Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: **mathmod.esrae.ru/54-223**
Ссылка для цитирования этой статьи:
Макеев Н.Н. Задача Эйлера динамики твёрдого тела в полуевклидовом пространстве // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2025. №4

УДК 531.9+514.853 DOI:10.24412/2541-9269-2025-4-23-42

ЗАДАЧА ЭЙЛЕРА ДИНАМИКИ ТВЁРДОГО ТЕЛА В ПОЛУЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Макеев Н.Н.

EULER`S PROBLEM OF RIGID BODY DYNAMICS IN SEMI-EUCLIDEAN SPACE

Makeev N.N.

Аннотация. Исследуются свойства инерционного движения абсолютно твёрдого тела вокруг неподвижного полюса в трёхмерном конфигурационном полуевклидовом пространстве. Найдено поле угловых скоростей и определены зависимости параметров ориентации тела от времени. Приведена аналоговая динамическая интерпретация данного движения с применением проекционно-стереографической, осцилляторной и волновой детерминированных моделей.

Ключевые слова: абсолютно твёрдое тело, инерционное движение, поле скоростей, полуевклидово пространство, интерпретация движения

Abstract. The properties of the inertial motion of an absolutely rigid body around a fixed pole in a three-dimensional configuration semi-Euclidean space are investigated. The field of angular velocities was found and the dependences of the body orientation parameters on time were determined. An analog dynamic interpretation of this movement is given using projection-stereographic, oscillatory and wave deterministic models.

Keywords: rigid body, inertial motion, velocity field, semi-Euclidean space, interpretation of motion

Введение

Под задачей Эйлера динамики твёрдого тела в неевклидовом пространстве постоянной кривизны понимается модельная задача аналитического описания его движения вокруг неподвижной точки без воздействия на него внешних сил (движения по инерции). Аналогичная задача, описывающая движение тела в трёхмерном евклидовом пространстве в классической рациональной механике именуется *случаем Эйлера* [1]. Этот случай представляется задачей, являющейся одной из основных детерминированных фундаментальных динамических моделей классической механики и базируется на исторически сложившейся теории динамики твёрдого тела. В данной работе эта задача исследуется в применении к движению тела в полуевклидовом пространстве и рассматривается как расширение содержания традиционно сложившейся классической модели динамики твёрдого тела с применением современной методики исследования и физической интерпретации.

Необходимость построения динамической модели твёрдого тела, движущегося относительно неподвижного полюса в полуевклидовом пространстве, была инициирована появлением задачи, содержащейся в работе Н.Е. Жуковского [2] о движении псевдосферической фигуры по псевдосфере, интерпретируемой как плоскость Лобачевского. Эта задача в силу существующего гомеоморфизма применяемых моделей эквивалентна задаче о движении твёрдого тела относительно неподвижного полюса в полуевклидовом пространстве. Все точки такого тела находятся на сфере действительного радиуса, величина которого однозначно связана с величиной кривизны плоскости Лобачевского.

Согласно классификации, принятой в проективной геометрии, рассматриваемое здесь полуевклидово пространство является действительным *аффинным трёхмерным пространством* с индексом 2 и дефектом 0. Такое пространство определяется и как полугиперболическое пространство с несобственной абсолютной плоскостью.

В настоящей работе приводится аналитическое описание движения твёрдого тела в случае, аналогичном соответствующему классическому случаю Эйлера, построенному для инерционного движения тела в трёхмерном евклидовом пространстве, и являющемуся его модельным аналогом.

1. Предварительные положения и уравнения движения

Рассматривается полуевклидово пространство с метрическим тензором $g_{ij} = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)$, отнесённом к пространству конфигураций тела, с компонентами $g_{11} = g_{22} = -1$, $g_{33} = 1$ при $i = j$; $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Здесь $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$) − орты заданного координатного ортобазиса в данном пространстве. Согласно проективной модели Э. Бельтрами - Ф. Клейна плоскость Лобачевского представляется в виде внутренних точек абсолюта гиперболической плоскости

$$g_{ij}\, x^i x^j \equiv -(x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0,$$

где x^i, x^j − контравариантные координаты.

Под твёрдым телом в данном пространстве понимается материальное тело, расположенное внутри изотропного конуса этого пространства, а под неподвижным полюсом O − вершина данного конуса. Тогда для радиусов-векторов точек этого тела имеем $\mathbf{r}_s^2 = g_{ij} r_s^i r_s^j > 0$ и все данные векторы по определению являются собственными.

Введём правые координатные ортобазисы с общим началом в неподвижном полюсе O: базис Γ_0, неподвижный относительно инерциального конфигурационного пространства, и базис $\Gamma(Ox_1x_2x_3)$, неизменно связанный с данным телом, оси Ox_j которого совмещены с его главными в полюсе O осями тензора инерции тела. Обозначим: A_j − диагональные элементы матрицы тензора инерции, являющиеся главными осевыми моментами инерции и собственными значениями оператора инерции тела; $\boldsymbol{\omega}(\omega_j)$ − его абсолютная угловая скорость; $\mathbf{G}(G_j)$− кинетический момент тела, заданный координатами в осях базиса Γ; $\boldsymbol{\Phi}(\lambda, \vartheta, \varphi)$ – вектор аналогов углов Эйлера, принятых в евклидовом пространстве, определяющих взаимное положение базисов Γ_0, Γ; $\mathbf{l}(l_j) = Mg\mathbf{r}_C$ – приведённый барицентрический вектор, M – величина массы тела, g –ускорение силы тяжести со стандартным значением, $\mathbf{r}_C(r_j)$ – радиус-вектор центра масс C (центра инерции) тела, проведённый из полюса O; $\mathbf{s}(s_j)$ – орт вертикали в однородном поле силы тяжести (*вектор Пуассона*). Здесь и всюду в дальнейшем индекс j принимает значения $j = 1, 2, 3$. В частности, символ (ω_j) далее обозначает совокупность всех значений $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – орты базиса Г, неизменно связанные с телом. Тогда имеем:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 - \omega_3\mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{G} = G_1\mathbf{e}_1 + G_2\mathbf{e}_2 - G_3\mathbf{e}_3,$$

где [3]

$$G_j = A_j\omega_j = Gs_j \qquad (j = 1, 2, 3), \tag{1}$$

$G = |\mathbf{G}| \neq 0$, s_j – координаты орта, для которых имеет место тождество

$$\|\mathbf{s}(s_j)\|^2 \equiv -s_1^2 - s_2^2 + s_3^2 = \ell^2. \tag{2}$$

В равенстве (2) постоянная $\ell^2 = (1, -1, 0)$ (маркировочный параметр) принимает данные значения в случаях, при которых вектор **G** (и его орт **s)** является *собственным, идеальным* или *изотропным*, соответственно. В евклидовом пространстве координат s_j, сопоставленном трёхмерному полуевклидову пространству, тождество (2) определяет действительные двуполостный, однополостный гиперболоиды и конус при собственном, идеальном и изотропном направляющем орте **s**, соответственно. Эти геометрические объекты являются невырожденными геометрическими фигурами с одинаковыми длинами полуосей.

Обозначим величины

$$w = s_1 + i\,s_2\,, \qquad u = \frac{1}{2}(\omega_2 + i\,\omega_1) \qquad (i = \sqrt{-1})$$

и, в соответствии с тождеством (2), введём переменные

$$X = \frac{w}{s_3 - \ell} = \frac{s_3 + \ell}{\overline{w}}\,, \qquad \overline{X} = \frac{\overline{w}}{s_3 - \ell} = \frac{s_3 + \ell}{w}\,,$$

где черта сверху обозначает сопряжённую переменную. Здесь величина X – переменная Дарбу комплексной плоскости (дополненной бесконечно удалённой точкой), являющаяся координатой точки экваториальной плоскости сферы Римана, стереографическая проекция которой на эту сферу имеет координаты s_j. Сфера Римана сопоставляется с данными поверхностями, имеет общий с ними центр и в данной задаче является эквивалентным геометрическим объектом, отнесённым к трёхмерному евклидову пространству.

Движение тела, происходящее в стационарном однородном поле силы тяжести полуевклидова пространства относительно полюса O, определяется динамической системой, представленной в проекциях на координатные оси подвижного ортобазиса Γ [4]

$$\begin{aligned} A_1\,\dot{\omega}_1 + (A_3 + A_2)\,\omega_2\,\omega_3 &= l_3\,s_2 - l_2\,s_3\,,\\ A_2\,\dot{\omega}_2 - (A_1 + A_3)\,\omega_3\,\omega_1 &= l_1\,s_3 - l_3\,s_1\,,\\ A_3\,\dot{\omega}_3 + (A_1 - A_2)\,\omega_1\,\omega_2 &= l_2\,s_1 - l_1\,s_2\,. \end{aligned} \tag{3}$$

К динамическим уравнениям (3) следует присоединить аналоги кинематических уравнений Пуассона для полуевклидова пространства [4]

$$\dot{s}_1 = \omega_2 s_3 - \omega_3 s_2\,, \qquad \dot{s}_2 = \omega_3 s_1 - \omega_1 s_3\,, \qquad \dot{s}_3 = \omega_2 s_1 - \omega_1 s_2\,. \tag{4}$$

Из системы уравнений (4) в силу соотношений для w, X следует одна из форм комплексного *уравнения Дарбу-Риккати* для характерной функции $X\,(t)$

$$\dot{X} = u\,X^{\,2} + i\,\omega_3\,X + \overline{u}\,. \tag{5}$$

Уравнение (5) составляет основу алгоритма определения ориентации тела в пространстве по известным выражениям для компонент $\omega_j(t)$; при этом к данному уравнению следует присоединить уравнения системы Пуассона (4). Этот алгоритм относится к широкому классу задач динамики твёрдого тела, не связанному непосредственно с задачей Эйлера, для которого орт **s** – собственный.

На уравнении (5) и приведённом геометрическом посроении основана проекционно-стереографическая интерпретация движения твёрдого тела в динамической задаче Эйлера, согласно которой инерционному движению тела соответствует движение изображающей точки в открытой, регулярной и односвязной области экваториальной плоскости сферы Римана, сопоставленной двуполостному гиперболоиду (8) пространства переменных ω_j.

В уравнениях (3) главные осевые моменты инерции: A_1, A_2 − моменты от-

ISSN 2541-9269

носительно не изотропных (идеальных) главных осей Ox_1, Ox_2, а момент A_3 − относительно собственной главной оси инерции Ox_3.

Согласно свойству гомеоморфности между движениями тела в полуевклидовом пространстве и на плоскости Лобачевского моменты инерции A_1, A_2 в этой плоскости являются главными моментами инерции сдвига, а момент A_3 − главным моментом инерции вращения тела относительно его центра инерции.

Уравнения (3) представляют 6-параметрическую автономную динамическую систему эволюционного типа с квадратичной нелинейностью, содержащую инерционные и позиционные параметры (параметры положения тела).

Целью настоящей работы является определение динамических и кинематических свойств состояния тела, движущегося согласно системе уравнений (3), (4), при заданных начальных условиях. Эти свойства должны отражаться в форме аналитического описания движения тела для поля угловых скоростей и полной совокупности характеристик ориентации тела относительно инерциального пространства (ортобазиса Γ_0) в любой момент времени.

Ставится общая задача. 1. Найти зависимости вида $\omega_j(t) \in \mathrm{C}^2$, являющиеся решениями системы уравнений (3), (4), определённые для $t \in [0, +\infty) \equiv T$ в открытой регулярной области пространства квазикоординат $\{\omega_j\},$ при заданных начальных условиях $\omega_j(0) = \omega_j^0$ (j =1, 2, 3).

2. По найденным зависимостям вида $\omega_j(t)$ установить ориентацию твёрдого тела, определяемую для $t \in T$ вектором $\mathbf{\Phi}(\lambda, \vartheta, \varphi)$ параметров ориентации этого тела. Данные параметры ориентации являются аналогами углов Эйлера, относящихся к трёхмерному евклидову пространству.

2. Задача Эйлера

Система уравнений движения тела (3) при условии

$$\mathbf{l}\,(l_j) = 0 \tag{6}$$

имеет вид

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 + A_2)\,\omega_2\omega_3 &= 0, \\ A_2\dot{\omega}_2 - (A_1 + A_3)\,\omega_3\,\omega_1 &= 0, \\ A_3\dot{\omega}_3 + (A_1 - A_2)\,\omega_1\,\omega_2 &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

и соответствует движению тела в трёхмерном полуевклидовом пространстве по инерции. Эта система является аналогом динамических уравнений Эйлера для трёхмерного евклидова пространства и обладает первыми алгебраическими интегралами [3]

$$\begin{aligned} A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 &= h^2, \\ (A_1\omega_1)^2 + (A_2\omega_2)^2 - (A_3\omega_3)^2 &= H^2, \end{aligned} \tag{8}$$

2025, №4
ISSN 2541-9269

где h, H – постоянные интегрирования. Согласно соотношениям (1), (8) имеем $|H| = G$. Равенства (8) определяют интеграл энергии и интеграл модуля кинетического момента тела, соответственно, и составляют аналоги соответствующих первых алгебраических интегралов уравнений движения тела в трёхмерном евклидовом пространстве. Существование этих интегралов, являющихся инвариантами движения тела, обусловлено тем, что при условии (6) ввиду отсутствия внешних сил выполняются законы сохранения механической энергии тела и его кинетического момента.

Согласно теории последнего множителя Якоби и в силу инволютивности системы интегралов (8) система уравнений (7) интегрируема в квадратурах. В связи с этим ставится следующая частная задача.

Задача Эйлера: определить поле скоростей твёрдого тела, движущегося согласно системе уравнений (7), а также его ориентацию относительно инерциального пространства (ортобазиса Γ_0) при начальных для $t = 0$ условиях:

$$\omega_j(0) = \omega_j^0, \qquad \mathbf{\Phi}(0) \equiv [\lambda(0),\ \vartheta(0),\ \varphi(0)] = [\lambda_0, \vartheta_0, \varphi_0]. \tag{9}$$

Для решения поставленной задачи выделим из равенств (8) зависимости

$$\omega_1^2 = \frac{D_1 - A_2(A_2 + A_3)\omega_2^2}{A_1(A_1 + A_3)}, \qquad \omega_3^2 = \frac{D_3 - A_2(A_1 - A_2)\omega_2^2}{A_3(A_1 + A_3)}, \tag{10}$$

где постоянные обозначены

$$D_1 = A_3 h^2 + H^2, \qquad D_3 = A_1 h^2 - H^2,$$

и, принимая кинетическое условие $A_1 > A_2$, вместо величин D_1, D_3 введём параметры

$$n_1^2 = \frac{D_1}{A_2(A_2 + A_3)}, \qquad n_3^2 = \frac{D_3}{A_2(A_1 - A_2)} \qquad (n_1^2 + n_3^2 \neq 0).$$

Тогда $D_i > n_i^2 > 0$ $(i = 1, 3)$ и, согласно равенствам (10), получаем

$$\omega_1^2 = H_1(n_1^2 - \omega_2^2), \qquad \omega_3^2 = H_3(n_3^2 - \omega_2^2), \tag{11}$$

где обозначено

$$H_1 = \frac{A_2(A_2 + A_3)}{A_1(A_1 + A_3)}, \qquad H_3 = \frac{A_2(A_1 - A_2)}{A_3(A_1 + A_3)}.$$

При этом имеем $\omega_2^2 \le (n_1^2, n_3^2)$ и параметры n_1, n_3 связаны с начальными значениями (9) зависимостями

$$n_1^2 = (\omega_2^0)^2 + H_1^{-1}(\omega_1^0)^2, \qquad n_3^2 = (\omega_2^0)^2 + H_3^{-1}(\omega_3^0)^2.$$

В силу зависимостей (11) представим второе уравнение системы (7) в виде

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \pm\,\Omega\sqrt{(n_1^2 - \omega_2^2)(n_3^2 - \omega_2^2)}, \tag{12}$$

где обозначено

$$\Omega = \sqrt{\frac{(A_1 - A_2)(A_2 + A_3)}{A_1 A_3}} > 0.$$

Из уравнения (12) для $t \in T$ при начальных условиях (9) получаем

$$\pm \int_{\omega_2^0}^{\omega_2} \frac{dz}{\sqrt{(n_1^2 - z^2)(n_3^2 - z^2)}} = \Omega t + \alpha, \qquad (13)$$

где z, α – переменная и постоянная интегрирования, соответственно, причём значение параметра α определяется начальным значением данного интеграла, заданного на отрезке $[0, \omega_2^0]$.Знак в левой части равенства (13) выбирается из условия $t > 0$ (в дальнейшем символ $\pm$ всюду опускается).

Интеграл, находящийся в равенстве (13), приводится к неполному эллиптическому интегралу первого рода. Обращая зависимость (13), в результате получаем следующие случаи.

1. Если $n_3^2 > n_1^2$, то, вводя в силу ранее указанного условия $\omega_2^2 \le n_1^2$ соотношение $\omega_2(t) = n_1 \sin\chi(t)$, из равенства (13) получим

$$K(\chi) = P_3 t + \alpha_1, \qquad K(\chi) = \int_0^{\chi} \frac{dz}{\sqrt{1 - m_1^2 \sin^2 z}}, \qquad (14)$$

где обозначено $P_3 = n_3\Omega$, $m_1 = \frac{n_1}{n_3}$; α_1 – новая постоянная интегрирования. Интеграл (14) является неполным эллиптическим интегралом первого рода с модулем m_1 в нормальной форме Лежандра [5, с. 95]. Обращая этот интеграл, имеем

$$\omega_2(t) = n_1 \,\mathrm{sn}\,(P_3 t + \alpha_1), \qquad (15)$$

где sn – символ двоякопериодической эллиптической функции Якоби (*эллиптического синуса* – термин источника [6, с. 216]); значение постоянной α_1 определяется равенством $\mathrm{sn}\,\alpha_1 = n_1^{-1}\omega_2^0$.

Согласно зависимости (15) из соотношений (11) находим

$$\omega_1(t) = n_1\sqrt{H_1}\,\mathrm{cn}\,(P_3 t + \alpha_1), \qquad \omega_3(t) = n_3\sqrt{H_3}\,\mathrm{dn}\,(P_3 t + \alpha_1), \qquad (16)$$

где cn, dn – символы эллиптических функций – *эллиптического косинуса* и *эллиптической функции дельта*, которая здесь представляется равенством

$$\mathrm{dn}\,(P_3 t + \alpha_1) = \sqrt{1 - m_1^2 \sin^2\chi(t)},$$

где dn – символ Гудерманна [7, с. 378] данной эллиптической функции.

2. Если $n_3^2 < n_1^2$, то, полагая $\omega_2(t) = n_3 \sin\chi(t)$, $P_1 = n_1\Omega$, $m_2 = \frac{n_3}{n_1}$, согласно условию $\omega_2^2 < n_3^2$ аналогичным образом получаем

$$\omega_1(t) = n_1\sqrt{H_1}\,\mathrm{dn}\,(P_1 t + \alpha_2), \quad \omega_2(t) = n_3\,\mathrm{sn}\,(P_1 t + \alpha_2), \quad \omega_3(t) = n_3\sqrt{H_3}\,\mathrm{cn}\,(P_1 t + \alpha_2), \qquad (17)$$

где α_2 – постоянная интегрирования, значение которой определяется из любого равенства системы (17) при $t = 0$.

Величины ω_3, ω_1, содержащиеся в равенствах (16), (17), представляются в другой форме выражениями, соответственно

$$\omega_3(t) = n_3\sqrt{H_3[1 - m_1^2\,\mathrm{sn}^2(P_3 t + \alpha_1)]}\ , \qquad \omega_1(t) = n_1\sqrt{H_1[1 - m_2^2\,\mathrm{sn}^2(P_1 t + \alpha_2)]}.$$

Эти зависимости не содержат эллиптическую дельта-функцию dn.

Соотношения (15)–(17) определяют поле угловых скоростей твёрдого тела, движущегося согласно уравнениям (7). Они соответствуют периодическим движениям тела, определяемым значениями параметров n_1, n_3. При $n_3 < n_1$ их период $T_1 = 4(n_1\Omega)^{-1}K$, а при $n_3 > n_1$ – период $T_3 = 4(n_3\Omega)^{-1}K$, где $K = K(\pi/2)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, определяемый равенством (14). Эти соотношения являются параметрическими (с параметром t) уравнениями подвижного годографа вектора скорости тела в пространстве квазикоординат ω_j. При $n_3^2 > n_1^2$ на плоскости квазикоординат (ω_1, ω_2) траекториями изображающей точки динамической системы тела, согласно уравнениям (15), (16), является множество эллипсов с уравнениями

$$\frac{\omega_1^2}{H_1 n_1^2} + \frac{\omega_2^2}{n_1^2} = 1,$$

а при $n_3^2 < n_1^2$, в соответствии с равенствами (17), на той же плоскости этими траекториями являются эллипсы с уравнениями

$$\frac{\omega_2^2}{n_3^2} + \frac{\omega_3^2}{H_3 n_3^2} = 1.$$

Параметры этих эллипсов определяются величинами инерционно-кинетических характеристик тела и заданными начальными значениями (9). Данные плоские траектории охватывают области, содержащие внутри них особую точку динамической системы (7) – *центр.*

Траекторией состояния тела при данном движении в пространстве переменных ω_j является кривая взаимного пересечения невырожденных действительных поверхностей второго порядка – эллипсоида и соответствующего гиперболоида, определяемых в общем случае уравнениями системы (8).

Соотношения (15)–(17) характеризуют поле скоростей тела при общих (регулярных) режимах его состояния. Помимо регулярных режимов имеют место следующие *граничные* и *особый* режимы движения тела.

1. При $n_1 = 0,\ n_3 \neq 0$ согласно равенствам (15), (16) имеем $m_1 = 0,\ \omega_1 = \omega_2 \equiv 0$, $\omega_3 \equiv \omega_3^0$, а из соотношений (8) следует $\omega_3^0 = 0$. В этом случае имеем $\boldsymbol{\omega}(t) \equiv 0$ и тело находится в перманентном покое.

2. При $n_3 = 0,\ n_1 \neq 0$ в силу равенств (17) получаем $m_2 = 0, \omega_2 = \omega_3 \equiv 0,\ \omega_1 \equiv \omega_1^0$ и из соотношений (8) следует

$$\omega_1^0 = \pm \frac{1}{\sqrt{A_1}} h = \pm \frac{H}{A_1}. \tag{18}$$

В этом случае тело совершает перманентное вращение вокруг оси Ox_1 со скоростью, величина которой определяется равенством (18).

3. В особом случае, при котором $n_1 = n_3 = n \neq 0$, имеет место ограничение

$$A_1(A_1 - A_2)(\omega_1^0)^2 - A_3(A_2 + A_3)(\omega_3^0)^2 = 0, \tag{19}$$

в силу которого только одно из значений ω_1^0, ω_3^0 является независимым. В этом случае эллиптический интеграл, содержащийся в соотношении (13), вырождается и решение $\omega_2(t)$ представляется в форме

$$\omega_2(t) = \frac{D_p - \Lambda(t)}{D_p + \Lambda(t)} n \qquad (t \in T), \tag{20}$$

где обозначено

$$\Lambda(t) = \exp\,[-2n\sigma(t)], \qquad D_p = \left|\frac{n + \omega_2^0}{n - \omega_2^0}\right|, \qquad \sigma(t) = \Omega t + \alpha > 0.$$

Согласно зависимости (20) в этом случае тело совершает апериодическое и асимптотически при $t \to +\infty$ равномерное движение, предельно достигающее значения $\omega_2(+\infty) = n \neq 0$, существующее при условии (19). Соотношения для компонент $\omega_1(t), \omega_3(t)$ элементарно выражаются через зависимость (20) в силу первых интегралов (8).

3. Особый случай задачи Эйлера

Введём систему уравнений, являющуюся расширением системы динамических уравнений (7)

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 + (A_2 + A_3)\omega_2\omega_3 &= L_1, \\ A_2\dot{\omega}_2 - (A_3 + A_1)\omega_3\omega_1 &= L_2, \\ A_3\dot{\omega}_3 + (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 &= L_3, \end{aligned} \tag{21}$$

где для компонент вектор-момента внешних сил $\mathbf{L}$ выполняются условия стационарности $L_j \equiv \text{const}$ $(j = 1, 2, 3)$. Вне введённого ранее ограничения $A_1 > A_2$ в данном особом случае потребуем, чтобы выполнялись условия

$$A_1 = A_2 = A, \qquad L_3 \equiv 0. \tag{22}$$

Согласно первому из этих условий тело обладает структурно-кинетической симметрией относительно главной оси инерции Ox_3, в направлении которой динамическое воздействие на тело отсутствует, и вектор-момент $\mathbf{L}(L_1, L_2, 0)$ располагается в координатной плоскости Ox_1x_2.

Под особым случаем задачи Эйлера понимается вырожденный случай, при котором нелинейная система уравнений (7) в силу первого условия (22) вырождается в линейную по переменным ω_j динамическую систему.

Ввиду условий (22) их третьего уравнения системы (21) следует $\omega_3(t) \equiv \omega_3^0$. Дифференцируя по t остальные уравнения этой системы, получаем

$$\ddot{\omega}_j + \Omega_p^2 \omega_j = N_j \qquad (j = 1, 2), \tag{23}$$

где обозначено

$$\Omega_p = A^{-1}(A + A_3)\omega_3^0, \qquad N_j = (-1)^j A^{-1}\Omega_p L_{3-j} \qquad (j = 1, 2). \tag{24}$$

Исключая далее тривиальный случай, при котором $\omega_3^0 = \Omega_p = 0$, заключаем следующее. Движение твёрдого тела в полуевклидовом пространстве, происходящее согласно уравнениям (21) при условиях (22), $\omega_3^0 \neq 0$, интерпретируется движением двумерной изотропной системы гармонических осцилляторов (23) с собственной частотой Ω_p (24), находящейся под воздействием постоянных динамических нагрузок N_j. На плоскости переменных ω_1, ω_2 данный осциллятор совершает нормальные колебания с частотой Ω_p и позиционными параметрами ω_j – нормальными квазикоординатами в данной плоскости.

Поскольку в задаче Эйлера принято $\mathbf{L}(L_j) \equiv 0$, то далее полагается $N_j = 0$ и из системы уравнений (23) следует решение

$$\omega_j(t) = \omega_j^0 \cos\Omega_p t + \Omega_p^{-1}\dot{\omega}_j^0 \sin\Omega_p t \qquad (j = 1, 2),$$

удовлетворяющее начальным условиям $\omega_j(0) = \omega_j^0, \quad \dot{\omega}_j(0) = \dot{\omega}_j^0$.

Обозначим $u = \omega_1, \dot{u} = \dot{\omega}_1$ и рассмотрим на полуевклидовой поскости переменных $(u, \dot{u})$ фазовый портрет свободного осциллятора (23). Уравнение интегральных кривых на этой плоскости имеет вид

$$\dot{u}\frac{d\dot{u}}{du} + \Omega_p^2 u = 0.$$

Отсюда следует первый интеграл, являющийся интегралом энергии свободного осциллятора (23)

$$\dot{u}^2 + \Omega_p^2 u^2 = h_p \qquad (h_p = \text{const} > 0), \tag{25}$$

определяющий на фазовой плоскости однопараметрическое множество его интегральных кривых – эллипсов с уравнениями

$$\frac{\dot{u}^2}{a^2}+\frac{u^2}{b^2}=1, \qquad a=\sqrt{h_p}\ , \qquad b=\Omega_p^{-1}\sqrt{h_p}\ .$$

Выбрав направление движения изображающей точки по этим кривым, получим фазовые траектории тела, целиком заполняющие фазовую плоскость и определяющие фазовый портрет осциллятора (25). При этом для фиксированного значения параметра h_p действительные ветви фазовых траекторий существуют лишь при условии $\Omega_p^2 u^2 < h_p$, а точка плоскости с координатами $u=\dot{u}=0$ является особой точкой фазовой плоскости – *центром*.

Фазовый портрет данного осциллятора на плоскости квазикоординат $v = \omega_2$, $\dot{v}=\dot{\omega}_2$ качественно полностью идентичен его портрету на плоскости $(u,\dot{u})$.

Таким образом, показано, что фазовый портрет твёрдого тела, движущегося в полуевклидовом пространстве согласно уравнениям (21) при условиях (22), $N_j=0$ качественно идентичен его портрету, существующему при аналогичных условиях в трёхмерном евклидовом пространстве. Здесь приведена осцилляторная аналогия инерционного движения твёрдого тела в особом случае.

4. Редуцирование динамической системы

Проведём редуцирование системы уравнений Эйлера (7) в регулярном (не вырожденном) случае, при котором выполняется условие $A_1 \neq A_2$, и затем представим аналоговую интерпретацию её особого решения.

Из второго уравнения этой системы согласно зависимостям (11) аналогично предыдущему получаем редуцированное уравнение

$$\ddot{\omega}_2 - 2D\omega_2^3 + Dn^2\omega_2 = 0, \tag{26}$$

где обозначено

$$D=(A_1A_3)^{-1}(A_1-A_2)(A_2+A_3)\neq 0, \qquad n^2=n_1^2+n_3^2\neq 0.$$

Равенство (26) является *уравнением Дуффинга*, характеризующим внешнее упругое силовое воздействие с мягкой (при $D > 0$) восстанавливающей силой (по общепринятой терминологии динамики машин и механизмов).

Первый интеграл динамической системы (26) имеет вид

$$\dot{\omega}_2^2 = D\omega_2^4 - Dn^2\omega_2^2 + C \equiv Q(\omega_2), \tag{27}$$

где $C \neq 0$ – постоянная интегрирования, значение которой определяется начальным условием $\dot{\omega}_2(0)=\dot{\omega}_2^0$. Интегрируя уравнение (27), находим второй интеграл уравнения (26)

$$\pm\int_{\omega_2^0}^{\omega_2}\frac{dz}{\sqrt{Q(z)}}=t, \tag{28}$$

где знак в левой части равенства выбирается из условия $t > 0$. Интеграл в соотношении (28) является эллиптическим, обращение которого приводит к двоякопериодической эллиптической функции второго порядка [5, с. 127] относительно переменной ω_2.

Обращая зависимость (28), в результате получаем

$$\omega_2(t) = \omega_p [1 + k(\wp(\tau) - k)^{-1}], \tag{29}$$

где обозначено

$$k = \frac{1}{2} D(2\omega_p^2 - n^2) \neq 0, \qquad \wp(\tau) = \wp(\tau; g_2, g_3),$$

ω_p – простой корень полинома $Q(z)$, $\wp(\tau)$ – эллиптическая функция Вейерштрасса [7, с. 321] с алгебраическими инвариантами

$$g_2 = D\left(\frac{Dn^4}{12} + C\right), \qquad g_3 = \frac{n^2}{6}\left(\frac{n^4}{36} - CD^2\right),$$

$\tau = \tau(t) \in \mathrm{C}^0$ – функция приведённого (гипотетического) времени такая, что при ограничениях (9) имеем $\tau_0 = \tau(0)$ с выполнением условия

$$\wp(\tau_0) = k(1 - r)^{-1}, \qquad r = \frac{\omega_p}{\omega_2^0} \neq 1.$$

Представление решения уравнения (26) в форме (29) имеет место лишь в случаях регулярного движения тела, при которых все корни полинома Q (27) – простые. В иных случаях функция $\wp(\tau)$ вырождается и зависимость (29) представляется в элементарных функциях [7, с. 321]. Соотношение (29) является альтернативной формой представления соотношений (15), (17) при регулярном режиме движения тела.

Рассмотрим особые (не регулярные) случаи движения тела, соответствующие формам вырождения эллиптической функции Вейерштрасса. Пусть e_j – корни стандартного полинома Вейерштрасса [5, с. 127]. Если $e_1 = e_2 = -1/2\, e_3$, то инварианты принимают значения $g_2 = 3e_3^2, g_3 = e_3^3$ и действительный период функции $\wp(\tau)$ бесконечен. Тогда, согласно зависимости (29), движение по квазикоординате ω_2 является апериодическим и ограниченным, достигающем в пределе при $\tau \to +\infty$ значения

$$\omega_2(+\infty) = \omega_p e_1 (e_1 - k)^{-1} = \omega_* \qquad (k \neq e_1).$$

Величины $\omega_1(+\infty), \omega_3(+\infty)$ определяются равенствами (11) в силу значения ω_*.

В случае, при котором $e_2 = e_3 = -1/2\, e_1$, имеем $g_2 = 3e_1^2, g_3 = e_1^3$ и мнимый период эллиптической функции бесконечен [5, с. 128]. Здесь движение по переменной ω_2 также ограничено и в пределе при $\tau \to +\infty$ достигает значения $\omega_2(+\infty) = \omega_p$.

В особом случае, при всех значениях $e_j = 0$, имеем $g_2 = g_3 = 0$ и оба периода эллиптической функции бесконечны [5, с. 128]. Тогда имеем $\wp(\tau) = O(\tau^{-2})$, откуда в пределе при $\tau \to +\infty$ получаем $\omega_2(+\infty) = 0$. В этом случае, согласно равенствам (11), находим $\omega_1(+\infty) = \pm n_1\sqrt{H_1}$, $\omega_3(+\infty) = \pm n_3\sqrt{H_3}$, что соответствует движению тела со скоростью

$$\left|\boldsymbol{\omega}(+\infty)\right| = \sqrt{(\omega_1^0)^2 + (H_1 + H_3)(\omega_2^0)^2 + (\omega_3^0)^2}\,,$$

где обозначено

$$H_1 + H_3 = \frac{A_2}{A_1 A_3 (A_1 + A_3)}[A_1(A_1 - A_2) + A_3(A_2 + A_3)].$$

Таким образом, во всех случаях вырождения эллиптической функции тело совершает лимитационные движения, при которых компонента скорости ω_2 при больших значениях приведённого времени достигает конечного предела, величина которого зависит от значений параметров, характерных для каждого случая реального движения.

5. Интерпретация решения результирующего уравнения

Рассмотрим аналоговую динамическую интерпретацию особого решения редуцированного уравнения (26). Этому уравнению удовлетворяет решение

$$\omega_2(t) = \pm\frac{n}{\sqrt{2}}\,\mathrm{th}\,(ct + \beta), \tag{30}$$

где постоянные c, β при условиях (9) определяются равенствами

$$c = n\sqrt{\frac{D}{2}}\,, \qquad \omega_2^0 = \pm\frac{n}{\sqrt{2}}\,\mathrm{th}\,\beta.$$

Характерной функции (30) в квантовой механике соответствует физический объект, являющийся уединённой волной – *кинком* или *антикинком* [8]. Знаки “плюс” и “минус” в равенстве (30) относятся к кинку и антикинку, соответственно. Эти объекты обладают эффектом трансляционной инвариантности и представляют собой самоподдерживающиеся локализованные пакеты энергии. Зависимости плотности энергии кинка (или антикинка) от времени соответствует область, характеризующая эту плотность, которая имеет эффективную ширину порядка величины $(n\sqrt{D})^{-1}$ [9].

Движению тела, определяемого зависимостью (30), соответствует движение изображающей точки фазовой плоскости по траектории, совпадающей с сепаратрисой, и относящейся к особому режиму состояния тела. В результате множество решений уравнения (26), соответствующих этому режиму, составляет три элементарных решения, являющиеся кинком, антикинком (30) и двумя статическими структурно симметричными решениями вида

$$\omega_2(t) = \pm\,\mathrm{O}(n) \qquad (t \in T). \tag{31}$$

Оценка решения (31) уравнения (26) и присоединённое к ним тривиальное решение $\omega_2(t) = \mathrm{const} = \omega_q$ характеризуют положения статического равновесия динамической системы (26), определяемые значениями $\omega_q = 0,\ \omega_q = \pm\, n/\sqrt{2}$.

Скорость изменения величины ω_2 во времени, определяемой равенством (30), представляется соотношением

$$\dot{\omega}_2(t) = \pm \frac{nc}{\sqrt{2}}\,\mathrm{ch}^{-2}(ct + \beta).$$

Изменение этой величины имеет волновой характер и соответствует выражению для *солитона Кортевега–де Фриза* [9, с. 309].

Исключая из равенств для величин $\omega_2, \dot{\omega}_2$ функции времени, получим явное уравнение фазовых траекторий динамической системы твёрдого тела на плоскости переменных $\omega_2, \dot{\omega}_2$ в виде

$$\omega_2^2 = \frac{n}{2}\left(n \pm \frac{\sqrt{2}}{c}\,\dot{\omega}_2\right).$$

Согласно этому уравнению фазовыми траекториями на данной плоскости являются параболические кривые с параметром, величина которого пропорциональна значению $n^2 c^{-1}$.

Таким образом, регулярное инерционное движение твёрдого тела в полуевклидовом пространстве при заданных условиях в определённом смысле сопоставимо с указанными волновыми движениями, совершаемыми кинком (антикинком) и солитоном Кортевега–де Фриза. В этом и состоит *волновая интерпретация* движения тела в задаче Эйлера.

6. Ориентация твёрдого тела

Второй частью общей задачи Эйлера является нахождение аналитических зависимостей параметров ориентации тела по известным соотношениям, определяющим компоненты скорости в зависимости от времени. Это достигается либо путём интегрирования определяющего уравнения (5) и уравнений системы Пуассона (5), либо непосредственным применением соотношений (1) и заданных кинематических уравнений, концептуально существующих для полуевклидова пространства.

Параметрами ориентации тела в трёхмерном полуевклидовом пространстве являются позиционные функции $\lambda(t),\ \vartheta(t),\ \varphi(t)$ класса C^1, являющиеся аналогами классических углов Эйлера $\psi(t), \theta(t), \varphi(t)$, применяемых в евклидовом пространстве. Функции $\lambda, \vartheta, \varphi$ также назовём, по аналогии, параметрами прецессии, нутации и собственного вращения тела, соответственно. При этом существенным является тип орта выбранного направления $\mathbf{s}(s_j);\ \lambda,\ \vartheta,\ \varphi$ определяют ориентацию базиса Γ относительно базиса Γ_0. Орт **s** (и, следовательно, вектор **G**) по типу может являться *собственным* (тип *A*), *идеальным* (тип *B*) или *изотропным* (тип *C*). В случае *типа A* основное тождество (2) принимает вид

$$-s_1^2 - s_2^2 + s_3^2 = 1,$$

которому удовлетворяет зависимость $\mathbf{s} \leftrightarrow \mathbf{\Phi}$, представленная в форме

$$\mathbf{s} = [s_1, s_2, s_3] = [\operatorname{sh}\vartheta \sin\varphi,\ \operatorname{sh}\vartheta \cos\varphi,\ -\operatorname{ch}\vartheta]. \tag{32}$$

Из соотношений (1), (32) следуют зависимости [3]

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\lambda}\operatorname{sh}\vartheta \sin\varphi + \dot{\vartheta}\cos\varphi, \\ \omega_2 &= \dot{\lambda}\operatorname{sh}\vartheta \cos\varphi - \dot{\vartheta}\sin\varphi, \\ \omega_3 &= -(\dot{\lambda}\operatorname{ch}\vartheta + \dot{\varphi}), \end{aligned} \tag{33}$$

являющиеся аналогами соответствующих соотношений, применяемых в случае евклидова пространства, которые являются *кинематическими уравнениями Эйлера* для полуевклидова пространства.

Обращая зависимости (33), в результате при $\vartheta \neq 0$ получаем

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= (\operatorname{sh}\vartheta)^{-1}(\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi), \\ \dot{\vartheta} &= \omega_1 \cos\varphi - \omega_2 \sin\varphi, \\ \dot{\varphi} &= -[\operatorname{cth}\vartheta\,(\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi) + \omega_3]. \end{aligned} \tag{34}$$

Соотношения (34) определяют скорости прецессии, нутации и собственного вращения тела по известным зависимостям вида $\omega_j(t)$.

Согласно зависимостям (1), (32) при $\vartheta \neq 0$ имеем

$$\operatorname{tg}\varphi(t) = \frac{A_1\omega_1}{A_2\omega_2}, \qquad \operatorname{ch}\vartheta(t) = -\frac{A_3}{H}\omega_3,$$

откуда в силу зависимостей (15)–(17) следует: при $n_3^2 > n_1^2$

$$\operatorname{tg}\varphi(t) = k_1 \frac{\operatorname{cn}\sigma_3(t)}{\operatorname{sn}\sigma_3(t)}, \qquad \operatorname{ch}\vartheta(t) = -k_3 \operatorname{dn}\sigma_3(t), \qquad \sigma_3(t) = P_3 t + \alpha_1, \tag{35}$$

а при $n_3^2 < n_1^2$ получаем

$$\operatorname{tg}\varphi(t) = k_2 \frac{\operatorname{dn}\sigma_1(t)}{\operatorname{sn}\sigma_1(t)}, \qquad \operatorname{ch}\vartheta(t) = -k_3 \operatorname{ch}\sigma_1(t), \qquad \sigma_1(t) = P_1 t + \alpha_2. \tag{36}$$

В равенствах (35), (36) обозначено

$$k_1 = \frac{A_1}{A_2}\sqrt{H_1}, \qquad k_2 = \frac{k_1 n_1}{n_3}, \qquad k_3 = \frac{A_3}{H} n_3 \sqrt{H_3}.$$

Из первого равенства (34) и соотношений (1), (32) имеем

$$\dot{\lambda} = H\,\frac{A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2}{(A_1\omega_1)^2 + (A_2\omega_2)^2}\,. \tag{37}$$

В силу зависимостей (15), (16) при $n_3^2 > n_1^2$, $A_1 \neq A_2$ из соотношений (15), (16), (37) находим

$$\lambda(t) = \lambda_0 + H\int_0^t \frac{(A_2 + A_3)\operatorname{cn}^2\sigma_3(\tau) + (A_1 + A_3)\operatorname{sn}^2\sigma_3(\tau)}{A_1(A_2 + A_3)\operatorname{cn}^2\sigma_3(\tau) + A_2(A_1 + A_3)\operatorname{sn}^2\sigma_3(\tau)}\,d\tau, \tag{38}$$

а при $n_3^2 < n_1^2$ согласно равенствам (17), (37) получаем

$$\lambda(t) = \lambda_0 + H\int_0^t \frac{(A_1 - A_2)D_1\operatorname{dn}^2\sigma_1(\tau) + (A_1 + A_3)D_3\operatorname{sn}^2\sigma_1(\tau)}{A_1(A_1 - A_2)D_1\operatorname{dn}^2\sigma_1(\tau) + A_2(A_1 + A_3)D_3\operatorname{sn}^2\sigma_1(\tau)}\,d\tau. \tag{39}$$

Таким образом, если орт **s** – собственный, то ориентация тела при $A_1 \neq A_2$ определяется равенствами (35), (36), (38), (39).

Рассмотрим случай *типа B*, при котором функциональная зависимость вида $\mathbf{s} \leftrightarrow \mathbf{\Phi}$ имеет вид

$$\mathbf{s} = [s_1, s_2, s] = [-\operatorname{ch}\vartheta\sin\varphi,\ -\operatorname{ch}\vartheta\cos\varphi,\ \operatorname{sh}\vartheta]. \tag{40}$$

Из равенств (1), (40) следуют соотношения [3]

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\dot{\lambda}\operatorname{ch}\vartheta\sin\varphi + \dot{\vartheta}\cos\varphi, \\ \omega_2 &= -(\dot{\lambda}\operatorname{ch}\vartheta\cos\varphi + \dot{\vartheta}\sin\varphi), \\ \omega_3 &= \dot{\lambda}\operatorname{sh}\vartheta - \dot{\varphi}. \end{aligned} \tag{41}$$

Обращая соотношения (41), находим

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= -(\operatorname{ch}\vartheta)^{-1}(\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi), \\ \dot{\vartheta} &= \omega_1\cos\varphi - \omega_2\sin\varphi, \\ \dot{\varphi} &= -[(\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi)\operatorname{th}\vartheta + \omega_3]. \end{aligned} \tag{42}$$

Кинематические уравнения (42), как и уравнения (34), определяют скорости прецессии, нутации и собственного вращения тела по известным выражениям вида вида $\omega_j(t)$.

Согласно равенствам (1), (40) имеем

$$\operatorname{tg}\varphi(t) = \frac{A_1\omega_1}{A_2\omega_2}, \qquad \operatorname{sh}\vartheta(t) = \frac{A_3}{H}\omega_3,$$

откуда вследствие зависимостей (15)–(17) получаем: при $n_3^2 > n_1^2$

$$\operatorname{sh}\vartheta = k_3\operatorname{dn}\sigma_3(t), \tag{43}$$

а при $n_3^2 < n_1^2$ находим

$$\operatorname{sh}\vartheta = k_3\operatorname{cn}\sigma_1(t). \tag{44}$$

При этом соотношения вида $\varphi = \varphi(t)$, заданные равенствами (35), (36), сохраняются и в данном случае. Аналогичное утверждение относится и к зависимости вида $\lambda = \lambda(t)$, определяемой равенствами (38), (39).

Таким образом, если орт **s** – идеальный, то ориентация тела в данном пространстве при $A_1 \neq A_2$ определяется равенствами (35)–(39), (43), (44). Задача определения ориентации тела в случае, при котором орт **s** – *изотропный*, здесь и далее не рассматривается.

Определим ориентацию кинетически осесимметричного тела, при котором $A_1 = A_2$. Пусть для системы уравнений (21) выполняются условия (22) и, кроме того, $L_1 = L_2 = 0$. Тогда эта система имеет первый интеграл $\omega_3(t) = \mathrm{const} = \omega_3^0$ и, согласно равенствам (1), (32) для собственного орта **s** имеем $\vartheta(t) \equiv \vartheta^0$, где значение ϑ^0 определяется равенством

$$\mathrm{ch}\,\vartheta^0 = -A_3 H^{-1} \omega_3^0. \tag{45}$$

Тогда в силу первого уравнения системы (33) получаем

$$\omega_1(t) = \dot{\lambda}\,\mathrm{sh}\,\vartheta_0 \sin\varphi,$$

и, согласно равенствам (1), отсюда следует

$$\lambda(t) = \lambda_0 + n_p t \qquad (n_p = A_1^{-1} H). \tag{46}$$

Из третьего уравнения системы (33) в силу соотношений (45), (46) имеем

$$\varphi(t) = \varphi_0 + m_p \omega_3^0 t \qquad (m_p = A_1^{-1} A_3 - 1). \tag{47}$$

При этом постоянные n_p, m_p, ω_3^0 в силу равенств (45)–(47) связаны условием

$$n_p\,\mathrm{ch}\,\vartheta_0 + (1 + m_p)\omega_3^0 = 0. \tag{48}$$

Если орт **s** – идеальный, то аналогичным образом согласно равенствам (1), (40), (41) получаем

$$\mathrm{sh}\,\vartheta^0 = A_3 H^{-1} \omega_3^0,$$

а зависимости (46)–(48) в этом случае сохраняются.

Соотношения (45)–(47) характеризуют движение, являющееся *регулярной прецессией* тела в полуевклидовом конфигурационном пространстве относительно ортобазиса Γ.

7. Аналоговая осцилляторная интерпретация задачи Эйлера

Инерционное движение твёрдого тела в настоящей работе интерпретировано движением гармонического осциллятора (23), (24), кинком (антикинком) (30), статическими образованиями (31) и солитоном Кортевега–де Фриза. Помимо этого имеет место и следующее наглядное аналоговое истолкование.

Применим модель резонансного взаимодействия трёх связанных осцилляторов в динамической системе с квадратичной нелинейностью. Положим, что в линейной системе (23) с нормальными квазикоординатами ω_j путём внешнего силового воздействия возникла малая нелинейность, вследствие которой данная система трансформируется в систему с уравнением [9, с. 267]

$$\ddot{\omega}_j + \Omega_p^2 \omega_j = \mu F_j(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \qquad (j = 1, 2, 3), \tag{49}$$

где $\mu = \text{const} << 1$ – малый действительный параметр, $F_j \in \mathrm{C}^0$.

Вследствие нелинейности в этой консервативной динамической системе с тремя степенями свободы и со сосредоточенными параметрами возникает эффект комбинационных частот, генерирующих колебания не малой амплитуды [9, с. 267]. Этот эффект реализуется в случаях, при которых частоты колебаний являются *резонансными*, т.е. достаточно близкими к нормальным частотам Ω_{pj} $(j = 1, 2, 3)$, удовлетворяющим условию существования резонанса

$$\Omega_{p1} + \Omega_{p2} = \Omega_{p3},$$

называемого также *триадным резонансом* между частотами $\Omega_{p1}, \Omega_{p2}, \Omega_{p3}$.

Решение системы уравнений (49) с применением метода асимптотического интегрирования ВКБ ищется в виде

$$\omega_j(t) = w_j(\mu t) \exp(i\Omega_{pj} t) + \mathrm{O}[\mu v_j(t)] \qquad (j = 1, 2, 3), \tag{50}$$

где w_j – новые переменные, v_j – функции, характеризующие степень отличия приближённого решения системы от точного. В результате применения к системе уравнений (49) соотношений (50) и последующего усреднения получаем следующую систему уравнений для комплексных амплитуд осцилляторов

$$\dot{w}_1 = \sigma \overline{w_2} w_3, \qquad \dot{w}_2 = \sigma w_3 \overline{w_1}, \qquad \dot{w}_3 = \sigma w_1 w_2, \tag{51}$$

где $\sigma > 0$ – заданная действительная постоянная, характерная для данной системы. При постоянной величине разности фаз колебаний осцилляторов в результате преобразования вида $w_j = \Phi_j \exp(i\gamma_j)$ определяющая система уравнений (51) принимает вид [9, с. 271]

$$\dot{\Phi}_1 = -\sigma \Phi_2 \Phi_3, \qquad \dot{\Phi}_2 = \sigma \Phi_3 \Phi_1, \qquad \dot{\Phi}_3 = -\sigma \Phi_1 \Phi_2. \tag{52}$$

Уравнения системы (52) совпадают по форме с динамическими уравнениями Эйлера (7) при выполнении связанных кинетических условий

$$A_3^{-1}(A_1 - A_2) = A_1^{-1}(A_3 + A_2) = A_2^{-1}(A_1 + A_3) = \sigma,$$

где $A_1 > A_2$. Исключая из системы этих равенств параметр σ, получаем условие

$$(A_3 - A_2) A_1^2 + (A_1 - A_3) A_2^2 + (A_1 - A_2) A_3^2 = 0, \tag{53}$$

которое при всех различных значениях величин A_j, безусловно, выполняется, если A_1 – наибольший осевой момент инерции твёрдого тела.

Таким образом, если выполняется структурно-кинетическое условие (53), то совокупность уравнений (52) резонансного взаимодействия трёх взимосвязанных осцилляторов, образующих систему с квадратичной нелинейностью, по форме идентична динамической системе Эйлера (7), описывающей инерционное движение твёрдого тела в трёхмерном полуевклидовом пространстве. Это утверждение составляет *аналоговую осцилляторную интерпретацию* поставленной задачи Эйлера.

Заключение

Существуют характерные особенности инерционных движений тела в полуевклидовом пространстве E_0, отличающиеся от особенностей соответствующих движений в евклидовом пространстве E. Некоторые из них, следующие из сравнительного анализа этих движений, заключаются в следующем.

В пространстве E: для построения инерционно-кинетических характеристик тела изначально вводятся ограничения $A_1 > A_2 > A_3$ или $A_1 < A_2 < A_3$. Существует случай центральной (полной) кинетической симметрии тела, при котором $A_1 = A_2 = A_3$, являющийся *характерным случаем* для данного пространства. Зависимость величины s_3 от угла нутации – тригонометрическая (круговая), имеющая периодический характер изменения во времени. Первый интеграл модуля кинетического момента динамических уравнений Эйлера соответствует трёхосному эллипсоиду, который в частных случаях симметричности кинетической структуры может вырождаться в эллипсоид вращения или в сферу. Перманентные вращения тела относительно каждой из его главных осей инерции существуют как в общем случае – при различных значениях главных осевых моментов инерции тела, так и в случаях его структурно-кинетической симметрии [1].

В пространстве E_0: для главных осевых моментов инерции тела из структурно-кинетических ограничений применяется только условие $A_1 > A_2$. Случая центральной кинетической симметрии, как характерного случая, не существует; могут иметь место лишь случаи осевой структурной симметрии. Зависимость величины s_3 от аналога угла нутации – гиперболическая, имеющая апериодический характер изменения во времени [3]. Первый интеграл (8) модуля кинетического момента системы динамических уравнений (7) соответствует гиперболоиду (однополостному или двуполостному), который в особом случае (при H = 0) вырождается в действительный конус. Перманенное вращение тела по инерции существует при условии

$$(A_2 + A_3)A_1^2 - (A_3 + A_1)A_2^2 + (A_1 - A_2)A_3^2 = 0,$$

которое, безусловно, выполняется, если

$$(A_3 + A_1)A_2^2 > (A_1 - A_2)A_3^2 \qquad (A_1 > A_2).$$

Квадратуры в равенствах (38), (39) могут быть вычислены путём применения квадратурных формул, содержащих соответствующие эллиптические функции [5]. В настоящей работе эти вычисления не приведены ввиду их значительного объёма и громоздких по форме вычисленных результирующих выражений, не раскрывающих новых качественных представлений о характере движения тела.

Таким образом, соответственные инерционные движения тела в пространствах E, E_0 по характеру имеют между собой существенные качественные различия, носящие признаки характерных особенностей, связанных со специфическими свойствами этих пространств.

Основной отличительной особенностью любого (не только инерционного) движения твёрдого тела является неоднозначность в целом характеристик, определяющих это движение, независимо от однозначности определяющих величин. Эта неоднозначность обусловлена типом направляющего орта **s**, который может являться собственным, идеальным или изотропным [3]. В частности, для орта идеального типа, по определению, $\|\mathbf{s}\|^2 = -1,$ а для изотропного орта имеем $\|\mathbf{s}\|^2 = 0$ при $\mathbf{s} \neq 0$, что обусловлено свойствами полуевклидова пространства.

Литература

1. Голубев В.В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжёлого твёрдого тела около неподвижной точки. М: Гостехиздат, 1953. 288 с.
2. Жуковский Н.Е. О движении материальной псевдосферической фигуры по поверхности псевдосферы. Полн. собр. соч.: в 10 т. / Под ред. А.П. Котельникова. М.; Л.: ОНТИ. Т. 1, 1937. С. 490–535.
3. Макеев Н.Н. Движение гиростата вокруг центра инерции в полуевклидовом пространстве // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 2 (65). С. 42–53. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-42-53.
4. Макеев Н.Н. Малые колебания и сферическое движение гиростата в псевдоевклидовом пространстве // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40. Вып. 3. С. 417–423. DOI: 10.1016/0021-8928 (76) 90029-0.
5. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1964. 344 с.
6. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ.М.: Наука, 1969. 576 с.
7. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. В 2 ч. М.: Физматлит. Ч. 2, 1963. 516 с.
8. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М.: Мир, 1985. 416 с.
9. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.