

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: [mathmod.esrae.ru/54-224](http://mathmod.esrae.ru/54-224)

Ссылка для цитирования этой статьи:

Московский И.Г. Учет рельефа при оценке напряжений, действующих в горных породах в их естественном залегании // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2025. №4

УДК 550.82

DOI:10.24412/2541-9269-2025-4-43-51

## УЧЕТ РЕЛЬЕФА ПРИ ОЦЕНКЕ НАПРЯЖЕНИЙ, ДЕЙСТВУЮЩИХ В ГОРНЫХ ПОРОДАХ В ИХ ЕСТЕСТВЕННОМ ЗАЛЕГАНИИ

Московский И.Г.

АО «Нижне-Волжский научно-исследовательский институт  
геологии и геофизики», Россия, Саратов,  
Саратовский государственный технический университет  
имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, [mosig@mail.ru](mailto:mosig@mail.ru)

## TAKING INTO ACCOUNT THE RELIEF WHEN ASSESSING THE STRESSES ACTING IN ROCKS IN THEIR NATURAL OCCURRENCE

Moskowsky I.G.

JSC «Nizhne-Volzhsy Scientific Research Institute  
of Geology and Geophysics», Russia, Saratov,  
Yuri Gagarin State Technical University of Saratov,  
Russia, Saratov, [mosig@mail.ru](mailto:mosig@mail.ru)

**Аннотация.** В статье рассмотрена математическая модель напряженно-деформированного состояния горных пород в естественном залегании, учитывающая особенности рельефа. По результатам вычислительного эксперимента проведено сравнение значений главных напряжений, действующих в горных породах при различных способах их оценки.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние горных пород, тензор напряжений, главные напряжения, влияние рельефа, горные породы в естественном залегании, задача Фламана.

**Abstract.** The article examines a mathematical model of the stress-strain state of rocks in their natural occurrence, taking into account the features of the relief. Based on the results of the computational experiment, the principal stress values acting in rocks with different their assessment methods are compared.

Keywords: stress-strain state of rocks, stress tensor, principal stresses, influence of relief, rocks in their natural occurrence, Flamant task.

## Введение

Определение напряженно-деформированного состояния (НДС) горных пород разрабатываемого геологического разреза необходимо для обеспечения безопасности и эффективности бурения и эксплуатации нефтегазовых скважин [1-5]. Определение НДС пород в окрестности скважины обычно выполняется в два этапа. Сперва определяются напряжения, действующие в породе в ее естественном залегании (ЕЗ), т.е. до бурения скважины. Эти напряжения используются при формулировке граничных условий, т.е. на расстоянии, на котором влияние скважины на НДС породы пренебрежимо мало. На втором этапе решается задача по определению компонент тензора напряжений в окрестности скважины с учетом полученных на первом этапе напряжений, действующие в породе в ЕЗ.

В работах по моделированию НДС пород в окрестности скважины для пород в ЕЗ полагают, что тензор напряжений имеет отличными от нуля только нормальные напряжения:  $\sigma_v$  – вертикальное напряжение;  $\sigma_h$ ,  $\sigma_H$  – минимальное и максимальное горизонтальные напряжения, соответственно. Для упрощения все касательные напряжения полагаются равными нулю. Как показано в работе [6], такое упрощение может приводить к неверной оценке интервала значений плотности бурового раствора, при которых порода на стенках скважины не разрушается. В настоящей статье рассматривается математическая модель НДС горной породы в ЕЗ с учетом особенностей рельефа и проводится сравнение значений главных напряжений в горных породах при различных способах их оценки.

## Методика решения

В прямоугольной декартовой системе координат  $(x, y, z)$ , показанной на рис. 1а, рассмотрим линейно-деформируемую, однородную и изотропную модель среды, состоящую из полупространства ( $z > 0$ ), физические свойства которого меняются только с глубиной, и аномалии рельефа ( $z < 0$ ), например, горной гряды, расположенной вдоль оси  $y$ . Термин аномалия (неоднородность) рельефа здесь понимается по отношению к однородному полупространству. Будем полагать, что геометрия аномалии рельефа такова, что все напряжения и деформации зависят только от координат  $x$  и  $z$ . В этом случае задачу определения напряжений в горной породе будем рассматривать в плоскости перпендикулярной к оси  $y$  (рис. 1б), а аномалию рельефа, расположенную на отрезке  $x \in [x_1, x_2]$ , заменим давлением  $f(x)$ , действующим на поверхность  $z = 0$  вдоль отрезка  $[x_1, x_2]$  (рис. 1б). Сжимающие напряжения будем полагать положительными.

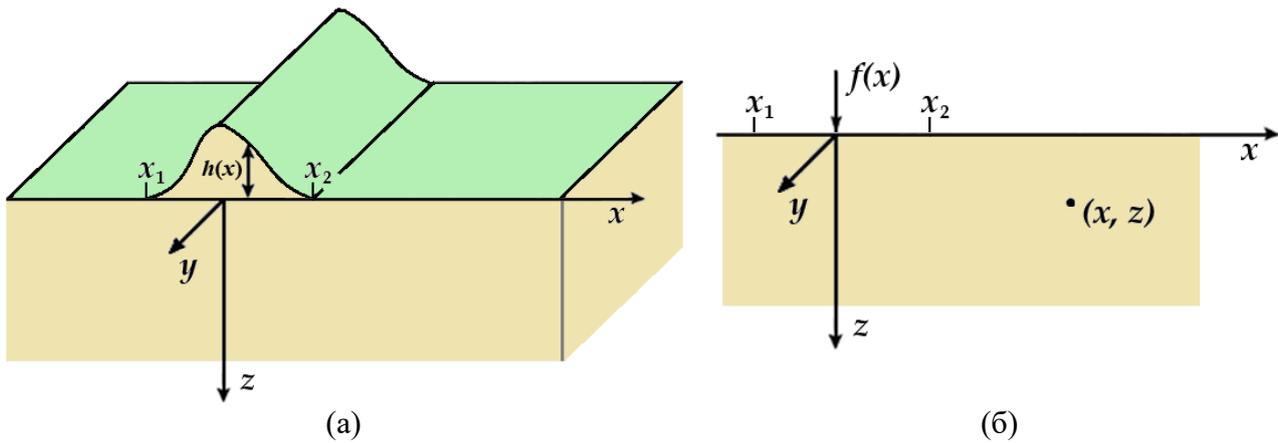


Рис. 1. Модель среды

Тензор напряжений

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (1)$$

будем искать в виде суммы

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^p + \hat{\sigma}^f, \quad (2)$$

где

$\hat{\sigma}^p$  – тензор напряжений, учитывающий массовые силы (силу тяжести) в полуплоскости  $z > 0$ ;

$\hat{\sigma}^f$  – тензор напряжений, учитывающий давление  $f(x)$ , определяемый по формулам, полученным для случая отсутствия массовых сил. Данный подход используется в работах [7, 8].

Для однородного полупространства тензор  $\hat{\sigma}^p$  имеет вид [7]:

$$\hat{\sigma}^p = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^p & \sigma_{xy}^p & \sigma_{xz}^p \\ \sigma_{xy}^p & \sigma_{yy}^p & \sigma_{yz}^p \\ \sigma_{xz}^p & \sigma_{yz}^p & \sigma_{zz}^p \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где

$$\sigma_{xy}^p = \sigma_{xz}^p = \sigma_{yz}^p = 0, \quad \sigma_{xx}^p = \sigma_{yy}^p = \sigma_h, \quad \sigma_{zz}^p = \sigma_v,$$

$\sigma_v = \rho g z$  – вертикальное напряжение,

$$\sigma_h = \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \sigma_v \text{ – горизонтальное напряжение,}$$

$\rho$  – средняя плотность вышележащих пород,

$\nu$  – коэффициент Пуассона,

$g$  – ускорение свободного падения.

Компоненты тензора

$$\hat{\sigma}^f = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^f & \sigma_{xy}^f & \sigma_{xz}^f \\ \sigma_{xy}^f & \sigma_{yy}^f & \sigma_{yz}^f \\ \sigma_{xz}^f & \sigma_{yz}^f & \sigma_{zz}^f \end{pmatrix} \quad (4)$$

определяются как решение задачи Фламана [9]:

$$\sigma_{ij}^f(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \tilde{\sigma}_{ij}(x-t, z) dt, \quad (i, j = x, y, z), \quad (5)$$

где

$\tilde{\sigma}_{ij}$  – фундаментальные решения для упругой полуплоскости:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xx} &= \frac{2x^2 z}{\pi r^4}, \\ \tilde{\sigma}_{zz} &= \frac{2z^3}{\pi r^4}, \\ \tilde{\sigma}_{xz} &= \frac{2xz^2}{\pi r^4}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$r = \sqrt{x^2 + z^2}.$$

Учитывая, что в рассматриваемой модели деформации и напряжения не зависят от переменной  $y$ , можно показать, что

$$\tilde{\sigma}_{xy} = \tilde{\sigma}_{yz} = 0, \quad (7)$$

$$\tilde{\sigma}_{yy} = \nu(\tilde{\sigma}_{xx} + \tilde{\sigma}_{zz}) \Rightarrow \tilde{\sigma}_{yy} = \nu \frac{2z}{\pi r^2}. \quad (8)$$

Из решения (1) – (8) следует, что в отличие от однородного полупространства, среда с аномалией рельефа обладает анизотропией горизонтальных напряжений ( $\sigma_{xx} \neq \sigma_{yy}$ ) и отличное от нуля касательное напряжение  $\sigma_{xz}$ . Главные напряжения, в такой среде, определяются решением уравнения

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} - \sigma & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0, \quad (9)$$

имеющего вид

$$\sigma = \sigma_{yy} \quad \text{и} \quad \sigma = \left( \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2} \right)^2 + \sigma_{xz}^2}. \quad (10)$$

Упорядоченные по величине, главные напряжения (10), обозначаются  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ).

### Вычислительные эксперименты

На основе формул (1) – (10) рассчитаны напряжения, действующие в геологической среде, показанной на рис. 2. Расчеты проведены для фиксированных глубин  $z$  на различном удалении  $x$  от неоднородности рельефа.

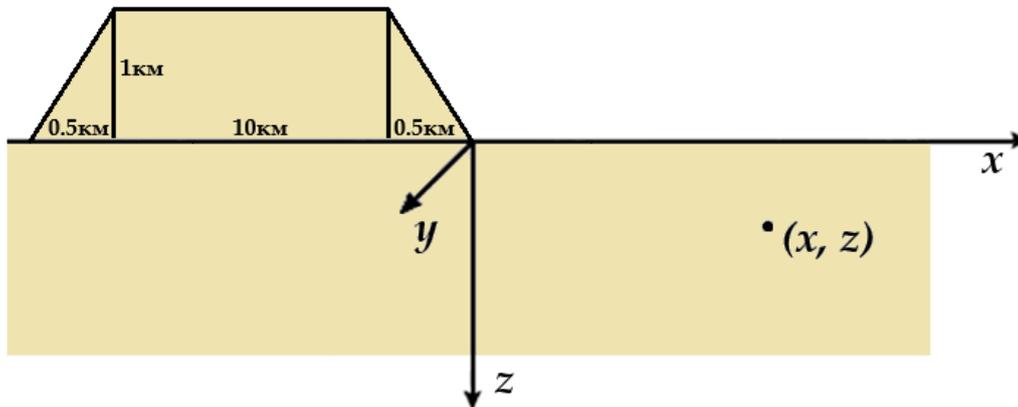


Рис. 2. Модель среды ( $\rho = 2500 \text{ кг/м}^3$ ,  $\nu = 0.3$ )

На рис. 3 показаны зависимости отношений нормальных компонент  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  тензора напряжений  $\hat{\sigma}$  к горизонтальному  $\sigma_h$  и вертикальному  $\sigma_v$  напряжениям, действующим в однородном полупространстве.

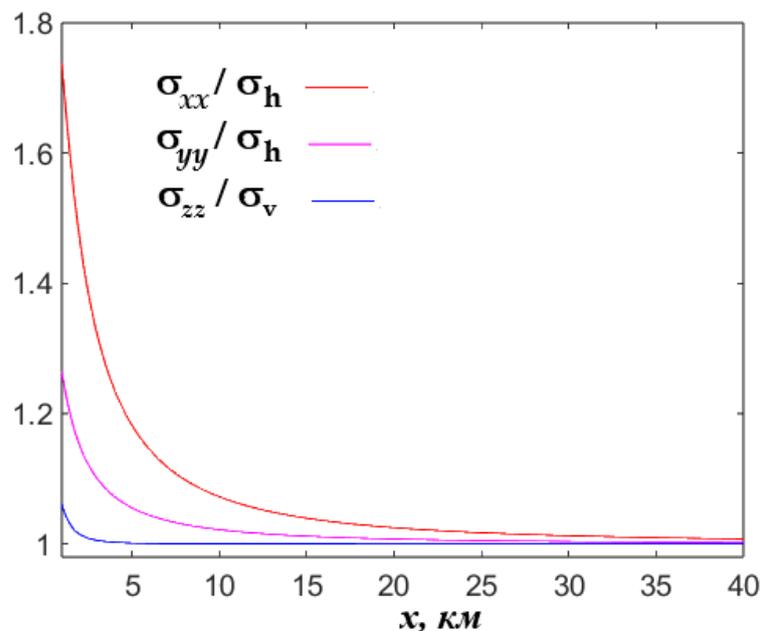


Рис. 3. Отличие нормальных напряжений в среде с неоднородностью рельефа от напряжений в однородном полупространстве ( $z = 1 \text{ км}$ )

В рамках рассмотренной модели неоднородность рельефа оказывает значимое влияние (рис. 3): на вертикальную компоненту  $\sigma_{zz}$  на первых километрах удаления от неоднородности, на горизонтальные компоненты  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$  – на первых десятках километров.

На рис. 4 построена зависимость от  $x$  отношения горизонтальных компонент  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$  тензора напряжений  $\hat{\sigma}$  для разных глубин  $z$ . В рассматриваемой модели это отношение будет равно величине  $k_s$ , называемой коэффициентом анизотропии горизонтальных напряжений, т.е. отношению максимального к минимальному горизонтальным напряжениям.

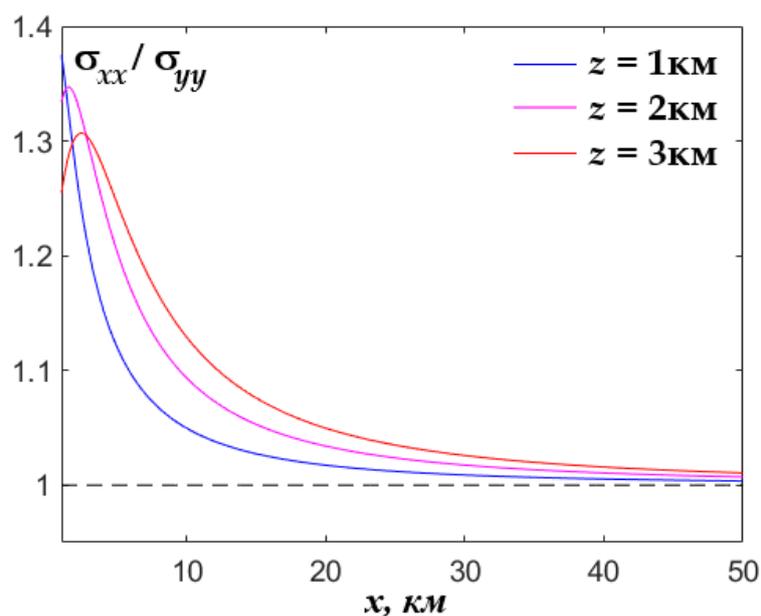


Рис. 4. Отношение горизонтальных напряжений при удалении от неоднородности рельефа

Как следует из рис. 4 отношение горизонтальных напряжений  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$  существенно зависит как от удаления от неоднородности рельефа, так и от глубины измерения напряжений. Это необходимо учитывать при моделировании НДС породы в окрестности разбуриваемой скважины. При значительной удаленности от неоднородности рельефа (в модели – более 40 км) напряжения  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  приближенно равны напряжениям однородного полупространства.

При моделировании разрушения горных пород в окрестности скважин проводится оценка значений главных напряжений для использования их в феноменологических критериях прочности. При ограниченности исходной информации в качестве оценки  $s_1, s_2, s_3$  ( $s_1 \geq s_2 \geq s_3$ ) главных напряжений, используют вертикальное  $\sigma_v$  и горизонтальные  $\sigma_h, \sigma_H$  напряжения, где  $\sigma_H = k_s \sigma_h$ . Вертикальное напряжение рассчитывают через среднюю плотность

вышележащих пород для данной глубины. Для напряжения  $\sigma_h$  необходимо дополнительно знать величину коэффициента Пуассона породы, для  $\sigma_H$  – коэффициент  $k_s$ .

На рис. 5 показано сравнение оценки главных напряжений по значениям  $s_1, s_2, s_3$  ( $s_1 \geq s_2 \geq s_3$ ), определяемых вертикальным  $\sigma_v$  и горизонтальными  $\sigma_h, \sigma_H$  напряжениям с истинными главными напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , определяемыми по формуле (10). В расчетах коэффициент  $k_s$  считается постоянным ( $k_s = 1.1$ ), как часто полагают при моделировании НДС горных пород.

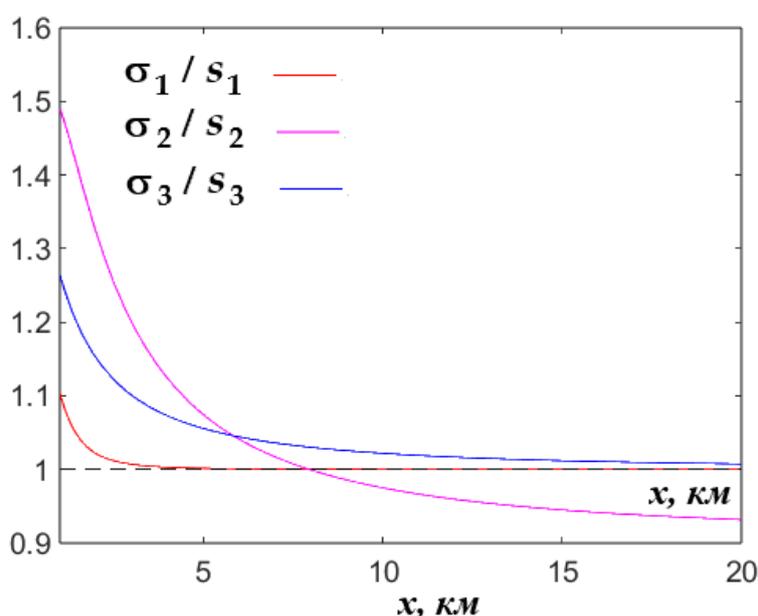


Рис. 5. Отношение главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  к напряжениям  $s_1, s_2, s_3$  при удалении от неоднородности рельефа ( $z = 1$  км)

Как видно из рис. 5 оценка главных напряжений через  $\sigma_v, \sigma_h$  и  $\sigma_H$  (с постоянным  $k_s$ ) в геологических средах с неоднородностью рельефа может привести к значимым искажениям величин главных напряжений и как следствие неверные оценки в критериях прочности горных пород.

На рис. 6. показано сравнение оценки главных напряжений по значениям  $s_1, s_2, s_3$  ( $s_1 \geq s_2 \geq s_3$ ), определяемым в предположении отсутствия касательных напряжений (напряжения  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$  здесь считаются известными по результатам измерений) с истинными главными напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , определяемыми по формуле (10).

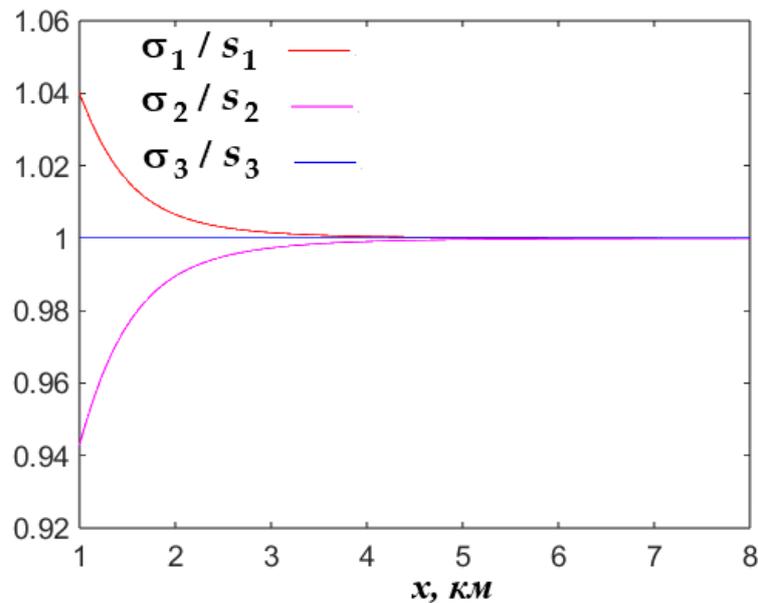


Рис. 6. Отношение главных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  к напряжениям  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$  при удалении от неоднородности рельефа ( $z = 1$  км)

Как видно из рис. 6 оценка главных напряжений только через нормальные напряжения  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  без учета касательного напряжения  $\sigma_{xz}$  может привести к искажению значений максимального  $\sigma_1$  и промежуточного  $\sigma_2$  главных напряжений, что необходимо учитывать при выполнении оценки прочности горных пород.

### Выводы

Упрощенные схемы оценки значений напряжений, действующих в горных породах, без учета особенностей рельефа геологического разреза могут приводить к значимым искажениям результата.

Неоднородности рельефа приводят к анизотропии горизонтальных напряжений, действующих в горных породах. Коэффициент анизотропии горизонтальных напряжений в этом случае зависит как глубины измерений, так и от удаления от неоднородности рельефа.

При выполнении моделирования НДС горных пород при оценке главных напряжений в горных породах необходимо учитывать влияние неоднородностей рельефа рассматриваемого разреза.

### Литература

1. Adel Al-Ajmi Wellbore stability analysis based on a new true-triaxial failure criterion. TRITA-LWR PHD 1026, 2006. 138 p.
2. Zoback M.D. Reservoir geomechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. 490 p.

3. Fjaer E., Holt R.M., Horsrud P., Raaen A.M., Risnes R. Petroleum related rock mechanics. Amsterdam, Oxford: Elsevier, 2008. 491 p.
4. Aadnoy B.S., R. Looyeh. Petroleum rock mechanics: Drilling operations and well design. – Amsterdam, Oxford: Elsevier, 2011. 350 p.
5. Astrand G.J. Borehole stability: Comparing the deviation sensibility of different failure criteria. Trondheim: Norwegian University of Science and Technology, 2015. 113 p.
6. Московский И.Г. К вопросу о математическом моделировании напряженно-деформированного состояния горных пород в оценке устойчивости стенок скважины // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017. № 3. URL: [mathmod.esrae.ru/15-46](http://mathmod.esrae.ru/15-46).
7. Дашко Р.Э. Механика горных пород. М.: Недра, 1987. 264 с.
8. Крупенников Г.А., Филатов Н.А., Амусин Б.З., Барковский В.М. Распределение напряжений в породных массивах. М.: Недра, 1972. 143 с.
9. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В. Теория упругости и пластичности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 416 с.