Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: **mathmod.esrae.ru/54-221**
Ссылка для цитирования этой статьи:
Макеев Н.Н. Асимптотика малых движений нестационарных сложных систем // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2025. №4

УДК 531.36 + 517.928.2 DOI:10.24412/2541-9269-2025-4-2-11

АСИМПТОТИКА МАЛЫХ ДВИЖЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Макеев Н.Н.

ASYMPTOTICS OF SMALL MOTIONS OF NON-STATIONARY COMPLEX SYSTEMS

Makeev N.N.

Аннотация. Исследуются свойства малых движений сложных систем, обусловленных их отклонениями от стационарного состояния. Исследование проводится на основе модели нестационарного линейного осциллятора, для которого находятся асимптотические приближения при больших значениях времени и характерного параметра. Приводятся условия равномерной асимптотической устойчивости системы, а также существования её осциллирующего и неосциллирующего состояния. Применяются ограничения, обусловленные целями функционирования системы.

Ключевые слова: сложная система, асимптотика, асимптотическая устойчивость, адиабатический инвариант, осцилляция

Abstract. The properties of small movements of complex systems caused by their deviations from a stationary state are investigated. The study is based on a model of a non-stationary linear oscillator, for which asymptotic approximations are found for large values of time and characteristic parameter. Conditions for uniform asymptotic stability of the system, as well as the existence of its oscillating and non-oscillating states are given. Restriction are applied due to the purposes of the systems operation.

Keywords: complex system, asymptote, asymptotic stability, adiabatic invariant, oscillation

Введение

Под *сложной системой* понимается составной детерминированный многоуровневый объект, обладающий определёнными свойствами, содержащий множество взаимосвязанных и взаимодействующих между собой составляющих подсистем, для которого при объединении этих подсистем в единую общую систему последняя приобретает новые свойства, не сводящиеся к свойствам составляющих её подсистем (свойствам подсистемного уровня).

Сложная система как общее понятие подразделяется на ряд подсистем более низкого уровня, среди которых находятся, в частности, *сложные механические системы* различных видов [1]. Примерами этих подсистем являются системы *нескольких связанных тел* с заданными взаимосвязями и структурами (шарнирно связанные системы, системы со структурой дерева; твёрдые тела, содержащие жидкостные включения; электродинамические и автоматические устройства и другие). Помимо них существуют системы твёрдых тел с переменным составом массы и (или) с изменяемой конфигурацией [2], гиродинамические и гиростабилизирующие устройства, также объекты, относящиеся к сложным и гибридным механическим системам. Вследствие этого, помимо приведённого общего понятия сложной системы в широком смысле, имеет место и понятие сложной системы в узком смысле, применяемое к механическим системам сложной (постоянной и переменной) структуры. В частности, в упомянутом узком смысле свойства сложных систем рассматриваются в работе В.В. Румянцева [1]. В таком же понимании сложная детерминированная система в узком смысле, как механичекий объект, рассматривается и в данной статье.

В настоящей работе проведено исследование свойств малых движений кинетического вектора нестационарной сложной механической системы с представлением на фазовой плоскости асимптотического многообразия угловых скоростей движущейся системы, построенного в зависимости от больших значений времени, а также от больших значений характерного параметра.

1. Предварительные положения

В трёхмерном конфигурационном пространстве рассматривается состояние сложной механической системы, определяемое уравнениями [2]

$$\dot{G}_1 + m_1 G_2 G_3 + \lambda_2 G_3 - \lambda_3 G_2 = L_1 \qquad (1,2,3). \tag{1}$$

В уравнениях (1) обозначено: $\mathbf{G}(G_j(t))$ – кинетический вектор системы; $m_j\ (t)$ $(j = 1,2,3)$ – непрерывно дифференцируемые функции, характеризующие для $t \in [0,+\infty) \equiv T$ реономную структуру системы; $\boldsymbol{\lambda}(\lambda_j(t))$ – заданная вектор-функция, управляющая изменением структуры системы (λ_j – программно заданные управляющие параметры); $\mathbf{L}(L_j(t))$ – вектор-функция внешнего динамического воздействия на систему. Здесь (и всюду далее) символ типа (G_j) обозначает всю совокупность значений (G_1, G_2, G_3); символ $(1,2,3)$ показывает циклическую перестановку индексов $j = 1,2,3,$ согласно которой по заданному первому уравнению-представителю системы уравнений (1) можно составить остальные уравнения этой системы. Все функции, являющиеся коэффициентами и правыми частями уравнений системы (1), полагаются заданными непрерывно дифференцируемыми функциями времени t, определёнными для значений $t \in T$.

Уравнения (1) образуют детерминированную нестационарную многопараметрическую систему эволюционного типа с квадратичной нелинейностью. Предполагается, что для динамической системы (1) необходимо существует стационарное состояние $\mathbf{G}(t) = \mathbf{G}(0) = \mathbf{G}^0$, устойчивое по Лагранжу-Дирихле. Рассмотрим движение апекса вектора $\mathbf{G}$ в малой окрестности этого состояния, полагая, что

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{G}^0 + \mathbf{u}(u_j), \tag{2}$$

где $u_j(t)$ – малые возмущения одинакового порядка малости. Здесь и всюду далее верхний нулевой индекс относится к значениям величин при $t = 0$. Аддитивные функции $u_j(t)$ характеризуют малые движения апекса вектора $\mathbf{G}$ в заданной окрестности равновесного состояния динамической системы.

Линеаризуя уравнения системы (1) в данной окрестности аналогично [2] в силу равенства (2), в результате для первого уравнения этой системы получаем

$$\ddot{u}_1 + \Omega^2 u_1 - N_2 u_2 + N_3 u_3 = 0, \tag{3}$$

где обозначено

$$\Omega^2(t) = \lambda_2^2(t) + \lambda_3^2(t),$$

$$N_2(t) = \dot{\lambda}_3 + \lambda_1\lambda_2 + m_1 L_3, \qquad N_3(t) = \dot{\lambda}_2 - \lambda_1\lambda_3 - m_1 L_2. \tag{4}$$

Для дальнейшего положим

$$\lambda = \lambda_2 + i\lambda_3, \quad L = L_2 + i L_3 \quad (i = \sqrt{-1}), \quad \sigma(t) = \int_0^t \lambda_1(s)\, ds$$

и для управляющих параметров системы введём условие

$$N_3 + iN_2 \equiv \dot{\lambda} + i\lambda_1\lambda - m_1\bar{L} = 0, \tag{5}$$

где черта сверху обозначает комплексное сопряжение. Ограничение (5) является изначально заданным целевым управляющим условием функционирования данной сложной системы.

Из уравнения (5) непосредственно следует

$$\lambda(t) = \left(\lambda^0 + \int_0^t m_1\bar{L}e^{i\sigma}\, ds\right)\exp(-i\sigma) \tag{6}$$

и согласно равенству (6) имеем

$$|\lambda(t)|^2 = \omega^2 + 2J(t) \quad (\omega = \mathrm{const} > 0), \qquad J(t) = \int_0^t m_1 \operatorname{Re}(\lambda L)\, ds. \tag{7}$$

Таким образом, осциллятор (3) в силу соотношений (4)–(7) представляется результирующим уравнением

$$\ddot{u}_1 + \omega^2 q(t) u_1 = 0, \tag{8}$$

где обозначено $q(t) = 1 + 2\omega^{-2} J(t)$ (здесь q – *приведённая частота* осциллятора).

В случаях, при которых $m_1 = 0$ или $L_2(t) = L_3(t) \equiv 0$, имеем $J(t) \equiv 0$ и осциллятор (8) вырождается в гармонический. Данный случай из дальнейшего рассмотрения исключается. При $q > 0$ этот осциллятор является квазилинейным [3] (супергармоническим) с собственной частотой $\omega\sqrt{q(t)}$, на который наложено ограничение

$$K(t) \equiv \omega^2 + 2J(t) > b > 0 \qquad (b = \text{const}). \tag{9}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} &g_{12}(t) = m_2 G_1^0 - \lambda_1, \qquad g_{13}(t) = m_3 G_1^0 + \lambda_1, \qquad g_{23}(t) = m_3 G_2^0 - \lambda_2, \\ &g_{32}(t) = m_2 G_3^0 + \lambda_3, \qquad \Phi_2(t) = -g_{32}(t) u_1, \qquad \Phi_3(t) = -g_{23}(t) u_1. \end{aligned} \tag{10}$$

Если возмущение $u_1(t)$ осциллятора (8) для $t \in T$ известно, то интегральное подмногообразие малых движений системы уравнений (1) определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{u}_2 + g_{12} u_3 = \Phi_2(t), \\ \dot{u}_3 + g_{13} u_2 = \Phi_3(t). \end{aligned} \tag{11}$$

Уравнения (11) для значений $g_{12} g_{13} \neq 0$ приводятся к виду уравнений с разделёнными переменными

$$\ddot{u}_2 - \frac{\dot{g}_{12}}{g_{12}} \dot{u}_2 - g_{12} g_{13} u_2 = F_2 \qquad (2, 3), \tag{12}$$

где обозначено

$$F_2(t) = \dot{\Phi}_2 - \frac{\dot{g}_{12}}{g_{12}} \Phi_2 - g_{12} \Phi_3 \qquad (2, 3),$$

а функции $g_{ij}(t)$ определяются равенствами (10). При этом однородные уравнения (12) путём преобразования нормализации известным образом приводятся к виду, аналогичному виду уравнения осциллятора (8).

Достаточные условия ограниченности решений уравнений (12) в случае, при котором величина $g_{12} g_{13} < 0$ и монотонна, известны [3] и полагаются выполненными. В силу этого многообразие возмущений u_j для значений $t \in T$ представляет непрерывные малые детерминированные движения, происходящие в заданной окрестности конфигурационного пространства, являющиеся совокупностью колебательно-вращательных перемещений точек системы.

Для дальнейшего условимся, что под реономными кривыми, расположенными на фазовых плоскостях динамической системы, будут пониматься кривые, уравнения которых содержат коэффициенты, являющиеся заданными функциями времени, удовлетворяющими определённым условиям.

2. Постановка задачи

Целью работы является аналитическое описание структуры интегрального многообразия уравнений малых движений сложной системы, определение поля скростей и картины фазовых траекторий путём применения методов асимптотического интегрирования уравнений движения сложной системы.

Ставится следующая ограниченная задача: определить асимптотические приближения решений системы уравнений малых движений (8), (12) с заданными ограничениями по значениям времени и значениям характерного параметра системы.

Решением этой задачи достигается возможность средствами управления функционированием сложной системой корректировать её состояние посредством демпфирования вибрационного воздействия возникающих колебательно-вращательных малых движений кинетического вектора этой системы.

3. Асимптотика малых движений

Рассмотрим многообразие малых движений, для которых выполняется условие (9), и положим

$$w_1 = u_1, \qquad w_2 = \dot{w}_1. \tag{13}$$

Согласно равенствам (13) представим осциллятор (8) на фазовой w-плоскости переменных w_1, w_2 динамической системой

$$\dot{w}_1 = w_2, \qquad \dot{w}_2 = -\omega^2 q(t) w_1. \tag{14}$$

Предполагается, что осциллятор (14) не находится в резонансном или близком к нему режиме и частота $q(t)$ для значений $t \in T$ изменяется “медленно” [4]. Тогда существует непрерывная функция $I(t, q)$, обладающая свойством *адиабатического инварианта* [5] динамической системы (14). Согласно этому свойству при заданных числах $(\varepsilon, \varepsilon_0) > 0$ существует инвариант [4], при котором для некоторых условий и значений $t \in (0, \varepsilon^{-1}), \varepsilon < \varepsilon_0$ определяются следующие асимптотические представления.

Положим $\varepsilon = (\lambda^0 \omega^{-1})^2 << 1$, $\tau = \varepsilon t$ и примем число ε за малый параметр, а τ – за “медленное” время [3]. Тогда $q = q(\tau)$, $I = I[w_1, w_2, q(\tau)]$ и имеют место адиабатические инварианты

$$\begin{gathered} I_1(\tau) \equiv \omega A^2(\tau)\sqrt{q(\tau)} = D^2, \qquad q(t) = 1 + \varepsilon\varphi(t), \\ I_2(\tau) \equiv \omega\sqrt{q(\tau)}\, w_1^2 + [\omega\sqrt{q(\tau)}\,]^{-1} w_2^2 = D^2, \end{gathered} \tag{15}$$

где $A(\tau)$ – амплитуда колебаний осциллятора, $\varphi(t)$ – заданная непрерывная функция, $D = \text{const} > 0$.

ISSN 2541-9269

Из первого равенства (15) следует

$$A(\tau) = D\omega^{-1/2}[q(\tau)]^{-1/4} \tag{16}$$

и тогда согласно [6], а также равенства (16), в результате имеем

$$w_1 = A(\tau)\cos\lambda_q t, \qquad w_2 = -A(\tau)\lambda_q \sin\lambda_q t, \tag{17}$$

где обозначено $\lambda_q(t) = \omega\sqrt{q(t)}$. При этом фазовая точка системы расположена в w-плоскости на реономном эллипсе с уравнением

$$\frac{w_1^2}{A^2} + \frac{w_2^2}{(A\lambda_q)^2} = 1,$$

где квазикоординаты w_1, w_2 определяются асимптотическими равенствами (17), представленными здесь главными членами асимптотических разложений.

Таким образом, динамическая система (14) соответствует объекту, осциллирующему с адиабатически изменяющейся во времени амплитудой [2]. Здесь и всюду далее под реономной геометрической фигурой понимается плоская кривая, расположенная в w-плоскости, уравнение которой содержит параметры, являющиеся непрерывными функциями времени.

Обозначим $\Phi(t) = (\omega t)^2 q(t)$ и введём условия для параметра p:

$$\begin{gathered} p = \underline{\lim}\,\Phi(t),\ t \to +\infty, \quad \frac{1}{4} < p < +\infty, \\ p = \underline{\lim}\left(\left[\Phi(t) - \frac{1}{4}\right]\ln^2(at)\right),\ t \to +\infty, \quad p = \frac{1}{4}, \end{gathered} \tag{18}$$

где a – постоянная, размерность которой обратна размерности времени t. Тогда, согласно теореме Ф. Хартмана [7], движение фазовой точки динамической системы (14) является осциллирующим при $t \to +\infty$.

Рассмотрим состояния системы (14), для которой выполняется одно из условий (18). Пусть функция частоты $q(t)$ монотонна и непрерывна для $t \in T$, причём $u(t), v(t)$ – фундаментальная система осциллятора (8). Обозначим

$$\begin{gathered} P_1(t) = u^2 + \omega^{-2}q^{-1}\dot{u}^2, \qquad P_2(t) = \omega^2 q v^2 + \dot{v}^2, \\ Q_j = \lim P_j(t), \quad t \to T \quad (j = 1, 2). \end{gathered}$$

Если при условиях (6), (18) выполняется одно из равенств

$$\lim q(t) = 0, \quad t \to T \qquad (+\infty), \tag{19}$$

то, согласно [7] имеем $Q_1 = +\infty$ (или 0); $Q_2 = 0$ (или $+\infty$). Следовательно, в первом случае поле траекторий динамической системы на фазовой плоскости $(u, \dot{u})$, представляющее множество ограниченных замкнутых траекторий, распадается на неграниченные кривые, а на плоскости $(v, \dot{v})$ стягивается к особой точке – центру в начале координат. Во втором случае в данных плоскостях картина фазовых траекорий по структуре прямо противоположна.

Пусть функция $q > 0$, а $\dot{q}$ монотонна, непрерывна и ограничена. Тогда, согласно признаку Ф. Хартмана [7], для осциллятора (14) имеет место единственное асимптотическое при $t \to +\infty$ аналитическое представление

$$q^{1/4} w_1 = D\omega^{-1/2} \cos \sigma, \qquad q^{-1/2} (q^{1/4} w_1)^{\bullet} = -D\omega^{1/2} \sin \sigma, \tag{20}$$

где обозначено

$$\sigma(t) = \rho(t) + \alpha + o(1), \qquad \rho(t) = \omega \int_0^t \sqrt{q(s)}\, ds, \tag{21}$$

причём $D \neq 0$, α – действительные постоянные.

Соотношения (17), полученные на основе адиабатических инвариантов (15), можно рассматривать как усреднение асимптотических равенств (20). Фазовые траектории многообразия (20) на плоскости $(v_1 = q^{1/4} w_1,\ v_2 = \dot{v}_1)$ представляются реономными эллипсами с уравнениями

$$v_1^2 + \omega^{-2} q^{-1} v_2^2 = \omega^{-1} D^2.$$

Таким образом, движение осциллятора (14) при $t \to +\infty$ является квазигармоническим. В случае, при котором выполняется условие $\lim q(t) = 1\, (t \to +\infty)$, это движение асимптотически при $t \to +\infty$ стремится к движению предельного гармонического осциллятора с частотой ω.

Если асимптотика $w_1(t)$ известна, то подмногообразие (u_2, u_3) при $t \to +\infty$ определяется асимптотическим интегрированием уравнения (8). Сняв ограничения по монотонности функций $q, \dot{q}$ и условия (19), положив

$$\int_0^{+\infty} |J(t)|\, dt < \infty,$$

и применяя метод, изложенный в работе [7], можно показать, что для осциллятора (14) при $t \to +\infty$ имеет место представление

$$(w_1, w_2) = D(\cos \sigma,\ -\sin \sigma), \qquad \sigma(t) = \omega t + o(1).$$

Интегральное многообразие осциллятора (14) является ограниченным, если выполняется условие (9) и, кроме того,

$$N(t) \equiv m_1 (\lambda_2 L_2 - \lambda_3 L_3) \geq 0,$$

где $L_j(t)$ – функции внешнего динамического воздействия, содержащиеся в системе уравнений (1). При этом частота $q(t)$ должна являться неубывающей.

Пусть n_1, n_2 – заданные действительные числа. Тогда, если при данных условиях для $t \in T$ выполняются ограничения

$$q(t) > n_1^2 > 0, \qquad N(t) > n_2^2 > 0,$$

то согласно [8] начало координат на w-плоскости для осциллятора (14) асимптотически устойчиво равномерно по $t=0$ и w_1^0, w_2^0.

Для дальнейшего примем условие (9) и ограничения

$$\int_0^{+\infty} \left| 2q\omega^2 \dot{N} + 5N^2 \right| q^{-5/2} dt < \infty, \qquad \lim [K^{-3/2}(t) N(t)] = 0 \quad (t \to +\infty). \tag{22}$$

Тогда при условиях (22) для осциллятора (14) согласно [9] имеют место асимптотические при $t \to +\infty$ выражения, задаваемые функциями-представителями

$$\begin{aligned} w_1(t) &= Q_1^{-1}(t)[\cos\rho(t),\ \sin\rho(t)][1+o(1)], \\ w_2(t) &= Q_1(t)[-\sin\rho(t), \cos\rho(t)][1+o(1)], \end{aligned} \tag{23}$$

где обозначено

$$Q_1(t) = \sqrt{\omega}\, q^{1/4}(t),$$

а функция $\rho(t)$ определяется равенством (21).

В силу выражений (23) асимптотическими при $t \to +\infty$ фазовыми траекториями данного осциллятора на w-плоскости являются невырожденные реономные эллипсы с уравнениями

$$Q_1^2(t) w_1^2 + Q_1^{-2}(t) w_2^2 = D^2, \tag{24}$$

охватывающие особую точку – центр в начале координат.

Соотношения (23), (24) определяют осциллирующее асимптотическое состояние динамической системы (14); при этом выражение (24) является инвариантом I_2, представленным равенством (15).

Переходя к неосциллирующему состоянию данной системы, примем ограничения (22), в которых выполняется условие $K(t) < -b$ $(b > 0)$. Тогда имеем $q(t) < 0$ при $t \in T$ и для осциллятора (14) согласно [9] имеет место асимптотическое при $t \to +\infty$ представление

$$\begin{aligned} w_1(t) &= Q_2^{-1}(t)\,[\exp\chi(t),\ \exp(-\chi(t))][1+o(1)], \\ w_2(t) &= Q_2(t)[\exp\chi(t), -\exp(-\chi(t))][1+o(1)], \end{aligned} \tag{25}$$

где обозначено

$$Q_2(t) = \omega^{1/2}[-q(t)]^{1/4}, \qquad \chi(t) = \omega \int_0^t \sqrt{-q(s)}\, ds.$$

Согласно равенствам (25) асимптотическими при $t \to +\infty$ фазовыми траекториями динамической системы (14) на w-плоскости являются невырожденные реономные гиперболы с уравнениями

$$Q_2^2(t) w_1^2 - Q_2^{-2}(t) w_2^2 = h \qquad (h = \text{const} \neq 0) \tag{26}$$

с асимптотами $w_2 = \pm Q_2^2(t) w_1$, пересекающимися в особой точке – седле, находящейся в начале координат данной плоскости.

Рассмотрим асимптотические представления для динамической системы с большим параметром, в качестве которого примем величину ω. Пусть выполняется условие (9), причём в системе уравнений (1) коэффициенты и правые части представлены функциями, непрерывно дифференцируемыми для $t \in T$. Тогда, согласно [10], для осциллятора (14) имеет место асимптотическое при $\omega \to +\infty$ представление

$$\begin{aligned} w_1(t, \omega) &= [q(t)]^{-1/4}[\cos \rho(t), \sin \rho(t)][1 + \mathrm{O}(\omega^{-1})], \\ w_2(t, \omega) &= \omega[q(t)]^{1/4}[-\sin \rho(t), \cos \rho(t)][1 + \mathrm{O}(\omega^{-1})], \end{aligned} \tag{27}$$

где $\mathrm{O}(\omega^{-1})$ равномерно по $t \in T$, $\omega \geq \omega_0 = \text{const} > 0$.

Согласно равенствам (27) асимптотическими при $\omega \to +\infty$ фазовыми траекториями данной системы на *w*-плоскости являются реономные эллипсы с уравнениями (24), в которых параметр D^2 заменён на ωD^2.

Для неосциллирующего состояния системы (14), при котором $K(t) < 0$, согласно [9] имеем асимптотическое при $\omega \to +\infty$ представление

$$\begin{aligned} w_1(t, \omega) &= [-q(t)]^{-1/4}[\exp \chi(t), \exp(-\chi(t))][1 + \mathrm{O}(\omega^{-1})], \\ w_2(t, \omega) &= \omega[-q(t)]^{1/4}[\exp \chi(t), -\exp(-\chi(t))][1 + \mathrm{O}(\omega^{-1})], \end{aligned} \tag{28}$$

где $\mathrm{O}(\omega^{-1})$ равномерно по $t \in T$, $\omega \geq \omega_0 > 0$.

Равенства (28) определяют фазовые траектории данной системы на *w*-плоскости при $\omega \to +\infty$; они являются реономными гиперболами с уравнениями (26), в которых параметр *h* заменён на ωh.

Таким образом, для осциллятора (14) при заданных условиях характерно существование на фазовой *w*-плоскости как ограниченных замкнутых фазовых траекторий эллиптического типа, так и траекторий с бесконечными ветвями гиперболического типа.

Заключение

В настоящей работе представлена приближённая аналитическая оценка малых движений кинетического вектора сложной системы, полученная на основе асимптотических методов нахождения решений линейных нестационарных динамических систем. Основные результаты этой оценки в основном сводятся к следующему.

Малые движения изображающей фазовой точки в окрестности устойчивого по Лагранжу-Дирихле квазистационарного состояния динамической системы (1), существующего при ограничении (6), наложенном на управляющие параметры системы, в линейном приближении определяются характером движения объединённой детерминированной системы уравнений (8), (12).

Линейная динамическая система (8), (12), рассматриваемая как осциллятор с адиабатически изменяющейся амплитудой (16) на фазовой плоскости, обладает асимптотическими для больших значений натурального времени t и больших значений характерного параметра ω осциллирующими представлениями вида (20), (23), (27). Неосциллирующим состояниям данной системы при определённых ограничениях на фазовой плоскости соответствуют асимптотические при $(t, \omega) \to +\infty$ представления вида (25), (28).

В настоящей работе в качестве упомянутых оценок приведены главные члены приведённых асимптотических представлений, пропорциональные величинам $\sqrt{q}$ (при $q > 0$) и $\sqrt{-q}$ (при $q < 0$) для осциллирующего и неосциллирующего состояний данной системы, соответственно. При этом $\sqrt{q}$ для $q > 0$ – безразмерная собственная частота данного невырожденного осциллятора.

Литература

1. Румянцев В.В. Некоторые задачи динамики сложных систем // Проблемы прикладной математики и механики. М.: Наука, 1971. 282 с.

2. Макеев Н.Н. Интегралы сложных систем на управляющих связях / Саратовский политехнический ин-т. Саратов, 1989. 122 с. Деп. в ВИНИТИ 14.03.89, № 1656-В 89.

3. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 380 с.

4. Джакалья Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.

5. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.

6. Митропольский Ю.А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука, 1964. 431 с.

7. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.

8. Игнатьев А.О. Об устойчивости положения равновесия колебательных систем с переменными коэффициентами // Прикладная математика и механика. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 167–168.

9. Федорюк М.В. Асимптотика решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка / *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464 с.

10. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М.: Мир, 1965. 237 с.