Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: **mathmod.esrae.ru/51-215**
Ссылка для цитирования этой статьи:
Макеев Н.Н. Движение твёрдого тела в поле гироскопических сил пространства Римана // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2025. №3

УДК 531.9+517.913 DOI:10.24412/2541-9269-2025-3-38-51

ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА В ПОЛЕ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ ПРОСТРАНСТВА РИМАНА

Макеев Н.Н.

MOTION OF A SOLID BODY IN THE FIELD OF GYROSCOPIC FORCES OF RIEMANN SPACE

Makeev N.N.

Аннотация. Рассматриваются свойства движения свободного от связей абсолютно твёрдого тела в эллиптическом пространстве при воздействии гироскопических и внешних сил. Приведены критерии существования и условия несуществования алгебраических первых интегралов системы уравнений движения тела. Установлено, что при движении тела под действием гироскопических сил существует интеграл энергии, интегралы перманентного движения и не существуют дополнительные алгебраические интегралы с двумя независимыми переменными, а также линейные интегралы общего вида.

Ключевые слова: твёрдое тело, пространство Римана, алгебраический интеграл, дополнительный интеграл, гироскопическая сила.

Abstract. The properties of motion of an absolutely rigid body free from constraints in elliptical space under the influence of gyroscopic and external forces are investigated. The criteria for the existence and conditions non-existence of algebraic first integrals of the system of equations of motion of a body are given. It has been established that when a body moves under the action of gyroscopic forces, there is an energy integral, integrals of permanent motion and they do not exist additional algebraic integrals with two independent variables, as well as linear integrals of a general type.

Keywords: rigid body, Riemann space, algebraic integral, additional integral, gyroscopic force.

Введение

Механика твёрдого тела в пространстве Римана относится к почти не исследованным направлениям механики. Эта механика реализуется для пространств глобальной протяжённости порядка галактических размеров и актуальна применительно к моделям, построенным вне положений общей теории относительности. Отдельные свойства движения твёрдого тела в этом пространстве исследовались в ранних работах, в том числе в статье [1]. В работе [2] приведены уравнения движения твёрдого тела в трёхмерном эллиптическом пространстве (пространстве Римана), происходящего под действием внешних сил. Настоящая статья содержит продолжение данных исследований.

1. Предварительные положения и уравнения движения

Свободное от связей абсолютно твёрдое тело движется в поле сил трёхмерного пространства Римана S_3 с абсолютом, заданным уравнением

$$g_{ij}\, x^i x^j \equiv \sum_{s=1}^{4} (x^s)^2 = 0,$$

где g_{ij} – метрический тензор (дважды ковариантный симметрический тензор) с вейерштрассовыми координатами, отнесённый к конфигурационному пространству твёрдого тела. Пространство Римана – это поле данного тензора, порождающее риманово многообразие и фазовое пространство движущегося тела.

Введём автополярный относительно данного абсолюта координатный тетраэдр $Tr = (e_1 \,...\, e_4)$ с вершинами – точками $e_i\ (i = \overline{1,4})$, отождествляемый с *тетраэдром инерции* тела. Оси прямоугольных координат, совпадающие с рёбрами этого тетраэдра, принимаются за *главные оси инерции тела*, а его вершина e_4 – за *центр инерции* (центр масс). При этом моменты инерции тела относительно главных осей инерции принимаются за *главные осевые моменты инерции вращения*. Сдвиг пространства S_3 – одно из его свойств, позволяющее ввести понятия *главных моментов инерции сдвига* тела относительно осей заданного координатного тетраэдра [2].

Обозначим: $A_{r4}, B_{s4}\ (r, s = 1, 2, 3)$ – главные моменты инерции вращения и сдвига; $\mathbf{\Omega}\,(\omega^{r4}), \mathbf{V}(v^{s4})$ – бивекторы скоростей вращения и сдвига тела, заданные относительно тетраэдра Tr компонентами $\omega^{r4}, v^{s4}; \mathbf{L}(L^{r4}), \mathbf{N}(N^{s4})$ $(r, s = 1, 2, 3)$ – компоненты силового винта, соответствующие вращению и сдвигу тела, соответственно; k – длина радиуса кривизны данного пространства.

В работе [2] приведены динамические уравнения твёрдого тела, движущегося в пространстве S_3:

$$\begin{aligned} A_{14}\,\dot{\omega}^{14} + (B_{14} - B_{34})(\omega^{34}\omega^{24} - v^{34}v^{14}) &= k^2 L^{14} \\ B_{14}\,\dot{v}^{14} + (A_{24} - B_{24})(\omega^{14}v^{34} - \omega^{24}v^{24}) &= k^2 N^{14} \end{aligned} \qquad (1, 2, 3). \qquad (1)$$

Равенства (1) образуют систему шести уравнений, заданную приведёнными здесь уравнениями-представителями; символ (1, 2, 3) здесь и всюду далее означает, что остальные уравнения данной системы могут быть получены из заданных циклической перестановкой индексов 1, 2, 3. Эта совокупность уравнений, являющаяся многопараметрической системой эволюционного типа с биквадратичной нелинейностью, задана в открытой регулярной области эллиптического пространства S_3 и аналитически замкнута относительно приведённых в уравнениях независимых переменных.

Предполагается, что на тело действуют силы с *гироскопической струкурой* [3, с. 175]. Зададим компоненты силового винта этих сил относительно координатного тетраэдра в виде

$$\begin{aligned} k^2 L^{14} &= \lambda_3 \omega^{24} - \lambda_2 \omega^{34} + \mu_1 v^{24} - \mu_3 v^{34} + k^2 m^{14}, \\ k^2 N^{14} &= \mu_1 \omega^{24} - \mu_3 \omega^{34} + \lambda_2 v^{34} - \lambda_3 v^{24} + k^2 n^{14} \\ & (1, 2, 3). \end{aligned} \tag{2}$$

В равенствах (2) постоянные $\lambda_r, \mu_s, m^{r4}, n^{s4}$ $(r,\ s = 1,\ 2,\ 3)$ – коэффициенты и параметры винта сил, соответственно. Коэффициенты λ_r, μ_s удовлетворяют условиям

$$\sum_{r=1}^{3} (L^{r4} \cdot \omega^{r4}) = 0, \qquad \sum_{s=1}^{3} (N^{s4} \cdot v^{s4}) = 0 \tag{3}$$

при выполнении ограничений

$$m^{14} = n^{14} = 0 \qquad (1, 2, 3). \tag{4}$$

Соотношения (3) выражают равенство нулю величины мощности компонент винта внешних сил, действующих на тело при ограничениях (4) – это выполняется и для выражений (2). Условия (4) заданы относительно координатных осей тетраэдра *Tr*, не зависят от текущего положения и ориентации тела. Они определяют его движение по инерции, а силы, обусловленные этим силовым винтом, в силу соотношений (3) являются *гироскопическими силами.* При этом параметры λ_r, μ_s являются *гироскопическими коэффициентами*, отражающими гироскопический эффект силового воздействия на тело [4, с. 219].

Система гироскопических сил, действующих на тело, потенциальна и имеет обобщённый силовой потенциал *U*, определяемый равенством

$$L(U) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial U}{\partial q},$$

где $q, \dot{q}$ – обобщённые координата и скорость тела, *L* – дифференциальный оператор Лагранжа [3, с. 175].

Таким образом, получено следующее утверждение.

Лемма (свойство гироскопичности сил). Компоненты силового винта, действующего на твёрдое тело, заданные соотношениями (2), образуют систему сил нулевой мощности при любом движении тела.

Согласно соотношениям (2) система уравнений движения (1) твёрдого тела в пространстве S_3 представляется в виде

$$A_{14} \dot{\omega}^{14} + (B_{14} - B_{34})(\omega^{24} \omega^{34} - v^{14} v^{34}) + \lambda_2 \omega^{34} - \lambda_3 \omega^{24} + \mu_3 v^{34} - \mu_1 v^{24} = k^2 m^{14}, \tag{5}$$

ISSN 2541-9269

$$B_{14}\dot{v}^{14}+(A_{24}-B_{24})(\omega^{14}v^{34}-\omega^{24}v^{24})+\mu_3\omega^{34}-\mu_1\omega^{24}+\lambda_3 v^{24}-\lambda_2 v^{34}=k^2 n^{14} \quad (6)$$

$$(1,2,3).$$

Система уравнений (5), (6) интерпретируется как динамическая система гиростата с постоянными компонентами гиростатического момента λ_r, μ_s, движущегося в пространстве S_3 под воздействием заданных активных внешних сил.

Уравнения движения (5), (6) имеют альтернативную форму представления. Полагая $A_{r4}\neq 0, B_{s4}\neq 0,$ введём переменные

$$P_r = A_{r4}\omega^{r4}, \qquad Q_s = B_{s4}v^{s4} \qquad (r,s=1,2,3). \quad (7)$$

Тогда система уравнений движения (5), (6) в новых переменных (7) имеет вид

$$\dot{P}_1+\left(\frac{1}{A_{34}}-\frac{1}{A_{24}}\right)P_2P_3+\left(\frac{1}{B_{14}}-\frac{1}{B_{34}}\right)Q_1Q_3+\frac{\lambda_2}{A_{34}}P_3-\frac{\lambda_3}{A_{24}}P_2+\frac{\mu_3}{B_{34}}Q_3-\frac{\mu_1}{B_{24}}Q_2=K_1, \quad (8)$$

$$\dot{Q}_1+\left(\frac{1}{B_{34}}-\frac{1}{A_{14}}\right)P_1Q_3+\left(\frac{1}{A_{24}}-\frac{1}{B_{24}}\right)P_2Q_2+\frac{\mu_3}{A_{34}}Q_3-\frac{\mu_1}{A_{24}}P_2+\frac{\lambda_3}{B_{24}}Q_2-\frac{\lambda_2}{B_{34}}Q_3=R_1 \quad (9)$$

$$(1,2,3).$$

В уравнениях (8), (9) обозначено

$$P_r=\frac{\partial T}{\partial \omega^{r4}}, \qquad Q_s=\frac{\partial T}{\partial v^{s4}} \qquad (r,s=1,2,3),$$

где величина кинетической энергии тела T [2] в переменных (7) определяется равенством

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{A_{i4}}P_i^2+\frac{1}{B_{i4}}Q_i^2\right), \quad (10)$$

а величины K_r, R_s – обобщённые силы, действующие на твёрдое тело.

В случае, при котором тело движется без воздействия системы гироскопических сил, все параметры $\lambda_r=\mu_s=0$ и тогда уравнения (8), (9) значительно упрощаются, принимая частный вид [2].

Уравнения (8), (9) по форме однотипны с уравнениями инерционного движения в идеальной безграничной жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью, применяемыми для трёхмерного евклидова пространства [5]. Такая формальная идентичность обусловлена одинаковостью математических моделей, используемых при решении поставленных задач.

2. Алгебраические интегралы системы уравнений

Под *полем интегралов* динамических уравнений понимается непустое конечное дискретное множество первых интегралов динамической системы (5), (6), определённых в открытой, регулярной односвязной области фазового пространства этой системы. В настоящей работе рассматривается только часть данного множества – ограниченное дискретное подмножество невырожденных *алгебраических интегралов*, существующих в классе функций C^2.

В пространстве S_3 для твёрдого тела имеют место структурно-кинетические тождества [6]

$$A_{14}+B_{24}=A_{24}+B_{34}=A_{34}+B_{14}=k^2M, \tag{11}$$

где M – величина массы тела. Этими тождествами определяется множественность форм представления уравнений системы (5), (6).

Введём квадратичную форму

$$F(\mathbf{\Omega},\mathbf{V})=\sum_{i=1}^{3}[A_{i4}(\omega^{i4})^2+B_{i4}(v^{i4})^2] \tag{12}$$

и получим квадратичный по компонентам винта $\{\mathbf{\Omega}(\omega^{r4}),\mathbf{V}(v^{s4})\}$ первый интеграл системы уравнений (5), (6), а также условия его существования. Обозначим h постоянную интегрирования, показывающую уровень этого интеграла, и введём параметры

$$a_1=B_{34}-B_{14},\qquad b_1=B_{24}-A_{24}\qquad (1,2,3).$$

Теорема 1. Для того, чтобы равенство

$$F(\mathbf{\Omega},\mathbf{V})=h^2 \tag{13}$$

являлось первым интегралом системы уравнений (5), (6), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись параметрические условия (4), (11).

Доказательство. Необходимость. Если равенство (13) является первым интегралом системы уравнений (5), (6), то, дифференцируя по t форму (12), в силу уравнений этой системы получаем алгебраическое равенство, тождественно по переменным $(\omega^{r4},v^{s4})\,(r,s=1,2,3)$ удовлетворяющееся при выполнении условий (4) и равенств

$$a_1+a_2+a_3=0,\qquad a_1-b_1+b_3=0,\qquad a_2+b_1-b_2=0,\qquad a_3+b_2-b_3=0.$$

Эти равенства обращаются в очевидные тождества при выполнении структурно-кинетических условий (11).

Достаточность. Если выполняются условия (4), (11), то, образуя комбинацию вида

$$\sum_{i=1}^{3}[(A_{i4}\dot{\omega}^{i4})\omega^{i4}+(B_{i4}\dot{v}^{i4})v^{i4}],$$

в силу уравнений системы (5), (6) и приведённой ранее леммы находим, что данная комбинация является интегрируемой по Риману. Согласно этому равенство (13) является первым интегралом системы уравнений (5), (6).

В пространстве переменных $(\mathbf{\Omega},\mathbf{V})$ интегралу (13) соответствует непрерывная гладкая замкнутая поверхность, ограничивающая односвязную регулярную область, в которой при движении тела находится изображающая точка фазового пространства. Этот интеграл в переменных (7) представляется равенством

$$2T = h^2 \tag{14}$$

и является первым интегралом системы уравнений (8), (9). Величина T в соотношении (14) определяется равенством (10).

3. Дополнительные интегралы основной системы уравнений

Под *основной системой уравнений* понимается объединённая система (5), (6), заданная относительно компонент кинематического винта $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{V})$. Рассмотрим ограниченную задачу о существовании первых алгебраических интегралов, дополнительных по Уиттекеру [4] (термин [7, с. 84]) к интегралу (13), в классе C^2 однозначных алгебраических функций. Поскольку дополнительные интегралы основной динамической системы, как частные интегралы, могут существовать лишь при определённых структурно-кинетических условиях, то эту задачу следут рассматривать как ограниченную задачу нахождения интегрального многообразия данной системы.

Представим искомые частные интегралы в виде

$$F(\omega^{14}, \omega^{24}, \omega^{34}; v^{14}, v^{24}, v^{34}) = h, \tag{15}$$

где F – невырожденная алгебраическая функция заданных переменных, определённая в открытой односвязной регулярной области фазового пространства; h – постоянная интегрирования. В дальнейшем для основной системы уравнений полагаются выполненными условия (4). Это означает, что тело движется в инерционном режиме при воздействии системы гироскопических сил и без воздействия на него активных внешних сил.

Критерием существования первого интеграла системы уравнений (5), (6) является равенство нулю скобки Пуассона (коммутатора векторных полей на данном многообразии) от функции F (15) и гамильтониана данной автономной динамической системы, заданных на симплектическом многообразии [7, с. 84; 8, с. 179]. Отсюда следует

$$(\nabla_{\mathbf{\Omega}} F \cdot \dot{\mathbf{\Omega}}) + (\nabla_{\mathbf{V}} F \cdot \dot{\mathbf{V}}) = 0, \tag{16}$$

где $\mathbf{\Omega}(\omega^{r4}), \mathbf{V}(v^{s4})$ – компоненты кинематического винта; ∇ – символ дифференциального оператора Гамильтона.

Обозначим

$$p_{r4} = \frac{\partial F}{\partial \omega^{r4}}, \qquad q_{s4} = \frac{\partial F}{\partial v^{s4}} \qquad (r, s = 1, 2, 3).$$

Тогда условие (16) в развёрнутой скалярной форме примет вид

$$\sum_{r,s=1}^{3}(p_{r4}\,\dot\omega^{r4}+q_{s4}\,\dot v^{s4})=0. \tag{17}$$

Равенство (17) в силу уравнений системы (5), (6) является тождеством по всем переменным ω^{r4}, v^{s4}, выполняющемся при определённых структурно-кинетических ограничениях, соответствующим случаям существования дополнительных первых интегралов основной системы уравнений в расширенном фазовом пространстве этой системы.

Рассмотрим задачу о существовании первых алгебраических интегралов данной системы для составного движения тела типа “*вращение-сдвиг*”, совершающегося при условиях $(\omega^{r4}, v^{s4})\neq 0 \quad (r, s=1,2,3)$. При этом далее рассматриваются только случаи, при которых зависимость вида (15) содержит не более двух независимых переменных (если иное специально не оговорено).

Поставим задачу: на симплектическом многообразии гладких функций $\{\mathbf{U},\mathbf{V}\}$ при ограничениях, наложенных на величины (m^{r4}, n^{s4}), определить структурно-кинетические условия, при реализации которых для основной динамической системы на данном многообразии в классе невырожденных алгебраических функций существуют дополнительные по Уиттекеру [4, 7] первые интегралы данной системы вида (15).

3.1. Дополнительные интегралы с одной переменной

Пусть зависимость вида (15) задана в виде

$$F(\omega^{14})=h. \tag{18}$$

Равенство (18) здесь и далее рассматривается как представитель совокупности интегралов вида $F(\omega^{r4})=\mathrm{const}\ (r=1,2,3)$. Согласно соотношению (18) в соответствии с условием (17) получаем равенство, являющееся тождеством по всем переменным ω^{r4}, v^{s4}, удовлетворяющемся в силу уравнения (5) при условиях

$$m^{14}=0, \tag{19}$$

$$\lambda_2=\lambda_3=\mu_1=\mu_3=0 \tag{20}$$

и либо

$$B_{14}=B_{34}, \tag{21}$$

либо

$$\rho_1\equiv\omega^{24}\omega^{34}-v^{14}v^{34}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\omega^{24}}{v^{34}}=\frac{v^{14}}{\omega^{34}} \qquad (B_{14}\neq B_{34}). \tag{22}$$

Тогда имеем $p_{14}\,\dot\omega^{14}=0$, откуда следует

$$\omega^{14}=h. \tag{23}$$

Таким образом, имеет место

Теорема 2. Для того, чтобы равенство (23) являлось первым интегралом системы уравнений (5), (6), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (19)–(22).

Ограничение (21) выражает структурно-кинетическую симметрию тела относительно оси $(e_2\ e_4)$ тетраэдра. Следовательно, в силу кинетического тождества (11) в этом случае имеем $A_{24} = A_{34}$. Условие (22) соответствует движению тела, называемого *спиралевидным движением первого рода.*

Аналогичным образом, если выражение (15) задано в виде

$$F(v^{14}) = h, \tag{24}$$

то, согласно равенству (17), получаем соотношение, являющееся тождеством по данным переменным, удовлетворяющемся при условиях

$$n^{14} = 0, \tag{25}$$

$$\sigma_1 \equiv \omega^{14} v^{34} - \omega^{24} v^{24} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\omega^{24}}{v^{34}} = \frac{\omega^{14}}{v^{24}}. \tag{26}$$

Отсюда имеем $q_{14}\dot{v}^{14} = 0$ и, следовательно,

$$v^{14} = h. \tag{27}$$

К условиям (25), (26) следует присоединить ограничение (20). Условие (25), как и ограничение (19), является условием инерционности движения тела – вращения и сдвига, соответственно. Ограничение (26) определяет движение тела, называемого *спиралевидным движением второго рода.*

Итак, доказана следующая

Теорема 3. Для того, чтобы равенство (27) являлось первым интегралом системы уравнений (5), (6), необходимо и достаточно, чтобы при ограничениях $A_{24} \neq B_{24}$ (1, 2, 3) выполнялись условия (20), (25), (26).

Поскольку равенство (24) здесь рассматривается как представитель совокупности интегралов вида $F(v^{s4}) = \mathrm{const}\ (s = 1, 2, 3)$, то данная теорема распространяется и на все остальные интегралы указанного вида. Аналогичного рода замечание относится и к интегралам типа (18).

Соотношения $\omega^{r4} = h,\ v^{s4} = h,\ (r, s = 1, 2, 3)$, заданные равенствами-представителями (23), (27), являются *интегралами перманентного движения* тела с данными независимыми переменными.

Приведённые соотношения имеют следующую интерпретацию: ограничения (19), (25) соответствуют движению тела по инерции в направлении координатной оси $(e_1\ e_4)$, а условия (20) выражают отсутствие гироскопического эффекта относительно той же оси. Интеграл (23) определяет стационарное (*перманентное*) движение тела – равномерное вращение с данной скоростью вокруг координатной оси $(e_1\ e_4)$, а интеграл (27) – его равномерный сдвиг по этой же оси с указанной скоростью. Спиралевидные движения первого и второго рода, определяемые условиями (22), (26), соответственно, существуют совместно с указанными равномерными движениями тела. Соотношения, связанные с интегралами (23), (27), и относящиеся к остальным интегралам родственных групп, могут быть получены из данных равенств путём циклической перестановки величин с индексами 1, 2, 3.

3.2. Дополнительные интегралы с двумя переменными

Рассмотрим условия существования и виды дополнительных первых интегралов основной системы уравнений, заданных в виде $F(\omega^{r4}, v^{r4}) = h$ для r = 1, 2, 3. Зададим вид интеграла-представителя этой группы

$$F\,(\omega^{14}, v^{14}) = h \tag{28}$$

и введём ограничения

$$a_1 \neq 0, \qquad \rho_1 \neq 0, \qquad \sigma_1 \neq 0 \qquad (1, 2, 3), \tag{29}$$

где параметры ρ_r, σ_s определяются равенствами (22), (26), соответственно. Первая группа условий (29) исключает случай существования центральной структурно-кинетической симметрии тела и, согласно кинетическим тождествам (11), эквивалентна ограничениям $A_{24} - A_{34} \neq 0 \quad (1, 2, 3)$. Остальные условия этой системы исключают из многообразия состояний тела его возможные спиралевидные движения первого и второго рода, соответственно, которые могут существовать в общем случае движения тела.

К принятым ограничениям присоединим следующее: по крайней мере один из гироскопических параметров, содержащихся в каждой из групп $\boldsymbol{\lambda}$ (λ_1, λ_2, λ_3), $\boldsymbol{\mu}$ (μ_1, μ_2, μ_3), отличен от нуля. Это ограничение выражает *условие гироскопичности* системы сил, действующих на тело, и представляется в виде

$$\sum_{r=1}^{3} \lambda_r^2 \neq 0, \qquad \sum_{s=1}^{3} \mu_s^2 \neq 0. \tag{30}$$

Если дополнительный первый интеграл основной системы уравнений задан в виде (28), то, согласно порождающему условию (17), имеем

$$J_1\,\omega^{24} - J_2\,\omega^{34} + J_3\,v^{24} - J_4\,v^{34} - k^2 J_0 = 0, \tag{31}$$

где обозначено

$$\begin{gathered} J_1 = Pa_1\omega^{34} - Qb_1v^{24} + P\lambda_3 + Q\mu_1, \qquad J_2 = P\lambda_2 + Q\mu_3, \qquad J_3 = P\mu_1 - Q\lambda_3, \\ J_4 = Pa_1v^{14} - Qb_1\omega^{14} + P\mu_3 - Q\lambda_2, \qquad J_0 = Pm^{14} + Qn^{14}, \quad P = A_{14}^{-1}\,p_{14}, \\ Q = B_{14}^{-1}\,q_{14}. \end{gathered} \tag{32}$$

Поскольку величины P, Q зависят только от переменных ω^{14}, v^{14}, соответственно, то из сотношений (32) следуют условия, при которых равенство (31) выполняется тождественно:

$$P[\lambda_3, \mu_1] + Q[\mu_1, -\lambda_3] = 0, \qquad P[\mu_3, \lambda_2] + Q[-\lambda_2, \mu_3] = 0,$$
$$Pa_1[\omega^{34}, v^{14}] - Qb_1[v^{24}, \omega^{14}] = 0, \qquad J_0 = 0. \tag{33}$$

Рассматривая парные равенства (33) как системы линейных однородных уравнений относительно величин P, Q, согласно критерию существования нетривиальных решений этих уравнений полагаем их определители равными нулю. В силу этого для систем этих уравнений получаем определяющие условия, соответственно,

$$\lambda_3 = \mu_1 = 0, \qquad \lambda_2 = \mu_3 = 0, \tag{34}$$

$$\omega^{14} = v^{14} \equiv 0, \qquad \omega^{34} = v^{24} \equiv 0. \tag{35}$$

При этом к данным условиям должны быть присоединены ограничения (4), устанавливающие движение тела по инерции.

Согласно равенствам (34), (35) из уравнений основной системы получаем

$$A_{24}\dot{\omega}^{24} - \mu_2 v^{34} = 0, \qquad B_{34}\dot{v}^{34} + \mu_2\omega^{24} = 0, \qquad \lambda_1(\omega^{24}, v^{34}) = 0.$$

Отсюда в силу условия гироскопичности имеем $\lambda_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$ и находим условия $\omega^{24} = v^{34} \equiv 0$, присоединяемые к ограничениям (34), (35). Однако при этих значениях величин ω^{r4}, v^{s4} нарушается вид соотношения (28) и не выполняются условия (29), (30).

Таким образом, доказано слеующее утверждение.

Теорема 4. Дополнительный первый интеграл вида (28) для основной системы уравнений при условиях (4), (29), (30) в классе алгебраических функций не существует.

Поскольку интеграл (28) является представителем группы интегралов вида

$$F(\omega^{r4}, v^{s4}) = h \qquad (r, s = 1, 2, 3), \tag{36}$$

то, в силу симметрии структуры основной системы уравнений, данная теорема распространяется и на все однотипные ему интегралы в форме (36).

Рассмотрим условия существования дополнительных интегралов основной системы уравнений, имеющих вид $F(\omega^{r4}, \omega^{s4}) = h$ $(r, s = 1, 2, 3)$. Зададим вид интеграла-представителя этой группы в виде

$$F(\omega^{14}, \omega^{24}) = h \tag{37}$$

и примем ограничения (4), (29), (30). Согласно порождающему условию (17) для выражения (37) имеем

$$H_1\omega^{34} + H_2\omega^{24} - H_3\omega^{14} - H_4 v^{14} + H_5 v^{24} + H_6 v^{34} - k^2 H_0 = 0, \tag{38}$$

где обозначено

$$H_1 = R_{14}a_1\omega^{24} + R_{24}a_2\omega^{14} - R_{14}\lambda_2 + R_{24}\lambda_1, \qquad H_2 = R_{14}\lambda_3, \qquad H_3 = R_{24}\lambda_3,$$
$$H_4 = R_{14}a_1 v^{34} + R_{24}a_2 v^{24} + R_{24}\mu_1, \qquad H_5 = R_{14}\mu_1, \qquad H_6 = R_{24}\mu_2 - R_{14}\mu_3, \tag{39}$$
$$H_0 = R_{14}m^{14} + R_{24}n^{14}, \qquad R_{r4} = A_{r4}^{-1}p_{r4} \qquad (r = 1,\, 2).$$

Поскольку величины R_{r4} зависят только от переменных ω_{14}, ω_{24}, то из равенств (38), (39) следуют условия, при которых соотношение (38) выполняется тождественно по переменным $\omega^{r4}, v^{s4}\,(r, s = 1, 2, 3)$:

$$R_{14}[\lambda_3,\, \mu_1] = 0, \qquad R_{24}\mu_2 - R_{14}\mu_3 = 0, \qquad R_{24}\lambda_3 = 0,$$
$$R_{14}a_1[\omega^{24}, v^{34}] + R_{24}a_2[\omega^{14}, v^{24}] + R_{24}[\lambda_1,\, \mu_1] - R_{14}\lambda_2 = 0, \qquad H_0 = 0. \tag{40}$$

Из первых трёх равенств системы (40) следует

$$\lambda_3 = 0, \qquad \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0, \tag{41}$$

а из остальных соотношений этой системы имеем

$$\omega^{14} = \omega^{24} = v^{24} = v^{34} \equiv 0, \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \qquad m^{14} = n^{14} = 0. \tag{42}$$

Согласно равенствам (41), (42) нарушается вид соотношения (37) и не выполняются условия (29), (30). Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 5. Дополнительный первый интеграл вида (37) для основной системы уравнений при условиях (4), (29), (30) в классе алгебраических функций не существует.

Так как интеграл (37) является представителем группы интегралов вида

$$F(\omega^{r4}, \omega^{s4}) = h \qquad (r, s = 1, 2, 3; \quad r \neq s), \tag{43}$$

то, в силу симметрии структуры основной системы уравнений эта теорема распространяется на все однотипные ему интегралы в форме (43). Согласно этому же свойству симметричности относительно независимых переменных ω^{r4}, v^{s4} утверждение теоремы 5 распространяется и на дополнительные интегралы вида

$$F(v^{r4}, v^{s4}) = h \qquad (r, s = 1, 2, 3; \quad r \neq s). \tag{44}$$

Интегралы вида (43) и (44) в силу независимости содержащихся в них переменных и симметрии основной системы уравнений относятся к одному и тому же виду.

4. Линейный интеграл

Рассмотрим вопрос о существовании линейного по всем независимым переменным ω^{r4}, v^{s4} первого интеграла основной системы уравнений при определённых структурно-кинетических ограничениях. Положим, что твёрдое тело обладает центральной структурной симметрией, согласно которой

$$A_{r4} = A, \qquad B_{s4} = B \qquad (r, s = 1, 2, 3), \tag{45}$$

в силу чего вследствие тождества (11) имеем $A + B = k^2 M$, и, кроме того, примем

$$A = B = \frac{1}{2} k^2 M, \tag{46}$$

а также условия гироскопичности (30). Ограничение (46) соответствует характерному частному случаю структурно-кинетической симметрии тела, является следствием тождества (11) и существует только для пространства Римана S_3.

Специальный выбор ограничений, представленных условиями (45), (46), позволяет произвести точную линеаризацию системы уравнений (5), (6), в результате чего эта система при инерционном движении тела принимает вид

$$\begin{aligned} &A\dot{\omega}^{14} + \lambda_2 \omega^{34} - \lambda_3 \omega^{24} + \mu_3 v^{34} - \mu_1 v^{24} = 0, \\ &A\dot{v}^{14} + \mu_3 \omega^{34} - \mu_1 \omega^{24} + \lambda_3 v^{24} - \lambda_2 v^{34} = 0 \end{aligned} \qquad (1,\,2,\,3). \tag{47}$$

Согласно поставленной задаче линейный интеграл системы (47) ищем в виде

$$\sum_{r,s=1}^{3} (c_r \omega^{r4} + g_s v^{s4}) = h, \tag{48}$$

где $c_r\ g_s$ – искомые постоянные, которые, согласно порождающему условию (17), равны p_{r4}, q_{s4}, соответственно; h – произвольная постоянная. Матрица системы (47) является 2-кососимметрической, имеющей вид

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 & 0 & -\mu_1 & \mu_3 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_1 & \mu_1 & 0 & -\mu_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 & -\mu_3 & \mu_2 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & \mu_3 & 0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ \mu_1 & 0 & -\mu_2 & -\lambda_3 & 0 & \lambda_1 \\ -\mu_3 & \mu_2 & 0 & \lambda_2 & -\lambda_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{49}$$

Положим ранг матрицы (49) равным $R = \operatorname{rang} \mathbf{D} = 6$. Введём матрицы-строки $[c_r], [g_s]$ и пусть величины X_{r4}, Y_{s4} – суммы упорядоченных парных произведений элементов этих матриц с соответствующими элементами строк матрицы (49). Дифференцируя по t выражение (48), в силу уравнений системы (47) получаем равенство

$$\sum_{r,s=1}^{3} (X_{r4} \omega^{r4} + Y_{s4} v^{s4}) = 0, \tag{50}$$

которое тождественно удовлетворяется по данным переменным при определённых значениях параметров c_r, g_s. Тогда, согласно равенству (50), для данных параметров получаем однородную систему шести линейных алгебраических уравнений, все значения которых при заданных предпосылках равны нулю.

Теорема 6. Линейный первый интеграл вида (48) для системы уравнений (5), (6) с матрицей (49) ранга $R = 6$ при условиях (4), (30), (45), (46) не существует.

Заключение

Исследование вопроса о существовании дополнительных первых алгебраических интегралов системы уравнений инерционного движения тела, происходящего в пространстве S_3, выявило следующие его свойства.

Согласно принятой математической модели движение твёрдого тела (*тела-модели*) в пространстве S_3, происходящее под действием системы гироскопических сил с постоянными силовыми параметрами *динамически эквивалентно* движению гиростата с постоянными компонентами гиростатического момента. Тело-носитель этого гиростата имеет кинетическую конфигурацию, идентичную конфигурации твёрдого тела-модели. Такой гиростат в кинетическом смысле является *эквивалентным* исходному телу-модели.

Интеграл энергии динамической системы тела, определённый в открытой, односвязной регулярной области конфигурационного пространства, существует в общем случае без каких-либо ограничений и не зависит от условий гироскопичности системы сил.

Дополнительные интегралы, содержащие одну независимую переменную, существуют при некоторых структурно-кинетических ограничениях и определяют стационарное движение тела по инерции: это либо его равномерное вращение относительно главной оси инерции, либо равномерный сдвиг в направлении этой оси. В этих состояниях реализуются спиралевидные движения первого или второго рода, соответственно. Интегралы стационарных движений (18), (27) в фазовом пространстве интерпретируются как геодезические линии левоинвариантной метрики, являющиеся однопараметрическими подгруппами. Компоненты винта скорости стационарного движения тела являются критическими точками энергии на орбите коприсоединённого представления.

Дополнительные первые алгебраические интегралы, содержащие две независимые переменные, определённые на многообразии, исключающем структурно-кинетическую симметрию тела и его спиралевидные движения, при воздействии на тело гироскопических сил не существуют.

Линейный интеграл системы уравнений движения тела, зависящий от шести переменных – компонент кинематического винта тела, в случае его центральной структурно-кинетической симметрии при выполнении условий гироскопичности системы сил и специальном выборе главных моментов инерции тела вида (46), не существует.

Задача исследования существования дополнительных первых алгебраических интегралов основной системы уравнений, поставленная в разделе 3 настоящей статьи, фактически является частью общей аналитической *проблемы полноты* симплектического многообразия первых интегралов системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта проблема, относящаяся к классу автономных детерминированных динамических систем, сформулирована в общем виде и содержится в монографии [9].

Литература

1. Стоянович Р. О динамике твёрдого тела в римановом пространстве // Реферативный журнал ВИНИТИ РАН «Механика», 1958, № 8. Реф. № 8376 / Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 1957. Bd. 37, N 7–8. S. 284–285.
2. Макеев Н.Н. Стационарные движения твёрдого тела в эллиптическом пространстве // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2025. № 1. С. 19–28.
3. Журавлёв В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
4. Уиттекер Е.Т. Аналитическая динамика. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 500 с.
5. Харламов П.В. О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Прикладная механика и техническая физика. 1963. Т. 4, № 4. С. 17–29.
6. Косогляд Э.И. Движение однородного шара в эллиптическом пространстве. М., 1982. Деп. в ВИНИТИ РАН 01.06.82, № 2699-В82. 18 с.
7. Джакалья Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.
8. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука. 1974. 432 с.
9. Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973. 512 с.