ}{\varepsilon^{\lambda}}, \tag{6}$$

где K,G - объёмный и сдвиговый модули упругости, $\varepsilon^V = tr\left(\overset{\circ}{\varepsilon^V}\right)$. Тогда

$$\dot{\varepsilon}^V = -\hat{p}/K \quad \text{и} \quad \overset{\circ}{\dot{\varepsilon}^{\lambda}} = -\tfrac{1}{2}\overset{\circ}{\Delta\dot{p}}/G. \tag{7}$$

2.2. Необратимые пластические процессы деформирования

В основе предложенной в [19] теории пластичности горных пород лежат кинетические представления С.Н. Журкова. Интенсивность тензора скоростей деформации определяется выражением [14]:

$$\dot{\varepsilon}^{\eta}_{Int} = \dot{\varepsilon}^{\eta}_0 \exp\left(-\frac{T_H}{T}\right)\exp\left(\frac{\Delta p_{Int}}{\sigma_h(T, p_{\min}, \Xi_j)}\right) \tag{8}$$

Тензор скорости пластической деформации:

$$\overset{\circ}{\dot{\varepsilon}^{\eta}} = -\dot{\varepsilon}^{\eta}_{Int}\frac{\overset{\circ}{\Delta p}}{\Delta p_{Int}}, \tag{9}$$

где $\dfrac{\overset{\circ}{\Delta p}}{\Delta p_{Int}}$ - безразмерный тензор, указывающий распределение пластических деформаций по трем главным компонентам; $\sigma_h(T, p_{\min}, \Xi_j)$ - фактор твердости, функция, определяющая процесс пластического деформирования, зависящая от температуры, одного из инвариантов тензора напряжений и структурных параметров; Ξ_j - набор структурных параметров; T_H температура активации пластического процесса, $\dot{\varepsilon}^{\eta}_0$ - константа - предэкспоненциальный множитель. Согласно формулы (8) $-\overset{\circ}{\dot{\varepsilon}^{\eta}} \sim \overset{\circ}{\Delta p}$. Первые инварианты девиаторов

$$tr\left(\overset{\circ}{\dot{\varepsilon}^{\eta}}\right) = 0 \quad \text{и} \quad tr\left(\overset{\circ}{\Delta p}\right) = 0.$$

Соответственно квадратичные инварианты $\dot{\varepsilon}^{\eta}_{\text{int}} \sim \Delta p_{\text{int}}$. Тогда для схемы нагружения Кармана $\dfrac{\overset{\circ}{\dot{\varepsilon}^{\eta}}}{\dot{\varepsilon}^{\eta}_{Int}} = diag(-0.816 \quad 0.408 \quad 0.408)$.

Инварианты безразмерного тензора равны соответственно $\{0, 1\}$ Эта пропорция и есть коэффициент поперечного расширения несжимаемого материала равный 0.5.

2.3. Микротрещинообразование (хрупкие деформации)

В основе, предложенной в теории прочности горных пород [19], так же лежат кинетические представления С.Н. Журкова. В работе [12] также утверждается, что разрыв химических связей при трещинообразовании имеет те же термофлуктуационные механизмы. При этом вектор ориентации микротрещин (нормали) совпадает с минимальным собственным вектором напряжений. В плоскости, ортогональной вектору максимальных напряжений возможно только аннигиляция порового пространства. В целях упрощения задачи на настоящем этапе будем считать, что в исходном состоянии образца пор нет.

Рассмотрим процесс трещинообразования при некотором значении тензора напряжений $\overset{\circ}{p}$ в элементе среды. При этом вместо девиатора напряжений предлагается тензор $\Delta\overset{\circ}{p}^{Z}$, ответственный за трещинообразование, такой чтобы первые собственные числа тензоров $\Delta\overset{\circ}{p}^{Z}$ и, соответственно, $\overset{\circ}{\dot{\varepsilon}}^{\varsigma}$ были бы нулевыми. Максимальное собственное число тензора напряжений $p_{\max} = p_1$. Тогда тензор $\Delta\overset{\circ}{p}^{Z} = p_{\max}\overset{\circ}{\mathrm{I}} - \overset{\circ}{p}$ удовлетворяет необходимым требованиям. Матрица такого тензора в главных осях имеет вид $\Delta\overset{\circ}{p}^{Z} = \mathrm{diag}\left(0 \quad \Delta p_2^Z \quad \Delta p_3^Z\right)$, где $0 < \Delta p_2^Z \le \Delta p_3^Z$ (равенство для осесимметричного образца).

Скорость деформации термофлуктуационного трещинообразования по главным компонентам i ={2, 3}

$$\dot{\varepsilon}_i^{\varsigma} = \dot{\varepsilon}_{0.}^{\varsigma} \exp\left(-\frac{T_Z}{T}\right) \exp\left(\frac{\Delta p_i^Z}{\sigma_Z(T, p_{\min}, \Xi_j)}\right) \tag{10}$$

где $\sigma_Z(T, p_{\min}, \Xi_j)$ - функция, определяющая сопротивление процессу хрупкого трещинообразования материала, зависящая оп температуры, минимального напряжения и структурных параметров $\{\Xi_j\}$; T_Z - температура активации хрупкого процесса; $\dot{\varepsilon}_0^{\varsigma}$ - константа - предэкспоненциальный множитель. Для осесимметричного случая $\Delta p_2^Z = \Delta p_3^Z$, $\dot{\varepsilon}_2^{\varsigma} = \dot{\varepsilon}_3^{\varsigma} = \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{Inv}^{\varsigma}$. Для других случаев требуется дополнительное экспериментальное исследование.

Разделить термофлуктуационные процессы деформирования и трещинообразования на основе только имеющихся данных на «ведущий» и «ведомый» невозможно [20]. Сам вопрос о разделении элементарных актов на

ISSN 2541-9269

«акты разрушения» и «акты деформирования» достаточно сложен и неоднозначен. В обоих случаях это все-таки разрывы связей, что определяет близость энергий активации и тех и других процессов. Предположительно температуры активации $T_H = T_Z$, а также константы $\dot{\varepsilon}_0^{\varsigma} = \dot{\varepsilon}_0^{\eta}$. Тогда, для изотермических процессов предэкспоненты в формулах (8 и 10) войдут в общую константу:

$$\dot{\varepsilon}_C = \dot{\varepsilon}_0^{\eta} \exp\left(-\frac{T_H}{T}\right) = \dot{\varepsilon}_0^{\varsigma} \exp\left(-\frac{T_Z}{T}\right). \qquad (11)$$

Целью дальнейшей работы является определение факторов твердости σ_h и хрупкости σ_Z в зависимости от времени и структурных параметров Ξ_j в процессе деформирования образцов горных пород для широкой области изменения компонент тензора напряжений и скоростей деформаций. На первом этапе примем начальную структуру бездефектной. По достижении необходимого набора статистических данных взаимосвязанных параметров $\{\sigma_Z, \sigma_h, p_{\min}, \Xi_j\}$ появляется возможность построить функции $\sigma_Z(\hat{p}, \Xi_j)$ и $\sigma_h(p_{\min}, \Xi_j)$ для нормальной температуры. В качестве структурных параметров $\Xi_{j=1,2} = \{\varepsilon_{Int}^{\eta}, \quad \varepsilon_{Int}^{\zeta}\}$ использовали $\varepsilon_{Int}^{\eta} = \sqrt{\overset{\circ}{\varepsilon}{}^{\eta} \cdot\cdot \overset{\circ}{\varepsilon}{}^{\eta}}$ - интенсивность пластической деформации; $\varepsilon_{Inv}^{\zeta} = tr\left(\overset{\circ}{\varepsilon}{}^{\varsigma}\right)$ - первый инвариант тензора - мера трещинообразования (относительный объём пор трещин).

3. Экспериментальные данные

Из огромного множества опубликованных данных экспериментального исследования деформирования горных пород наиболее репрезентативны данные, представленные в монографии А.Н. Ставрогина и Б.Г. Тарасова [10]. Этими авторами в наиболее широкой области проведены измерения деформаций, к сожалению, только при комнатной температуре. Наибольший интерес представляют данные по Коелгинскому мрамору, имеющие наиболее широкую область пластической деформации до $\varepsilon = 1$. Приведённые в [10] данные представлены в графическом виде (см. рисунки 1,2), что не позволяет их использование с достигнутой авторами точностью.

ISSN 2541-9269

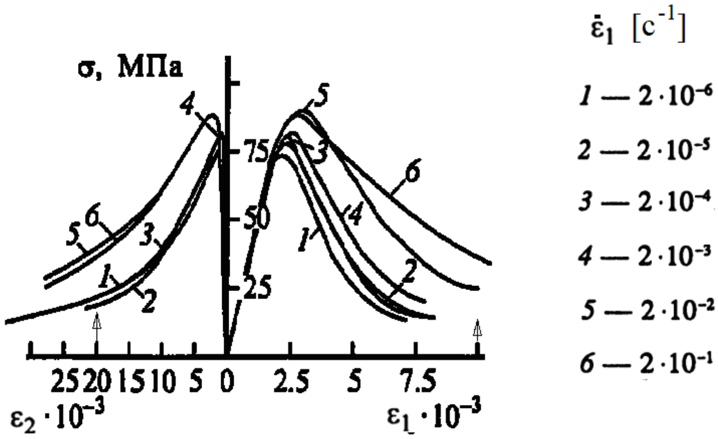


Рис. 1. Полные диаграммы жесткого нагружения уральского мрамора (Коелга) при разных скоростях осевой деформации $\dot{\varepsilon}_1$.

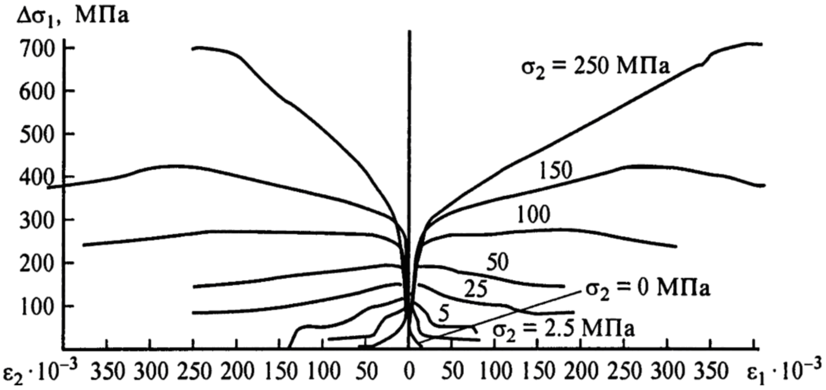


Рис. 2. Полные диаграммы жесткого нагружения уральского мрамора (Коелга) при разных уровнях бокового давления σ_2.

Упругие параметры мрамора $E = 62,\ G = 24.22,\ K = 30.3\ GPa,\ \nu = 0.28$,. Все кривые на этих рисунках были оцифрованы подверглись разложению, согласно формулы (5). Упругие компоненты деформации определяем из формул (6-7). Сдвиговые компоненты $\varepsilon_2^\lambda = \varepsilon_3^\lambda = -\frac{1}{2}\varepsilon_1^\lambda$. Пластические - по кривой сжатия $\varepsilon_1^\eta = \varepsilon_1 - \varepsilon_1^\lambda - \varepsilon_1^V$, $\varepsilon_2^\eta = \varepsilon_3^\eta = -\frac{1}{2}\varepsilon_1^\eta$. Первый компонент хрупкой деформации принимаем $\varepsilon_1^\zeta = 0$. Хрупкие компоненты $\varepsilon_2^\zeta = \varepsilon_3^\zeta = \varepsilon_2 - \varepsilon_2^\lambda - \varepsilon_2^V - \varepsilon_2^\eta$. Пористость $\varepsilon_{Inv}^\varsigma = \varepsilon_2^\varsigma + \varepsilon_3^\varsigma$.

4. Характеристические функции твердости и хрупкости

Существует несколько способов определения параметров поврежденности материала, начало разработки которых относят к работам Ю.Н. Работнова [22] и Л.М. Качанова [23]. Скалярный параметр имеет смысл как площадь трещин, приходящийся на единицу площади поперечного сечения в данный момент времени. Дальнейшее введение тензорных мер поврежденности, позволяет учитывать анизотропный характер накоплений повреждений в твердом теле [24, 25]. В настоящей работе предлагается мерой микротрещиноватости считать объёмную деформацию хрупкого разрушения, равную разности полной объёмной деформации минус объёмную долю упругой деформации материала:

$$\varepsilon_{Inv}^{\zeta} = \varepsilon_{Inv} - \varepsilon^{V} . \qquad (12)$$

Этот структурный параметр не учитывает распределение трещиноватости по размерам, но легко определяется обработкой экспериментальных данных для горных пород. Ориентация трещин для условий используемых экспериментальных данных в частном случае определена условиями нагружения: ориентация новых микротрещин в точности совпадает с направлением минимального главного напряжения [25].

Согласно предлагаемой математической модели существуют две характеристические функции:

$\sigma_h(T, p_{\min}, \Xi_j)$ - характеристическая функция твердости,

$\sigma_Z(T, p_{\min}, \Xi_j)$ - характеристическая функция хрупкости,

в число аргументов которых входят структурные параметры:

$\Xi_{j=1,2} = \{\varepsilon_{\eta}^{Int}, \quad \varepsilon_{\zeta}^{Inv}\}$ и т.п.

Главной целью настоящей работы является определение этих зависимостей для условий проведения эксперимента ($T = const$).

Попытка явно определить характеристические функции по экспериментальным кривым, натолкнулась на многие трудности. Точность исходных данных, точнее не монотонность численных производных, приводит к выпадению рациональных значений для некоторых участков изменения аргументов. На этом этапе удалось определить приблизительную форму кривой фактора твердости, показанной на рис.4. (красная).

Но сначала отметим, что между параметрами $\{\varepsilon_{\eta}^{Int}, \quad \varepsilon_{\zeta}^{Inv}\}$ имеется более простая зависимость, что позволило исключить один из аргументов. В [10] утверждается, что между пластическими и хрупкими деформациями существует линейная связь, см. рис. 3.

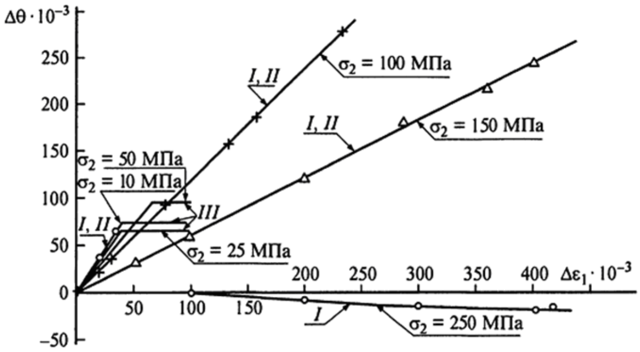


Рис.3. Зависимость объёмных деформаций расширения мрамора от главной продольной необратимой деформации $\Delta\varepsilon_1^{\eta}$ [10].

ISSN 2541-9269

Так как $\varepsilon_1^{\zeta}=0$, $\varepsilon_1(t)=\dot{\varepsilon}_1 t$, то при аппроксимации кривой $\varepsilon_1(t)$ участвует только функция $\sigma_h^{P\min=const}(\varepsilon_{Int}^{\eta}(\varepsilon_{Inv}^{\varsigma}))$, а деформации хрупкости не входят в слагаемые $\varepsilon_1(t)$. В этом случае влияние хрупких деформаций на ветвь сжатия $\varepsilon_1(t)$ учитывается неявно.

Тогда определение параметра $\sigma_Z(t)$ производим на второй стадии аппроксимации зависимости $\varepsilon_2(t)$, при уже определенном факторе твердости на первой стадии. В результате оказалось, что линейная зависимость пары $\{\varepsilon_{\eta}^{Int},\ \ \varepsilon_{\zeta}^{Inv}\}$ не подходит. Из условия наилучшего приближения компонент деформации расширения было установлено, что лучшее приближение дает квадратичная зависимость, а зависимость от $p_{\min}$ экспоненциальная:

$$\varepsilon_{\varsigma}^{Inv,p_{\min}=0}=\left(0.411(\varepsilon_{\eta}^{Int})+386(\varepsilon_{\eta}^{Int})^2\right)$$

$$\varepsilon_{\varsigma}^{Inv}=\Phi\left(p_{\min},\varepsilon_{\varsigma}^{Inv,p_{\min}=0}\right)=\exp\left(\frac{-p_{\min}}{17}\right)\varepsilon_{\varsigma}^{Inv,p=0}. \tag{13}$$

Представленная математическая модель позволяет смоделировать процесс деформирования решением прямой задачи, если известны характеристические функции твердости и хрупкости.

На участке возрастания A-B происходит упрочнение, причина которого формирование структуры, предположительно перераспределение зерен - заполнение пустот.

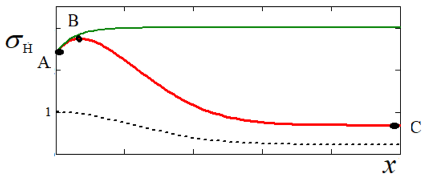


Рис. 4. Схематическое представление функции твердости

На участке B-C происходит разупрочнение, причина которого трещинообразование.

Зависимость функции упрочнения от пластической деформации определяется выражением

$$\sigma_h^0=B\left(1-a_0\exp(-\beta\varepsilon_{\rm int}^{\eta})\right) \text{ - (зелёная линия),} \tag{14}$$

где B – значение максимальной твердости, $a_0<1$ – доля упрочняющейся части, β - параметр крутизны. Отношение этих функций (штриховая линия) в первом приближении имеет вид

ISSN 2541-9269

$$F(x)=\frac{\exp(-\gamma\ x^2)+\delta}{1+\delta}$$ - (штриховая линия), (15)

где γ - характеризует крутизну линии, а δ - доля остаточной прочности. Аргументом этой функции разупрочнения предполагается хрупкая деформация $\varepsilon_{Inv}^{\zeta}$, но учитывая (12) используем параметр ε_{Int}^{η}.

Практически γ на начальном и конечном участке оказывается различным. Во втором приближении эта зависимость аппроксимируется выражением

$$F(x)=\frac{a_1\exp(-\gamma_1\ x^2)+a_2\exp(-\gamma_2\ x^2)+\delta}{1+\delta},\qquad (16)$$

где $a_1+a_2=1$. Тогда функцию фактор твердости определяем как произведение

$$\sigma_h(\varepsilon_{Int}^{\eta})=\sigma_h^0(\varepsilon_{Int}^{\eta})F(\varepsilon_{Int}^{\eta}).\qquad (17)$$

Коэффициенты аппроксимации экспериментальных данных подбираются методом последовательных приближений. Варьируемыми параметрами являются

$$\left\{B,a_{0,}\,a_{1,}\,a_2,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\,\delta\right\}\qquad (18)$$

На второй стадии аппроксимации $\varepsilon_2(t)$ требуется определит зависимость $\sigma_Z\left(\varepsilon_{Int}^{\eta},\varepsilon_{Inv}^{\varsigma}\right)$. Однако, более простой оказалось определение нелинейной зависимости $\varepsilon_{Inv}^{\varsigma}=\left(\varepsilon_{Int}^{\eta},p_{\min}\right)$ по формуле (13).

5. Определение значений параметров характеристических функций твердости и прочности

Построение характеристических функций производим путем сопоставления расчетных данных с экспериментальными диаграммами жесткого сжатия образцов для различных давлений и скоростей деформаций при $\{T,p_{\min},\dot{\varepsilon}_1\ =const\}$.

5.1. Аппроксимация диаграмм одноосного нагружения.

Первоначально задаемся видом и параметрами характеристической функции $\sigma_h^{T,P\min}(\varepsilon_{Int}^{\eta})$, и $\varepsilon_{Inv}^{\varsigma}(\varepsilon_{Int}^{\eta})$.

Алгоритм численного интегрирования уравнений деформирования следующий:

1) Задание начальных данных, задание шагов итераций по p_1, первый компонент тензора;
2) Основной цикл, задаем шаги по деформации и времени $\delta\varepsilon_1,\ \delta t=\delta\varepsilon_1/\dot{\varepsilon}_1,\ \dot{\varepsilon}_1\ -дано$;
3) Итерационный цикл, задаем три варианта приращения $\delta p_1^{\,j}$, {j = -1, 0,+1},

ISSN 2541-9269

4) Расчет переменных параметров прямой задачи p_1, σ_h,... ;

5) Расчет упругих и пластических компонент ε_1^V, ε_1^λ, ε_1^η ;

6) Расчет полных компонент $\varepsilon_1^{расч}$;

7) Определяем погрешности расчета $Oh_j = (\varepsilon_1^{расч} - \varepsilon_1^{дан})$;

8) Анализ погрешностей трех вариантов:
погрешность меньше допустимой:
. да) выход из цикла итераций;
. нет) задание новых параметров δp_1^j и переход на след шаг итерации п.3) по p_1;

9) Расчет хрупких деформаций ε_i^ζ (13);

10) Расчет значений функции хрупкости $\sigma_Z = \Delta p_i^Z / \ln\left(\dot{\varepsilon}_i^\zeta / \dot{\varepsilon}_C\right)$;
Формирование выводимых результатов;
11) Условия окончания расчета:
. а) по допустимым напряжениям;
. б) по допустимым деформациям;
. в) по времени;
. г) иначе переход на 2) следующий шаг по времени;
если 11) выполняется
12) Выход из цикла, выдача результатов.

Такой алгоритм обеспечивает совпадение расчета и эксперимента только зависимости $\varepsilon_1(t)$. Полученный вариант расчета отличается от экспериментальной диаграммы нагружения (рис.1). Оптимизацию производим для ветви сжатия и растяжения по отдельности, варьируя параметрами $\{B, a_0, a_1, a_2, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \delta\}$ характеристической функции $\sigma_h(T, p_{\min}, \varepsilon_{Int}^\eta)$ и зависимости (13).

Вид функции твердости по форме схож с диаграммой $p_1(\varepsilon_1)$, но её масштаб зависит также от константы $\dot{\varepsilon}_C$. Чем больше значение этого параметра, тем больше зависимость величины максимального напряжения от увеличения скорости деформации.

Сравнивая расчеты с $\dot{\varepsilon}_C \in \{10^{-13} \div 10^{-32}\}$ с различными скоростями деформации выбрали оптимальное значение $\dot{\varepsilon}_C = 10^{-27}$ s^{-1}, удовлетворяющее требованию наилучшего приближения максимального значения напряжения при различных скоростях деформации (рис.6).

На рис.5 представлены результаты расчетов одноосного сжатия при скорости деформации $\dot{\varepsilon}_1(t) = 2\cdot 10^{-5}\ s^{-1}$. Пластическая (зеленая) и хрупкая (штриховая линия) компоненты деформации. Сравнение расчетов с экспериментальными данными рис.5.а (красные и синие линии), получены с параметрами функции твердости, графики которых показанные на рис.5.б, в. Выбранный вид характеристических функций вполне удовлетворительно описывает экспериментальные кривые.

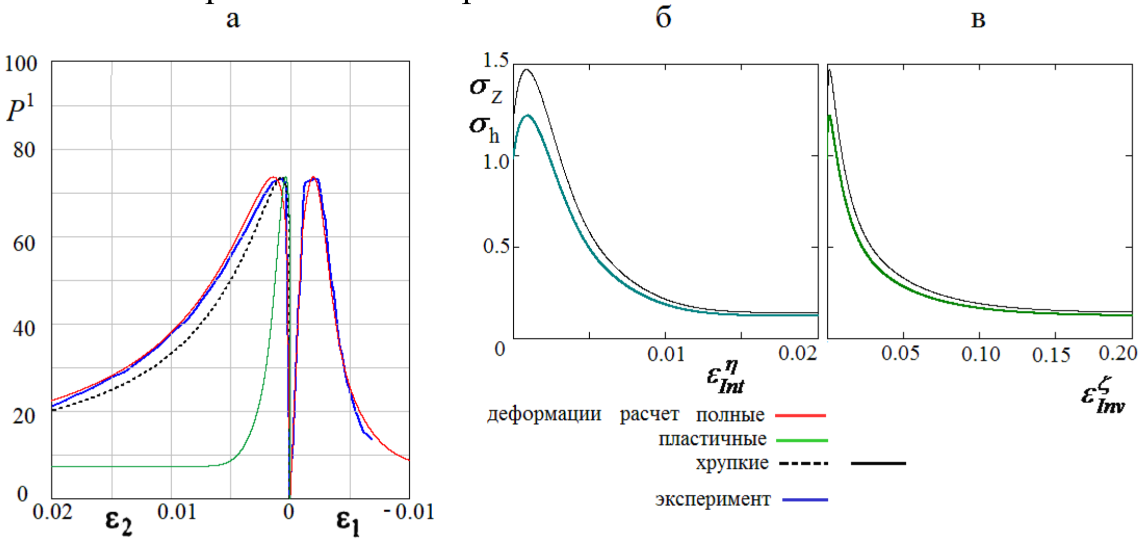


Рис. 5. Результат расчетов при одноосном нагружении и скорости деформации $\dot{\varepsilon}_1(t) = 2\cdot 10^{-5}\ s^{-1}$;

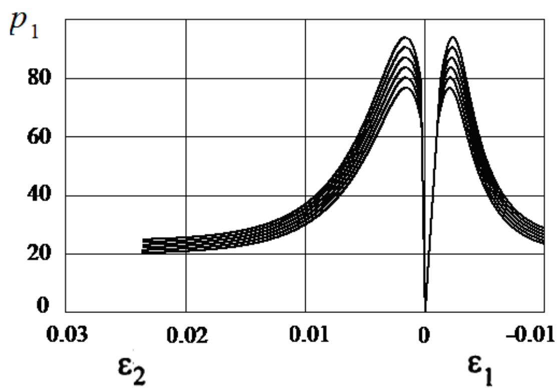
а - сравнение расчета с экспериментом; графики факторов твердости и хрупкости:

б - зависимости $\sigma_h - \varepsilon_{Int}^{\eta}$; $\sigma_Z - \varepsilon_{Int}^{\eta}$; в - зависимости $\sigma_h - \varepsilon_{Inv}^{\varsigma}$; $\sigma_Z - \varepsilon_{Inv}^{\varsigma}$.

Расчеты, проведенные при различных скоростях деформации, показали монотонную зависимость кривых от $\dot{\varepsilon}_1$, показанную на рис.6.б. При этом разброс по максимальному напряжению экспериментальных кривых не представляется аппроксимировать с желаемой точностью (рис.6.в). Выше отмечалось, что определяющим параметром, от которого зависит скорость нарастания параметра $p_1^{\max}$ является константа $\dot{\varepsilon}_C$.

Другим недостатком является тот факт, что с увеличением скорости деформации экспериментальные кривые значительно расходятся вправо – влево (рис.6.а), в то время как расчетные кривые в большей степени эквидистантные (рис.6.б).

б



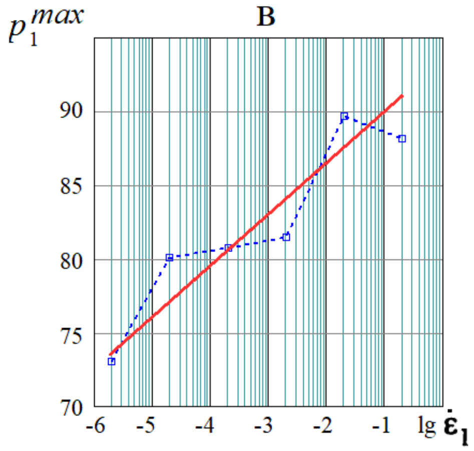


Рис.. 6. Расчет одноосного нагружения для различных скоростей деформации:
а - экспериментальные данные; б - результаты расчетов;
в - зависимость максимального напряжения от скорости деформации:
эксперимент (синие точки) и расчет (красная линия)

Номера кривых: $\dot{\varepsilon}_1 =$ 1)-2x10^{-6}; 2)-2x10^{-5}; 3)-2x10^{-4}; 4)-2x10^{-3}; 5)-2x10^{-2}; 6)-2x10^{-1};

5.2. Аппроксимация диаграмм трехосного осесимметричного нагружения

Подбор параметров характеристической функции $\sigma_h^{T,P\min}(\varepsilon_{Int}^{\eta})$, и $\varepsilon_{Inv}^{\varsigma}(\varepsilon_{Int}^{\eta})$ производим аналогичным образом для каждой кривой бокового давления $p_{\min}$ (см.рис.7). Эту процедуру можно проделать с точностью эксперимента для каждой кривой. Однако в целом для породы образцы имеют большой разброс механических свойств. Параметры кривой $\{B, a_0, a_1, a_2, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \delta\}$ зависят от давления $p_{\min}$. Эти параметры были аппроксимированы зависимостями от $p_{\min}$, и с их помощью по единой функции твердости $\sigma_h^T(p_{\min}, \varepsilon_{Int}^{\eta})$ проведены сопоставление расчетов с экспериментальными данными, представленными на рис. 8. Довольно точно удалось приблизить кривые при $p_{\min} = \{0 \text{ и } 100 \; MPa\}$.

ISSN 2541-9269

Учитывая разброс свойств образцов посчитали нецелесообразным увеличивать число параметров функции твердости $\sigma_h^{T=const}(p_{\min}, \varepsilon_{Int}^{\eta})$.

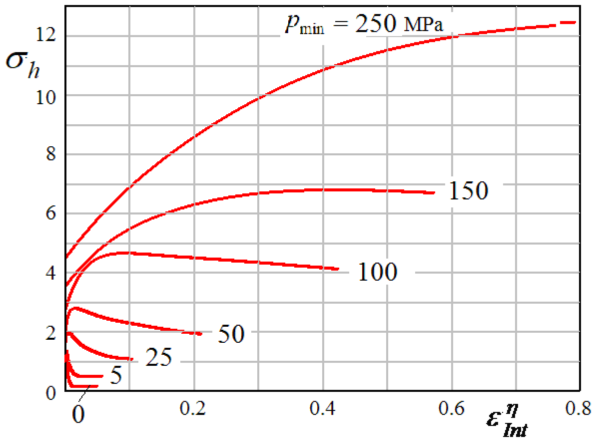


Рис.7. Зависимость значений функции твердости от интенсивности пластических деформаций при различных значениях минимального главного напряжения

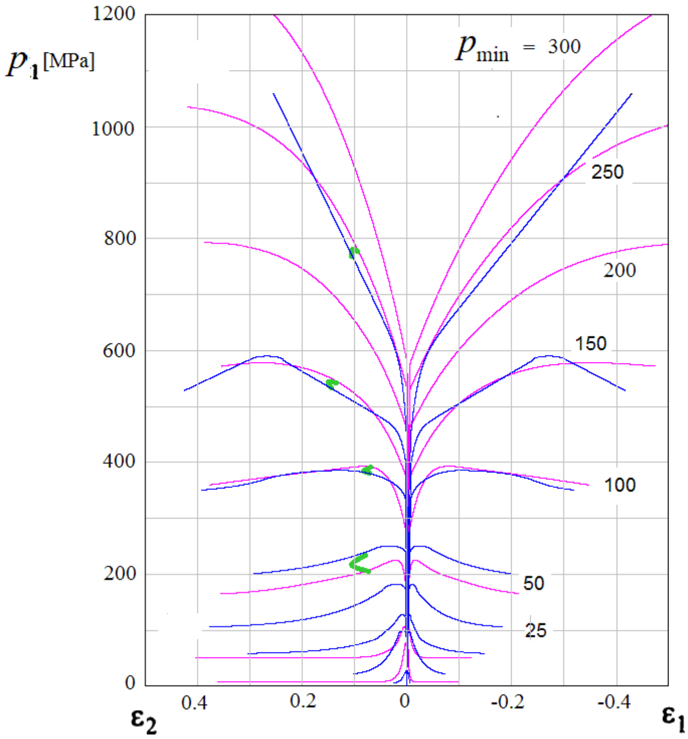


Рис. 8. Сравнение расчета с экспериментальными данными: синий – эксперимент, красный - расчет

Заключение

Предлагаемая математическая модель является оригинальным развитием кинетической концепции прочности С.Н. Журкова. Введены новые физические величины: фактор твердости и фактор хрупкости, с помощью которых появляется возможность построения характеристических функций, определяющих изменяющихся в процессе деформирования прочностных свойств горных пород. Аргументами характеристических функций являются структурные параметры горных пород. Первая редакция характеристических функций построена в зависимости от объемной деформации и интенсивности тензора пластических деформаций. Для условий всестороннего сжатия и более сложных режимов нагружения образцов имеются перспективы развития для учета большего количества факторов. В предлагаемой модели отсутствуют привычные предельные характеристики, получаемые тестированием образцов, но как показали численные эксперименты, эти характеристики появляются при анализе результатов расчетов, так как малые необратимые деформации обычно визуально не воспринимаются.

Литература

1. Сидорин А.Я. Геофизические исследования в комплексе мероприятий по уменьшению сейсмического риска // Геофизические процессы и биосфера. 2022. Т. 21, № 2.
2. Дубиня Н.В., Вершинин А.В., Пирогова А.С., Тихоцкий С.А. Особенности численного решения задач геомеханики месторождений с негладкими решениями методом конечных элементов // Геофизические исследования. 2022. Т. 23. № 1.
3. Стефанов Ю.П. Численное моделирование процессов деформации и разрушения в геомеханике. В сб.: Современная тектонофизика. методы и результаты. Материалы пятой молодежной тектонофизической школы-семинара. 2017. С. 131-147.
4. Татаурова А.А., Стефанов Ю.П. Численное исследование необратимой деформации при формировании надвиговых структур. Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. 2023. Том 10, № 2. С. 73-78.
5. Трусов, П.В. Физические теории пластичности : учеб. пособие / П.В. Трусов, П.С. Волегов, Н.С. Кондратьев. – Пермь : Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2013. – 244 с.
6. Рыбин В.В. Фундаментальные проблемы интенсивной пластической деформации кристаллических твердых тел // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки № 4-1(182) 2013. С.166-169.
7. Ломакин Е.В., Тишин П.В. Определяющие соотношения для материалов со свойствами, зависящими от вида деформированного состояния // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 1. С. 52–62. – DOI: 10.15593/perm.mech/2021.1.06
8. Гарагаш И.А., Дубиня Н.В., Русина О.А., Тихоцкий С.А., Фокин И.В. Определение прочностных свойств горных пород по данным трехосных испытаний // Геофизические исследования. 2018. Т. 19. № 3. С. 57-72. – DOI: 10.21455/gr2018.3-4
9. Комплексные лабораторные исследования керна в ЦПГИ ИФЗ РАН / С. А. Тихоцкий, И. В. Фокин, И. О. Баюк [и др.] // Наука и технологические разработки. – 2017. – Т. 96, № 2. – С. 17-32. – DOI: 10.21455/std2017.2-2

10. Ставрогин А.Н., Тарасов Б.Г. Экспериментальная физика и механика горных пород. — СПб.: «Наука», 2001. — 343 с, 228 ил.
11. Журков С.Н. Вестн. АН СССР 3, 46 (1968).
12. Регель В.Р., Слуцкер А.И., Томашевский Э.Е. Кинетическая природа прочности твердых тел. Наука, М. (1974). -560 с.
13. Мирошников В.И., Саксин Б.Г. Кинетическая модель трещинообразования горных пород. «Геодинамика и напряженное состояние недр Земли» Тр. научн. конф. с участием иностр. ученых, Новосибирск 6–10 июля 2009 г., Новосибирск: Изд. ИГД СО РАН, 2010. С.64-72.
14. Мирошников В. И., Рассказов И. Ю., Саксин Б. Г. Моделирование процесса анизотропного трещинообразования геосреды. ФТПРПИ, 2011, №3. С. 47-52.
15. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. - 419 с.
16. Мирошников В.И. О разложении тензора деформации горных пород на упругие, вязко-пластические и хрупко-трещиноватые составляющие. ГИАБ, 2007, № ОВ-9. С. 401-409.
17. Мирошников В.И., Гладырь А.В. Нелинейная модель обратимого деформирования трещиноватых геоматериалов. В кн. Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках. Материалы XXIV международной научной школы им. ак. С.А.Христиановича, Крым, Алушта, 22-28 сентября 2014. Симферополь, Изд.Таврического национального ун-та им. В.И. Вернадского. 2014. С.151-156.
18. Физические свойства минералов и горных пород при высоких термодинамических параметрах: Справочник / Е.И.Баюк, И.С.Томашевская, В.М.Добрынин и др. под ред. М.П.Воларовича / М.: Недра, 1988, 255 с.
19. Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г. Прочность горных пород и устойчивость выработок на больших глубинах. М.: Недра, 1985, 271 с.
20. Регель В.Р., Слуцкер А.И., Томашевский Э.Е. Кинетическая природа прочности твердых тел. УФН, 1972, Т.106, вып.2. С.193-228.
21. Работнов Ю. Н. О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5-7.
22. Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1958. С. 26-31.
23. Степанова Л. В., Игонин С. А. Параметр поврежденности Ю. Н. Работнова и описание длительного разрушения: результаты, современное состояние, приложение к механике трещин и перспективы. ПМТФ, 2015. Т.56, № 2. С. 133-145.
24. Радаев Ю. Н. Тензорные меры поврежденности и гармонический анализ тонкой структуры поврежденности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 1998. №2(8). С. 79-105.
25. Пантелеев И.А., Ляховский В.А. Ориентация трещиноватости в хрупком твердом теле при традиционном трехосном сжатии // Изв.РАН.МТТ, 2022, № 5. С. 70–92.