

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: [mathmod.esrae.ru/55-227](http://mathmod.esrae.ru/55-227)

Ссылка для цитирования этой статьи:

Купцов П.В., Купцова А.В. Поиск и анализ режимов динамики в многомерном пространстве параметров нелинейной системы с применением метода главных компонент // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2026. №1

УДК 517.957:519.237.5

DOI:10.24412/2541-9269-2026-1-8-17

## ПОИСК И АНАЛИЗ РЕЖИМОВ ДИНАМИКИ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТ

Купцов П.В.<sup>1</sup>, Купцова А.В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,  
Россия, Саратовский национальный исследовательский государственный  
университет имени Н.Г. Чернышевского, Россия. [kupav@mail.ru](mailto:kupav@mail.ru)

<sup>2</sup>Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,  
Россия. [av.kuptsova@yandex.ru](mailto:av.kuptsova@yandex.ru)

## SEARCH AND ANALYSIS OF DYNAMIC REGIMES IN THE MULTIDIMENSIONAL PARAMETER SPACE OF A NONLINEAR SYSTEM USING THE PRINCIPAL COMPONENT METHOD

Kuptsov P.V.<sup>1</sup>, Kuptsova A.V.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia,  
Saratov State University, Saratov, Russia, [kupav@mail.ru](mailto:kupav@mail.ru)

<sup>2</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov,  
Russia, Saratov, [av.kuptsova@yandex.ru](mailto:av.kuptsova@yandex.ru)

**Аннотация.** Предложен подход к анализу многопараметрических нелинейных динамических систем, основанный на поиске двумерных подпространств параметров. После определения критерия искомого поведения проводится выборочное моделирование системы. К данным, удовлетворяющим критерию, применяется PCA для выделения главных компонент и проекции на плоскость. Результат этого — конструктивное определение аффинного преобразования, задающего в исходном пространстве параметров плоскость, где динамика статистически чаще обладает требуемыми свойствами. Метод позволяет свести многопараметрическую задачу к наглядному двухпараметрическому анализу.

Ключевые слова: двухпараметрический анализ нелинейной динамики, карта режимов, карта показателей Ляпунова, метод главных компонент.

**Abstract.** This paper proposes an approach for analyzing multiparameter nonlinear dynamic systems, based on identifying two-dimensional parameter subspaces. After defining a criterion for the desired behavior, sampling and numerical simulation of the system are performed. Principal Component Analysis (PCA) is applied to the data meeting this criterion to extract principal components and project them onto a plane. The key result is the constructive definition of an affine transformation. This transformation specifies a plane within the original parameter space where the system's dynamics predominantly exhibit the required properties. Thus, the method allows for reducing a complex multiparameter problem to an illustrative two-parameter analysis.

Keywords: two-parameter analysis of nonlinear dynamics, regime chart, Lyapunov exponents chart, principal component analysis.

## 1. Введение

Динамика нелинейных систем исследуется обычно численно, так как аналитические методы в общем случае позволяют выполнить исследование только в линейном и слабо нелинейном приближениях. Численный анализ в значительной степени опирается на создание визуальных представлений: однопараметрических и двухпараметрических. Однопараметрический анализ сводится к построению графиков зависимостей некоторых величин, например, периодов колебаний или показателей Ляпунова, в зависимости от одного из параметров. Такие диаграммы называют бифуркационными. При двухпараметрическом анализе те же величины отображаются разными цветами на плоскости двух параметров. Такие диаграммы называют картами режимов, картами показателей Ляпунова и т. п. При кажущейся простоте, это очень продуктивные инструменты анализа нелинейной динамики при помощи которых выявлены различные фундаментальные динамические феномены и сценарии [1,2].

Дальнейшее развитие этой идеи невозможно по очевидной причине: наглядно можно изобразить только одномерные и двумерные структуры. Третий параметр можно включить в рассмотрение, строя серию двумерных карт при различных его значениях и анализирую их трансформации. Задействовать разумным образом четвёртый и другие параметры не представляется возможным и при их наличии для них обычно выбирают фиксированные значения, которые не меняются в ходе исследования. Однако такой подход не гарантирует, что выполненный анализ будет исчерпывающим. Сохраняется возможность наличия неизвестных ранее феноменов и сценариев динамики в неисследованных областях многомерного пространства параметров.

Цель настоящей работы — предложить подход к анализу динамики нелинейных систем с большим числом управляющих параметров когда изначально не ясно, какие параметры можно зафиксировать, чтобы перейти к двухпараметрическому анализу.

## 2. Общее описание метода

Общая идея состоит в следующем: выберем числовой критерий  $A$ , который некоторым образом характеризует сложность динамики и вычисляется достаточно быстро. Затем будем случайным образом задавать вектор параметров

$h$  (подразумевается, что элементами вектора  $h$  являются все имеющиеся параметры рассматриваемой системы), вычислять решение системы и находить значение характеристической величины. Возможно, что выбранный набор параметров будет отвечать убеганию решения на бесконечность. В этом случае выбранный вектор  $h$  отбрасывается и берётся другой. Накопив достаточно большой набор пар  $(h, A)$  выберем из него подмножество векторов  $h$ , которым отвечают интересующие нас значения  $A$ . Обозначим это подмножество как  $S$ .

На следующем этапе мы используем метод главных компонент (Principal Component Analysis, PCA). Напомним, что этот метод состоит в поиске аффинного преобразования (центрирование с последующим ортогональным преобразованием), предназначенного для понижения размерности исходных данных. Преобразование строится таким образом, что новые ортогональные оси (главные компоненты) последовательно указывают направления максимальной выборочной дисперсии в исходном пространстве: первая компонента соответствует наиболее протяжённому направлению разброса данных, вторая — следующему по протяжённости направлению, ортогональному первому, и так далее. Отбрасывая компоненты с наименьшей дисперсией, можно получить оптимальную (в смысле среднеквадратичной ошибки) низкоразмерную линейную проекцию данных [3].

Применяя к множеству  $S$  метод главных компонент, мы оставим только две компоненты, которые обозначим как  $p = (p_1, p_2)$ . Результатом будет операция проецирования облака точек многомерного пространства параметров на плоскость, вдоль которой оно имеет наибольшую протяжённость. Нас будет интересовать обратное преобразование:

$$h = Wp + b, \quad (1)$$

где  $W$  и  $b$  прямоугольная матрица и вектор, вычисляемые в рамках применения PCA.

Преобразование (1) задаёт плоскость в пространстве параметров, выбранную таким образом, чтобы динамика системы преимущественно имела на ней заданные свойства. Далее можно строить двухпараметрический анализ динамики системы, строя различные карты поведения на этой плоскости.

Имеет смысл рассматривать различные подмножества  $S$  и проводить анализ различных свойств исследуемой системы.

### 3. Выбор характеристической величины

Один из лучших кандидатов для использования в качестве характеристической величины  $A$  — старший показатель Ляпунова [1]. Однако его вычисление требует достаточно длительных вычислений.

Мы будем рассматривать порядок неустойчивости состояния равновесия  $I$ . Для вычисления этой величины, сначала найдём матрицу Якоби для состояния равновесия исследуемой системы и построим характеристический полином. Порядком неустойчивости  $I$  мы будем называть количество собственных

чисел характеристического полинома с положительными вещественными частями.

Вообще говоря, непосредственный смысл имеет переход от значения  $I = 0$  к  $I > 0$ , так как это отвечает ситуации потери равновесием устойчивости. Например, переход от  $I = 0$  к  $I = 2$  происходит в точке бифуркации Андронова-Хопфа, когда от состояния равновесия отделяется предельный цикл и в системе возникают автоколебания. Дальнейшее увеличение порядка неустойчивости, вообще говоря, не гарантирует изменение характера динамики. Тем не менее чем больше величина  $I$ , тем дальнейшей мы находимся от точки потери устойчивости вдоль некоторого направления в пространстве параметров. И в некоторых случаях это может, хотя и необязательно, сопровождаться усложнением динамики.

Вычисление  $I$  не связано с поиском численного решения системы и выполняется с использованием быстрого и стабильного алгоритма Дженкинса-Трауба для вычисления корней полинома [4].

#### 4. Пример исследования динамической системы

В качестве примера мы рассмотрим систему, предложенную в работах [5,6] как динамическая модель процесса шлифования:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \delta_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + q_1(1 - \mu_1 x_1^2)(\dot{x}_2 + \dot{x}_4) &= 0, \\ \ddot{x}_2 + \delta_2 \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + q_2(1 - \mu_2 x_2^2)(x_1 + x_3) &= 0, \\ \ddot{x}_3 + \delta_3 \dot{x}_3 + \omega_3^2 x_3 + q_3(1 - \mu_3 x_3^2)(\dot{x}_2 + \dot{x}_4) &= 0, \\ \ddot{x}_4 + \delta_4 \dot{x}_4 + \omega_4^2 x_4 + q_4(1 - \mu_4 x_4^2)(x_1 + x_3) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Эта система имеет единственное состояние равновесия в нуле. В работах [5,6] исследованы условия устойчивости равновесия и выполнен анализ в приближении слабой нелинейности. Однако суммарно система имеет 16 параметров и восьмимерное фазовое пространство и вопрос о выявлении полной картины динамики этой системы пока остаётся открытым.

Соберём параметры системы (2) в виде вектора  $h$ :

$$h = (\delta_1, \dots, \delta_4, \omega_1, \dots, \omega_4, q_1, \dots, q_4, \mu_1, \dots, \mu_4). \quad (3)$$

Будем семплировать вектора  $h$  из нормального распределения со средним  $h = 0$  и  $\sigma = 3$ . Такое достаточно большое стандартное отклонение мы задаём, чтобы охватить по возможности большее количество разных режимов в пространстве параметров. Для каждого  $h$  найдём траекторию системы, решая уравнения (2) численно, и отбросим такие  $h$ , при которых траектория убегает на бесконечность. Если убегания нет, то вычислим соответствующее значение порядка неустойчивости  $I$ . Характеристический полином состояния равновесия системы (2) имеет порядок 8 и, соответственно, имеет 8 корней (напомним, что они могут образовывать комплексно сопряжённые пары). Поэтому порядок неустойчивости теоретически может принимать значения от 0 до 8. Однако так как система (2) диссипативная, фактическое максимальное значение порядка

неустойчивости равно 6. Действуя таким образом, сформируем исходный набор данных из  $10^6$  пар  $(h, I)$ . Далее будем выделять из исходного набора различные подмножества  $S$  и строить при помощи PCA различные преобразования вида (1).

Найдём плоскость в пространстве параметров, на которой состояние равновесия устойчиво (найденная таким образом плоскость не будет единственной и сгенерировав новый набора пар  $(h, I)$  мы получим другую плоскость). Для этого выберем подмножество векторов  $h$ , для которых  $I = 0$ , и получим преобразование вида (1), см. в приложении формулу (4). Отметим, что вычисленные значения матрицы  $W$  и вектора  $b$  мы предварительно округляем до 6 знаков после запятой, а затем используем в вычислениях. Поэтому в формуле (4) приведены точные значения.

На рис. 1 построена плоскость параметров  $(p_1, p_2)$ , на которой цвета показывают значения порядка неустойчивости, а белые точки отвечают убеганию траектории на бесконечность. Видим, что используя предложенный подход, мы может найти достаточно обширную область в пространстве параметров, в которой система устойчива.

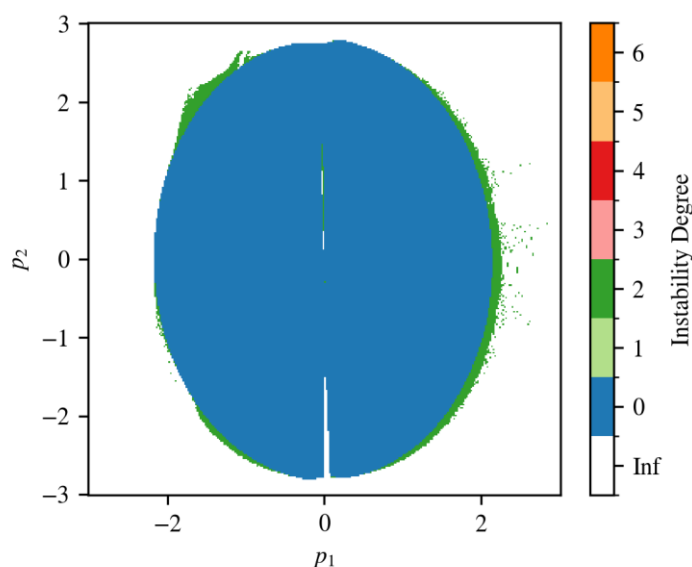


Рис. 1 — Область устойчивости системы (2), построенная с использованием преобразования (4).

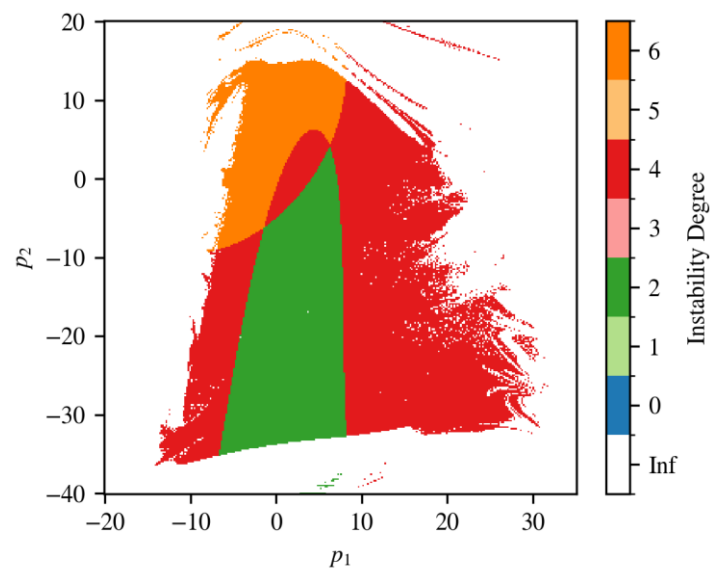


Рис. 2 — Области с высоким порядком неустойчивости. Параметры системы вычислялись по формуле (5).

Обратимся теперь к случаю сложной динамики. Для этого будем рассматривать точки в пространстве параметров, в которых порядок неустойчивости равновесия принимает максимальное значение  $I = 6$ . При первоначальном формировании набора данных такие точки появляются чрезвычайно редко — порядка 10 на  $10^6$  точек. Поэтому, чтобы найти интересующую нас область, выберем из исходного набора данных одну точку с индексом 6 и зададим её как  $h$  в новом поиске. Будем семплировать случайные вектора параметров со стандартным отклонением  $\sigma = 0$  чтобы получить достаточно плотное облако точек в окрестности интересующей нас точки. Получив таким образом множество из  $10^6$  точек, исключая те, в которых систему убегает на бесконечность, применим ко всему этому множеству РСА и получим преобразование вида (1), см. в приложении формулу (5).

На рис. 2 показана полученная таким образом плоскость параметров системы (2), на которой цвета показывают значения порядка неустойчивости  $I$ . Видно, что хотя изначальный набор точек отбирался в окрестности точки с  $I = 6$ , на полученной плоскости есть области с разными значениям  $I$ .

Как уже обсуждалось выше, порядок неустойчивости необязательно означает наличие сложной динамики. Чтобы проанализировать характер поведения, построим карту показателей Ляпунова. Напомним, что показатели Ляпунова вычисляются для аттрактора динамической системы, их количество равно размерности фазового пространства и они по определению упорядочены в порядке убывания [1]. Расположение показателей относительно нуля позволяет идентифицировать тип динамического режима, см. табл. 1.

Табл. 1 — Структура спектра показателей Ляпунова и соответствующие режимы динамики. Показаны знаки первых четырёх старших показателей. Предполагается, что остальные показатели отрицательные.

-, -, -, -	EP	Равновесие
0, -, -, -	P	Периодичность
0, 0, -, -	T2	Двухчастотный тор (квазипериодика)
0, 0, 0, -	T3	Трёхчастотный тор
+, 0, -, -	Ch	Хаос

На рис. 3 показана плоскость показателей Ляпунова для параметров, задаваемых формулой (5). Видны области периодичности, квазипериодичности, узкие области двумерных торов и хаоса.

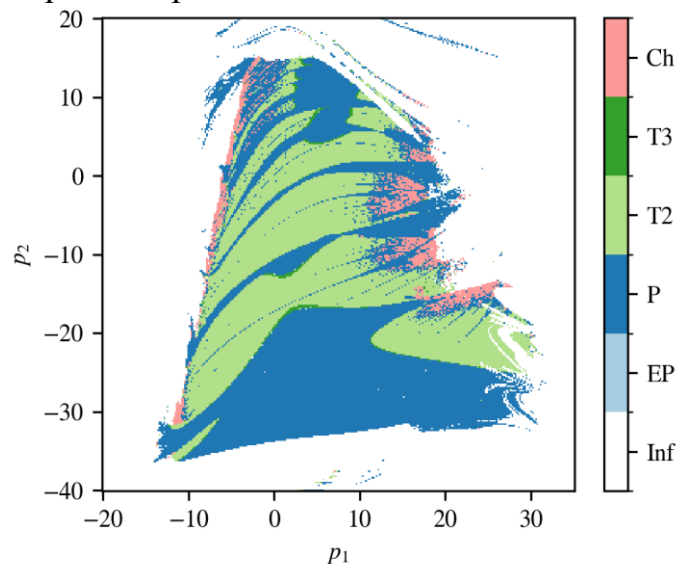


Рис. 3 — Плоскость показателей Ляпунова.

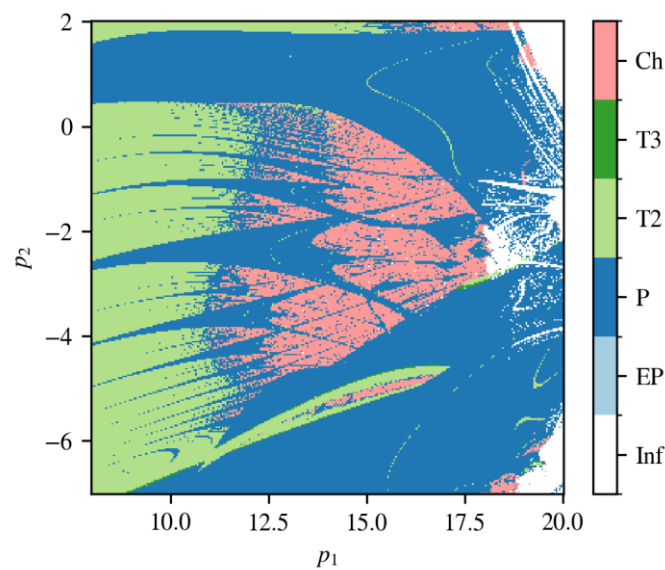


Рис. 4 — Увеличенная центральная область плоскости показателей Ляпунова.

На рис. 4 показана увеличенная центральная область плоскости показателей Ляпунова. Клиновидные горизонтальные области периодичности погружены в области двухчастотной квазипериодичности. Такие образования называют языками Арнольда. Справа языки ограничены областями хаоса. Такая структура пространства параметров типична для диссипативных колебательных систем [1].

Примеры фазовых портретов системы (2) показаны на рис. 5а,б,в. Здесь показаны примеры аттракторов: предельный цикл, двухчастотный тор и хаотический аттрактор, соответственно. Отметим, что вид хаотического аттрактора на рис. 5в напоминает тор на рис. 5б. Это связано с тем, что переход к хаосу в данном случае происходит через разрушение квазипериодичности [1].

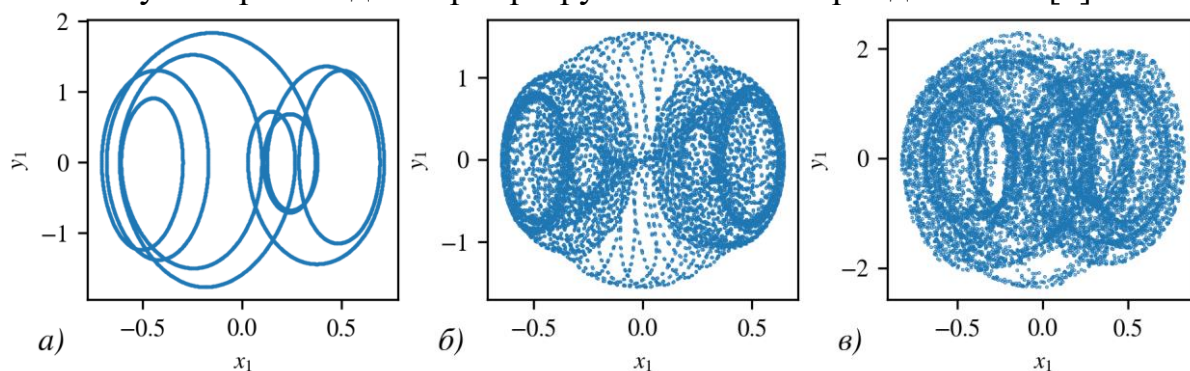


Рис. 5 — Проекция фазового портрета системы на плоскость переменных  $(x_1, y_1)$ . а — периодичность (предельный цикл), б — квазипериодичность (двухчастотный тор), в — хаотический аттрактор.

### Заключение

В настоящей работе предложен и апробирован подход к анализу динамики многопараметрических нелинейных систем, основанный на автоматизиро-

ванном поиске двумерных подпространств (плоскостей) в пространстве параметров, на которых система преимущественно демонстрирует целевой тип динамики. Метод заключается в статистической выборке параметров, численном моделировании и фильтрации результатов по заданному критерию, характеризующему интересующее поведение. Применение метода главных компонент (РСА) к отобранному подмножеству позволяет выделить главную плоскость вариаций и задать аффинное преобразование, проецирующее исходное многомерное пространство параметров на эту плоскость. Динамика системы затем исследуется на построенной плоскости с помощью стандартных методов двухпараметрического анализа, таких как построение карт показателей Ляпунова. Эффективность подхода продемонстрирована на примере нелинейной модели процесса шлифования: в результате были идентифицированы плоскость параметров устойчивого равновесия, а также плоскость со сложной динамикой, содержащая области периодических, квазипериодических и хаотических режимов.

### Приложение

Преобразование параметров, используемое для поиска области устойчивости системы (2).

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.252700 \times 10^{-2} & -9.070960 \times 10^{-1} \\ -8.896000 \times 10^{-3} & 9.232990 \times 10^{-1} \\ 1.176400 \times 10^{-2} & -9.369850 \times 10^{-1} \\ -4.489500 \times 10^{-2} & 9.118730 \times 10^{-1} \\ 4.356400 \times 10^{-2} & 3.150900 \times 10^{-2} \\ -3.867900 \times 10^{-2} & -5.829000 \times 10^{-3} \\ 4.980000 \times 10^{-3} & -2.142900 \times 10^{-2} \\ 3.665800 \times 10^{-2} & -1.287700 \times 10^{-2} \\ 1.362090 & 7.703700 \times 10^{-2} \\ -1.369458 & 5.268600 \times 10^{-2} \\ 1.345866 & -1.396200 \times 10^{-2} \\ -1.357816 & -1.181740 \times 10^{-1} \\ 4.050000 \times 10^{-2} & 3.430000 \times 10^{-4} \\ 3.206100 \times 10^{-2} & 8.996800 \times 10^{-2} \\ 4.730000 \times 10^{-4} & -2.083400 \times 10^{-2} \\ 2.343200 \times 10^{-2} & -1.422190 \times 10^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.590715 \\ 2.588417 \\ 2.587747 \\ 2.587724 \\ -3.334000 \times 10^{-3} \\ -1.239000 \times 10^{-3} \\ -4.247000 \times 10^{-3} \\ -3.142000 \times 10^{-3} \\ 4.928000 \times 10^{-3} \\ -1.336000 \times 10^{-3} \\ -1.738000 \times 10^{-3} \\ 1.011000 \times 10^{-3} \\ 8.720000 \times 10^{-4} \\ -2.827000 \times 10^{-3} \\ 3.979000 \times 10^{-3} \\ 1.004000 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Преобразование параметров, используемое для поиска сложных режимов динамики.

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.503500 \times 10^{-2} & -9.873000 \times 10^{-3} \\ 7.623600 \times 10^{-2} & -8.688000 \times 10^{-3} \\ 1.200000 \times 10^{-4} & 4.277000 \times 10^{-3} \\ -7.203000 \times 10^{-3} & 1.715600 \times 10^{-2} \\ 1.703100 \times 10^{-2} & -7.066000 \times 10^{-2} \\ -4.038300 \times 10^{-2} & -4.344000 \times 10^{-2} \\ -1.786700 \times 10^{-2} & -3.613000 \times 10^{-2} \\ 1.465800 \times 10^{-2} & -3.093800 \times 10^{-2} \\ -1.033300 \times 10^{-2} & 9.280000 \times 10^{-4} \\ 1.659900 \times 10^{-2} & -6.190000 \times 10^{-4} \\ -8.142000 \times 10^{-3} & 8.261000 \times 10^{-3} \\ 2.745000 \times 10^{-3} & -3.960000 \times 10^{-3} \\ -1.505000 \times 10^{-3} & 5.995000 \times 10^{-3} \\ 2.440000 \times 10^{-4} & -7.105000 \times 10^{-3} \\ 3.977000 \times 10^{-3} & 1.992000 \times 10^{-3} \\ -6.569000 \times 10^{-3} & 9.612000 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9.397110 \times 10^{-1} \\ 9.722150 \times 10^{-1} \\ 1.386433 \\ 7.166290 \times 10^{-1} \\ 2.647617 \\ 4.920628 \\ 1.112257 \\ 6.086610 \times 10^{-1} \\ -7.282631 \\ 3.353962 \\ 3.294367 \\ 4.673850 \\ 2.162576 \\ 5.164230 \times 10^{-1} \\ 1.900493 \\ 5.387040 \times 10^{-1} \end{pmatrix} \quad (5)$$

### Литература

1. Кузнецов С. П. Динамический хаос. 2-е изд. Москва: Изд-во Физматлит, 2006. 356 с.
2. Кузнецов А. П. и др. Физика квазипериодических колебаний. Саратов: Издательский центр «Наука», 2013. 252 с.
3. Golub G. H., van Loan C. F. Matrix computations. 3-е изд. Baltimore, MD: The Johns Hopkins University Press, 1996. 694 с.
4. Jenkins M. A., Traub J. F. A three-stage algorithm for real polynomials using quadratic iteration // SIAM J. Numer. Anal. 1970. Т. 7, № 4. С. 545–566.
5. Бржозовский Б. М. и др. Стабилизация динамического состояния станка как основа решения задач повышения точности механической обработки деталей // Вестник СГТУ. 2006. Т. 3, № 1. С. 61–70.
6. Бржозовский Б. М. и др. Динамический мониторинг технологического оборудования : монография. Саратов: Изд-во Саратовского гос. техн. ун-та., 2008. 312 с.