

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>
URL статьи: mathmod.esrae.ru/51-219

Ссылка для цитирования этой статьи:

Макеев Н.Н. Динамика твёрдого тела в потенциальном поле эллиптического пространства // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2025. №*

УДК 531.392 + 517.913

DOI:10.24412/2541-9269-2025-3-66-77

ДИНАМИКА ТВЁРДОГО ТЕЛА В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Макеев Н.Н.

DYNAMICS OF A RIGID BODY IN A POTENTIAL FIELD OF ELLIPTIC SPACE

Makeev N.N.

Аннотация. Исследуются свойства движений свободного от связей абсолютно твёрдого тела в потенциальном силовом поле эллиптического пространства. Доказано существование первых алгебраических интегралов системы уравнений движения тела, получены их явные выражения и дана интерпретация. Приведены уравнения движения тела в центральном потенциальном силовом поле. Определены многообразия стационарных движений тела, обладающего центральной структурно-кинетической симметрией. Установлено, что это многообразие состоит из перманентных и особых стационарных движений.

Ключевые слова: твёрдое тело, эллиптическое пространство, потенциальное поле, первые интегралы, стационарное движение

Abstract. The properties of motion of a rigid body free from constraints in a potential force field of elliptical space are investigated. The existence of the first algebraic integrals of the system of equations of motion of a body is proven, their explicit expressions are obtained and an interpretation is given. The equations of motion of a body in a central potential force field are given. The manifold of stationary motions of a body with central structural-kinetic symmetry are determined. It has been established that this diversity consists of permanent and special stationary movements.

Keywords: rigid body, elliptical space, potential field, first integrals, stationary motion

Введение

Свойства движения свободного от связей абсолютно твёрдого тела в потенциальном силовом поле трёхмерного эллиптического пространства постоянной положительной кривизны (пространства Римана) в научной литературе к на-

стоящему времени не описаны. Для исследования этих свойств необходимо получить уравнения движения тела, описать структуру стационарного потенциального (консервативного) силового поля и определить инвариантные характеристики движения тела – первые алгебраические интегралы его динамической системы. Этот аналитический аппарат позволит исследовать движение и устойчивость состояния тела, а также моделировать его возможные движения, существующие в данном силовом поле.

В отдельных публикациях приведены уравнения инерционного движения твёрдого тела в пространстве Римана и дано описание его простейших движений в безсиловом режиме, а также исследовано движение тела под воздействием гироскопических [1] и постоянных следящих сил [2]. Аналогичное состояние исследований задач динамики твёрдого тела имеет место и в случаях его движения в гиперболическом пространстве постоянной отрицательной кривизны – в пространстве Лобачевского [3].

Особенность анализа движения тела в трёхмерном эллиптическом пространстве по сравнению с его движением вокруг неподвижного полюса в евклидовом пространстве той же размерности состоит в том, что в пространстве Римана движение тела должно описываться уже не тремя, а шестью компонентами бивектора скорости: тремя компонентами скорости вращения тела вокруг его главных осей инерции и тремя компонентами скорости сдвига вдоль этих осей. Помимо этого, в пространстве Римана ориентация тела определяется шестью параметрами, тогда как в евклидовом пространстве – только тремя. Соответственно, фазовым многообразием тела в пространстве Римана является 12-мерное многообразие.

В настоящей работе для определения ориентации тела относительно инерциального пространства вводятся два базовых орта – в противоположность классической схеме, принятой для трёхмерного евклидова пространства, где используется только один орт.

Задача, исследуемая в работе, является частью общей фундаментальной проблемы нахождения многообразия движений твёрдого тела в неевклидовых пространствах постоянной кривизны: положительной (пространстве Римана), отрицательной (пространстве Лобачевского) и в сферическом пространстве.

1. Предварительные положения и уравнения движения

Рассматриваются свойства движения свободного от связей абсолютно твёрдого тела, находящегося в поле сил трёхмерного пространства Римана S_3 с абсолютном, заданным уравнением

$$g_{ij} x^i x^j \equiv \sum_{s=1}^4 (x^s)^2 = 0,$$

где g_{ij} – метрический тензор (дважды ковариантный симметрический тензор) с

вейерштрассовыми координатами, отнесённый к конфигурационному пространству твёрдого тела. Пространство Римана – это поле данного тензора, порождающее риманово многообразие и фазовое пространство движущегося тела. Движение пространства S_3 , определяемое простым бивектором, является его вращением вокруг прямой a_{ij} или сдвигом относительно поляры этой прямой. Двойственность между вращением и сдвигом относительно заданной прямой здесь приводит к отождествлению простого бивектора с соответствующим скользящим вектором – *вектором эллиптического пространства*.

Движение пространства S_3 , определяемое бивектором общего вида a_{ij} , является винтовым с парой осей P_{ij}, Q_{ij} . В этом случае бивектор a_{ij} представляется в виде суммы простых бивекторов вида

$$a_{ij} = \alpha P_{ij} + \beta Q_{ij},$$

где P_{ij}, Q_{ij} – плюккеровы координаты внешней и внутренней осей данного бивектора, соответственно; $(\alpha, \beta) \neq 0$ – произвольные действительные постоянные. Бивектор a_{ij} называют *винтом пространства S_3* с осями P, Q .

В отличие от евклидова пространства введём два ортонормированных вектора – орты $\mathbf{p}(p_1, p_2, p_3), \mathbf{q}(q_1, q_2, q_3)$, соответствующие осям P, Q заданного бивектора, неподвижные относительно инерциального пространства, удовлетворяющие условиям нормирования:

$$|\mathbf{p}|^2 = 1, \quad |\mathbf{q}|^2 = 1. \quad (1)$$

Пара ортов $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, отнесённая к координатному тетраэдру T_p , неподвижному относительно инерциального конфигурационного пространства, образуют характерный бивектор эллиптического пространства – *биорт*.

Введём автополярный относительно данного абсолюта координатный тетраэдр $T_r = (e_1 \dots e_4)$ с вершинами – точками $e_i (i = \overline{1, 4})$, отождествляемый с *главным тетраэдром инерции* тела, неизменно связанный с телом. Оси прямоугольных координат, совпадающие с рёбрами этого тетраэдра, принимаются за *главные оси инерции тела*, а его вершина – e_4 (точка O) – за *центр инерции* (центр масс). При этом моменты инерции тела относительно главных осей инерции принимаются за *главные осевые моменты инерции вращения*. Сдвиг пространства S_3 – одно из его характерных свойств, позволяющее ввести понятия *главных моментов инерции сдвига* тела относительно осей координатного тетраэдра $T_r (Ox_1x_2x_3)$ [4].

Обозначим: $A_{r4}, B_{s4} (r, s = 1, 2, 3)$ – главные моменты инерции вращения и сдвига; $\Omega(\omega^{r4}), \mathbf{V}(v^{s4})$ – бивекторы скоростей вращения и сдвига тела, заданные относительно тетраэдра T_r компонентами $\omega^{r4}, v^{s4}; \mathbf{L}(L^{r4}), \mathbf{N}(N^{s4}) (r, s = 1, 2, 3)$ – составляющие силового винта, соответствующие вращению и сдвигу тела, соответственно; k – длина радиуса кривизны данного пространства.

В работе [5] получены динамические уравнения твёрдого тела, движущегося в пространстве S_3 :

$$\begin{aligned} A_{14} \dot{\omega}^{14} + (B_{14} - B_{34})(\omega^{24} \omega^{34} - v^{14} v^{34}) &= k^2 L^{14} \\ B_{14} \dot{v}^{14} + (A_{24} - B_{24})(\omega^{14} v^{34} - \omega^{24} v^{24}) &= k^2 N^{14} \end{aligned} \quad (1, 2, 3). \quad (2)$$

Равенства (2) образуют систему шести уравнений, заданную приведёнными уравнениями-представителями; символ (1, 2, 3) здесь и всюду далее означает, что остальные четыре уравнения данной системы могут быть получены из представленных циклической перестановкой индексов 1, 2, 3. Эта совокупность уравнений является многопараметрической системой эволюционного типа с биквадратичной нелинейностью и задана в открытой регулярной области эллиптического пространства S_3 .

Получим уравнения движения тела в потенциальном силовом поле эллиптического пространства с потенциалом $U(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, полагая, что моментно-силовые бивекторы $\mathbf{L}(L^{r4})$, $\mathbf{N}(N^{s4})$ ($r, s = 1, 2, 3$) соответствуют силовому полю с данным потенциалом. При этом предполагается, что U – аналитическая функция, определённая в открытой регулярной односвязной области данного пространства.

Поскольку метрика пространства S_3 локально (в малом) совпадает с евклидовой метрикой, то каждой точке эллиптического пространства сопоставляется касательное евклидово пространство, в котором имеет место пуассонова структура многообразий. Вследствие этого в пространстве S_3 данная структура сохраняется, что позволяет представить моментно-силовое воздействие на тело в координатных осях тетраэдра инерции T_r компонентами вида

$$L^{14} = p_3 U_2 - p_2 U_3, \quad N^{14} = q_3 \Phi_2 - q_2 \Phi_3 \quad (1, 2, 3), \quad (3)$$

где обозначено

$$U_i = \frac{\partial U}{\partial p_i}, \quad \Phi_j = \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (4)$$

Выражения (3) представляют дифференциальные операторы первого порядка над функцией U с пуассоновой структурой (аналог [6, с. 179]). Система уравнений (2) в силу соотношений (3), (4) принимает вид

$$\begin{aligned} A_{14} \dot{\omega}^{14} + (B_{14} - B_{34})(\omega^{24} \omega^{34} - v^{14} v^{34}) &= k^2 (p_3 U_2 - p_2 U_3), \\ B_{14} \dot{v}^{14} + (A_{24} - B_{24})(\omega^{14} v^{34} - \omega^{24} v^{24}) &= k^2 (q_3 \Phi_2 - q_2 \Phi_3) \end{aligned} \quad (1, 2, 3). \quad (5)$$

К уравнениям (5) следует присоединить систему аналогов кинематических уравнений Пуассона для ортов $\mathbf{p}, \mathbf{q}$:

$$\dot{p}_1 = \omega^{24} p_3 - \omega^{34} p_2, \quad \dot{q}_1 = v^{24} q_3 - v^{34} q_2 \quad (1, 2, 3), \quad (6)$$

также имеющих пуассонову структуру, и структурно-кинетические тождества для твёрдого тела в пространстве S_3 [4]:

$$A_{14} + B_{24} = A_{24} + B_{34} = A_{34} + B_{14} = k^2 M, \quad (7)$$

где M – величина массы тела.

Содержащиеся в уравнениях системы (3)–(6) величины p_r, q_s ($r, s = 1, 2, 3$) являются компонентами векторов Пуассона $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ (термин [6, с. 343]), в совокупности образующих биорт.

2. Интегралы динамической системы

Рассмотрим задачу о существовании первых алгебраических интегралов системы уравнений (5), (6) и покажем, что равенства (7) являются критериальными условиями их существования. Введём функцию

$$F_1(\Omega, \mathbf{V}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^3 [A_{i4}(\omega^{i4})^2 + B_{i4}(v^{i4})^2] - 2k^2 U(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

и обозначим

$$a_1 = B_{34} - B_{14}, \quad b_1 = B_{24} - A_{24} \quad (1, 2, 3).$$

Теорема 1. Для того, чтобы равенство

$$F_1(\Omega, \mathbf{V}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = 2h \quad (8)$$

являлось первым интегралом системы уравнений (5), (6), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись структурно-кинетические тождества (7).

Доказательство. Необходимость. Если равенство (8) является первым интегралом системы уравнений (5), (6), то, дифференцируя по t это равенство, в силу уравнений этой системы получаем алгебраическое равенство, тождественно по всем переменным удовлетворяющееся при выполнении ограничений

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0, \quad a_1 - b_1 + b_3 = 0, \quad a_2 + b_1 - b_2 = 0, \quad a_3 + b_2 - b_3 = 0.$$

Данные равенства обращаются в очевидные тождества при выполнении структурно-кинетических условий (7).

Достаточность. Если выполняются условия (7), то, образуя комбинацию

$$\sum_{i=1}^3 [(A_{i4} \dot{\omega}^{i4}) \omega^{i4} + (B_{i4} \dot{v}^{i4}) v^{i4} + p_i U_{i+2} - p_{i+2} U_i + q_i \Phi_{i+2} - q_{i+2} \Phi_i], \quad (9)$$

в силу уравнений системы (5), (6) и очевидного равенства

$$\dot{U}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^3 [\omega^{i4} (p_{i+2} U_{i+1} - p_{i+1} U_{i+2}) + v^{i4} (q_{i+2} \Phi_{i+1} - q_{i+1} \Phi_{i+2})] \quad (10)$$

находим, что данная комбинация является интегрируемой по Риману. Согласно этому равенство (8) является первым интегралом системы уравнений (5), (6).

Замечание. Для индексов величин, находящихся в равенствах (9), (10), должно выполняться условие $i+2 \leq 3$ ($i = 1, 2, 3$). В ином случае выполнение этого условия достигается вычитанием из значения данного индекса числа $j = 3$.

В пространстве переменных $(\Omega, \mathbf{V})$ интегралу (8) соответствует непрерывная гладкая замкнутая поверхность, ограничивающая односвязную регулярную

(без особенностей) область, внутри которой при движении тела находится изображающая точка фазового пространства. Этот интеграл, называемый *интегралом энергии*, является *изоэнергетическим инвариантом* твёрдого тела в силовом поле с потенциалом U и представляется равенством

$$T(\Omega, \mathbf{V}) - k^2 U(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = h, \quad (11)$$

где величина кинетической энергии тела определяется равенством

$$T(\Omega, \mathbf{V}) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^3 [A_{r4} (\omega^{r4})^2 + B_{r4} (v^{r4})^2], \quad (12)$$

а величина h в равенстве (11) определяет уровень энергии динамической системы твёрдого тела; величина T определена на римановом многообразии как невырожденная квадратичная форма, заданная на касательном пространстве.

Введём структурно-кинетические условия

$$A_{r4} = A, \quad B_{s4} = B \quad (r, s = 1, 2, 3), \quad (13)$$

билинейную по переменным $(\Omega, \mathbf{V})$ форму

$$F_2(\Omega, \mathbf{V}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^3 (A \omega^{i4} p_i + B v^{i4} q_i)$$

и обозначим H произвольную действительную постоянную.

Теорема 2. Если для системы уравнений (5), (6) выполняются структурно-кинетические условия (13), то равенство

$$F_2(\Omega, \mathbf{V}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = H \quad (14)$$

является первым интегралом данной системы.

Доказательство. Образуя комбинацию

$$\sum_{i=1}^3 (A \dot{\omega}^{i4} p_i + B \dot{v}^{i4} q_i),$$

в силу уравнений системы (5), (6) получаем равенство, являющееся интегрируемой по Риману комбинацией, принимающей при интегрировании вид (14).

К интегралам (8), (14) следует присоединить равенства (1), являющиеся тривиальными интегралами, которые в главных осях автополярного координатного тетраэдра представляются в виде

$$F_3(\mathbf{p}) \equiv \sum_{i=1}^3 p_i^2 = 1, \quad F_4(\mathbf{q}) \equiv \sum_{j=1}^3 q_j^2 = 1. \quad (15)$$

Таким образом, множество алгебраических первых интегралов системы уравнений (5), (6) состоит из интегралов (8), (14), (15), обусловленных однопараметрическими группами симметрий динамической системы тела согласно теореме Э. Нетер [6, с. 335].

Интеграл энергии (11) с изоэнергетическим параметром h выражает неиз-

менность величины полной механической энергии тела и соответствует натуральной механической системе с заданным лагранжианом.

Интеграл (14) показывает постоянность величины проекции кинетического винта тела на выделенные оси риманова пространства и называется *интегралом проекции кинетического винта*. Этот интеграл порождён группой симметрий.

Интегралы (15) выражают свойство инвариантности относительно действия группы поворотов применительно к ортам $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, обладающим свойствами структурной симметрии, обусловленными теоремой Нетер, порождающим векторное поле этой группы. Этими интегралами определено в S_3 фазовое пространство твёрдого тела.

Все указанные алгебраические интегралы являются *инвариантами движения* твёрдого тела в потенциальном силовом поле пространства S_3 .

3. Уравнения движения в центральном потенциальном поле

Потенциальное силовое поле, вложенное в пространство S_3 , по виду может относиться к различным структурам. В качестве примера здесь рассмотрим поле, заданное потенциальной функцией вида

$$U(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^3 (K_{ii} p_i^2 + C_{ii} q_i^2) + \sum_{i,j=1}^3 (K_{ij} p_i p_j + C_{ij} q_i q_j) \right] + \sum_{i=1}^3 (k_i p_i + l_i q_i), \quad (16)$$

где K_{ij}, C_{ij}, k_i, l_i ($i, j=1, 2, 3; i \neq j$) – заданные постоянные параметры; U – функция, определённая в открытой регулярной области данного пространства. При этом предполагается, что в выражении (16) соответствующий тензор является симметрическим, в силу чего имеем $K_{ij} = K_{ji}$, $C_{ij} = C_{ji}$ ($i, j=1, 2, 3; i \neq j$) и в главных осях тензора эти величины обращаются в нуль.

Согласно выражению (16) система динамических уравнений (5) представляется в виде

$$\begin{aligned} A_{14} \dot{\omega}^{14} + (B_{14} - B_{34})(\omega^{24} \omega^{34} - v^{14} v^{34}) &= k^2 (D_1 p_2 p_3 + k_2 p_3 - k_3 p_2), \\ B_{14} \dot{v}^{14} + (A_{24} - B_{24})(\omega^{14} v^{34} - \omega^{24} v^{24}) &= k^2 (G_1 q_2 q_3 + l_2 q_3 - l_3 q_2) \end{aligned} \quad (17)$$

(1, 2, 3),

где обозначено

$$D_1 = K_{33} - K_{22}, \quad G_1 = C_{33} - C_{22} \quad (1, 2, 3).$$

Интеграл (11) исходной системы для уравнений движения тела в форме (17) представляется в виде

$$2T + k^2 \sum_{i=1}^3 [K_{ii} p_i^2 + C_{ii} q_i^2 - 2(k_i p_i + l_i q_i)] = 2h,$$

где величина T кинетической энергии тела определяется равенством (12). Уравнения (17) и их интеграл энергии применяются в дальнейшем при исследовании движения и устойчивости твёрдого тела в эллиптическом пространстве.

Система уравнений (17) интерпретируется следующим образом. В пространстве S_3 введём стационарное центральное гравитационное поле, порождённое точечным гравитационным источником, определённое в открытой регулярной области этого пространства. Выразим в данных уравнениях постоянные D_r, k_r, G_s, l_s ($r, s=1, 2, 3$) через заданные параметры поля. Тогда величины k_r, l_s соответствуют барицентрическим координатам тела; D_r, G_s – его инерционно-кинетическим параметрам. Такая система уравнений является системой динамических уравнений твёрдого тела, движущегося в гравитационном поле с центральной (сферической) структурой, в котором ускорение силы гравитации в точке поля, находящейся на фиксированном расстоянии R от центра гравитации равно $g = \lambda R^{-2}$. Здесь λ – универсальная гравитационная постоянная. К уравнениям (17) следует присоединить систему уравнений Пуассона (6).

Согласно уравнениям (17) данное стационарное гравитационное поле является суперпозицией собственно центрального и линейного однородного поля с прямолинейными силовыми линиями.

Уравнения типа (17) характерны не только для гравитационного поля; они соответствуют и полям любой другой физической природы, имеющим центральную структуру. Это обусловлено универсальным фундаментальным свойством – *изоморфизмом* математических моделей силовых полей одинаковой структуры. Примерами силовых полей негравитационной природы, носящих идентичную структуру, являются: поле статических электрических зарядов, поле точечных источников светового излучения и другие негравитационные поля.

4. Стационарные движения

Рассмотрим класс стационарных движений тела, происходящих в силовом поле пространства S_3 с потенциалом $U(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ общего вида. Предполагается, что тело обладает центральной структурно-кинетической симметрией с условиями (13), при которых первые интегралы (8), (14) системы уравнений (5), (6) имеют вид

$$\begin{aligned} F_1(\Omega, \mathbf{V}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) &\equiv \sum_{i=1}^3 [A(\omega^{i4})^2 + B(v^{i4})^2] - 2k^2 U(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 2h, \\ F_2(\Omega, \mathbf{V}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) &\equiv \sum_{i=1}^3 (A\omega^{i4} p_i + Bv^{i4} q_i) = H. \end{aligned} \quad (18)$$

К системе равенств (18) следует присоединить тривиальные интегралы (15).

Определим многообразие стационарных движений тела, существующее в области определения интегралов (15), (18). Образует полную линейную по Лагранжу связку данных интегралов в виде

$$W(\Omega, \mathbf{V}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = F_1 - 2\lambda F_2 + \mu F_3 + \nu F_4, \quad (19)$$

где λ, μ, ν – множители Лагранжа с размерностями, соответствующими скорости и механической энергии, соответственно. Соотношение (19) интерпретируется как линейное пространство первых интегралов, принимаемых за базисные (терминология [7]).

Введём множество переменных

$$\{u_i\} = \{\omega^{r4}, v^{s4}, p_j, q_j\}, \quad v_i = \frac{\partial W}{\partial u_i} \quad (i=1, \dots, 12; r, s, j=1, 2, 3). \quad (20)$$

Здесь $\{ \dots \}$ – символ совокупности значений данных величин. Согласно равенствам (20) множество стационарных движений тела, если оно существует, определяется системой уравнений

$$v_i = 0 \quad (i=1, \dots, 12). \quad (21)$$

Уравнения (21), представленные в переменных (20), интерпретируются как множество преобразований Лежандра от переменных u_i к переменным v_i , параметризованное величинами λ, μ, ν .

Представляя функцию W (19) согласно соотношениям (15), (18) в виде

$$W(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^3 \{ [A(\omega^{i4})^2 + B(v^{i4})^2] - 2\lambda(A\omega^{i4}p_i + Bv^{i4}q_i) + \mu p_i^2 + \nu q_i^2 \} - 2kU(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \quad (22)$$

и применяя необходимые условия существования условного экстремума этой функции

$$\frac{\partial W}{\partial \Omega} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{V}} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}} = 0,$$

согласно соотношениям (18), (19) в результате получаем

$$\omega^{14} = \lambda p_1, \quad v^{14} = \lambda q_1 \quad (1, 2, 3), \quad (23)$$

$$(A\lambda^2 - \mu)p_1 + k^2U_1 = 0, \quad (B\lambda^2 - \nu)q_1 + k^2\Phi_1 = 0 \quad (1, 2, 3). \quad (24)$$

Из равенств (23) следует

$$\Omega = \lambda \mathbf{p}, \quad \mathbf{V} = \lambda \mathbf{q}. \quad (25)$$

Соотношения (23), (25) определяют множества перманентных движений тела: вращений относительно орта $\mathbf{p}$ и сдвигов относительно орта $\mathbf{q}$. При этом значения $\lambda > 0$ соответствуют “прямому” (в условном смысле) перманентному движению, а значения $\lambda < 0$ – “обратному”. Уравнения (24) устанавливают ориентацию осей перманентных движений тела в конфигурационном пространстве. Значения параметров λ, μ определяются любыми двумя уравнениями системы (24). Исключая эти параметры из данной системы, получим в пространстве

переменных $\{p_r, q_s\}$ линейчатую поверхность, образующие которой являются осями перманентных движений твёрдого тела.

Определим характер стационарных движений тела с интегралами (18) на множестве (20). Для этого рассмотрим якобиан преобразования $u_i \rightarrow v_i$, определяемый равенством

$$J(u_i, v_j) = \det \left[\frac{\partial v_i}{\partial u_j} \right] \quad (i, j = 1, \dots, 12). \quad (26)$$

Вычисляя величину J согласно равенствам (20), (23), (24), (26), получим определитель двенадцатого порядка. Подробности дальнейших вычислений, связанных с данным якобианом, здесь не приводятся ввиду его высокой размерности и громоздкости промежуточных аналитических выражений. Ввиду этого далее излагается только описание итоговых результатов исследования.

Представив определитель (26) в развёрнутой форме, в результате вычислений приходим к выводу о существовании следующих видов стационарных движений тела – вращений и сдвигов.

Значения параметров λ, μ, ν , для которых якобиан (16) отличен от нуля, соответствуют группе невырожденных преобразований Лежандра. При этом точке $v_i = 0$ соответствует единственная определённая точка $u_i = 0$ ($i = 1, \dots, 12$). Следовательно, данная часть многообразия стационарных движений тела состоит из континуального множества его перманентных движений – перманентного вращения и перманентного сдвига.

Выделив из множества значений параметров λ, μ, ν такие, при которых ранг якобиана $\text{rang } J < 12$, в результате получим множество особых стационарных движений, являющихся аналогами регулярных движений тела в трёхмерном евклидовом пространстве. Эти аналоги обладают более общими свойствами стационарности по сравнению с найденными перманентными движениями и при определённых значениях параметров вырождаются в собственно перманентные движения.

Таким образом, данное многообразие стационарных движений тела состоит из собственно перманентных движений, определяемых равенствами (25), и совокупности особых, а также вырожденных стационарных движений.

Заключение

Уравнения движения твёрдого тела в потенциальном силовом поле, полученные в настоящей работе, выведены на базе основополагающего принципа, связанного со структурой Пуассона, а также из соображения законов структурной симметрии и пуассонова изоморфизма математических моделей. Одним из выражений пуассоновой структуры является компактный объект – скобка Пуассона (коммутатор векторных полей на многообразии) и универсальное свойство кососимметричности модельных объектов.

В работе принята модель потенциального силового поля, представленная в качестве примера равенством (16), характерная для евклидова пространства, и гипотетически применяемая для трёхмерного пространства Римана. Применение этого приёма оправдывается вышеприведёнными аргументами. При этом, например, по Л. Кронекеру, закон притяжения Ньютона, открытый для евклидова пространства, фактически является лишь частным проявлением универсальных законов, действующих в пространствах ненулевой кривизны [8, с. 24].

Применённое в работе свойство симметричности пространства является одним из фундаментальных свойств пространства и времени. В расширенном смысле это свойство выражает инвариантность отдельных сторон объектов относительно некоторых преобразований. Вследствие этого исследование свойств движения механических объектов в неевклидовых пространствах для классической механики твёрдого тела имеет кардинальное значение. При этом некоторые свойства движения твёрдых тел в этих пространствах трактуются как определённые аналоги соответствующих реальных свойств, имеющих место в евклидовом пространстве.

Выбор неклассической модели, применённой в статье для риманова пространства, носит эмпирически-гипотетический характер; эта модель не имеет какого-либо априорного обоснования. Согласно А. Пуанкаре: “Никакая геометрия [пространства] не может быть более истинна, чем другая” (цитируется по тексту источника [9, с. 41]). Модель, принятая в данной работе, и содержащая структуру потенциального силового поля, свойственную евклидову пространству, характерна тем, что она при таком принятии сохраняет свойство интегрируемости динамической системы тела – важнейшего свойства классического подхода к модельному исследованию.

Поскольку система уравнений (5), (6) допускает однопараметрическую группу симметрий (группу диффеоморфизмов), то, согласно теореме Э. Нетер [6], эта система должна иметь первые интегралы. Возможное расширение множества этих интегралов обуславливается существованием более общей расширенной группы симметрий.

В силу изоморфизма моделей, принимаемых в классической механике, логично постулировать, что в рассмотренной задаче вопрос о нахождении полного множества инвариантов исходной системы уравнений непосредственно связан с проблемой существования однозначных решений данной системы. Анализ условий существования этих решений позволяет найти критерии существования дополнительных первых алгебраических интегралов и инвариантных соотношений, приводящих к инволютивной системе первых интегралов. Это, в свою очередь, обуславливает интегрируемость по Лиувиллю [6, с. 234] исходной динамической системы.

Для неинволютивной системы интегралов порядок полученной системы уравнений может быть понижен на величину ранга пуассоновой структуры. Этот ранг определяется наибольшим числом независимых функций от первых интегралов, коммутирующих между собой. Понижение порядка данной систе-

мы уравнений реализуется на поле симметрий в результате проведения регулярного редуцирования.

Литература

1. Макеев Н.Н. Движение твёрдого тела в поле гироскопических сил пространства Римана // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2025, № 3. С. 38–51. DOI: 10.24412/2541-9269-2025-3-38-51
2. Макеев Н.Н. Движение твёрдого тела в поле следящих сил эллиптического пространства // Инновационная наука. 2025, № 5 (2). С. 11–14.
3. Макеев Н.Н. Интегралы уравнений движения в пространстве Лобачевского // Математический вестник Вятского ун-та. 2022, № 1 (24). С. 24–32. DOI: 10.25730 | VSU. 0536.22.004.
4. Косогляд Э.И. Движение однородного шара в эллиптическом пространстве. М. 1982. Деп. в ВИНТИ РАН 01.06. 82, № 2699-82. 18 с.
5. Макеев Н.Н. Интегралы уравнений движения твёрдого тела в эллиптическом пространстве // Вестник науки. 2025. Т. 2 (83). С. 739–749. DOI: 10.24412/2712-8849-2025-283-739-749
6. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука. 1974. 432 с.
7. Иртегов В.Д. О смене устойчивости при бифуркациях // Проблемы аналитической механики, устойчивости и управления движением: сб. науч. тр. Новосибирск: Наука. 1991. С. 73–79.
8. Классическая динамика в неевклидовых пространствах: сб. ст. М.; Ижевск. Ин-т компьютерных исследований: науч.-изд. центр РХД, 2004. 384 с.
9. Пуанкаре А. Наука и гипотеза (пер. с фр.). М.: Книжный дом Либроком, 2010. 240 с.