

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: [mathmod.esrae.ru/56-234](http://mathmod.esrae.ru/56-234)

Ссылка для цитирования этой статьи:

Ануфриева А.А. Разработка системы управления квадрокоптером с трехзвенным манипулятором // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2026. №2

УДК 629.7.05

DOI:10.24412/2541-9269-2026-2-18-23

## РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ КВАДРОКОПТЕРОМ С ТРЕХЗВЕННЫМ МАНИПУЛЯТОРОМ

Ануфриева А.А.

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, [alenaqvindt@gmail.com](mailto:alenaqvindt@gmail.com)

## DEVELOPMENT OF A QUADCOPTER CONTROL SYSTEM WITH A THREE-LINK ARM

Anufrieva A.A.

Saratov State Technical University named after Yuri Gagarin, Saratov, Russia, [alenaqvindt@gmail.com](mailto:alenaqvindt@gmail.com)

**Аннотация.** В статье представлены результаты разработки системы управления квадрокоптером, оснащенный трехзвенным манипулятором, приведена математическая модель системы, учитывающая взаимное динамическое влияние подсистем, синтезирован каскадный закон управления на основе ПД-регуляторов с компенсацией реактивных моментов от манипулятора. Моделирование в системе Engage подтвердило работоспособность системы: погрешность углов ориентации не превышает  $12^\circ$ , время стабилизации – 4,8 сек., отклонение по высоте – менее 0,2 м.

Ключевые слова: квадрокоптер, манипулятор, система управления, математическая модель, моделирование, Engage.

**Abstract.** The article presents the results of the development of a control system for a quadcopter equipped with a three-link manipulator, provides a mathematical model of the system that takes into account the mutual dynamic influence of subsystems, and synthesizes a cascade control law based on PD controllers with compensation for reactive moments from the manipulator. The simulation in the Engage system confirmed the operability of the system: the error of the orientation angles does not exceed  $12^\circ$ , the stabilization time is 4.8 seconds, and the height deviation is less than 0.2 m.

Keywords: quadcopter, manipulator, control system, mathematical model, modeling, Engee.

Беспилотные летательные аппараты (БПЛА) с манипуляторами представляют собой перспективное направление в робототехнике, позволяющее выполнять задачи в труднодоступных условиях: инспекция конструкций, доставка грузов, монтажные работы. Основная сложность заключается в обеспечении устойчивости полета при изменении центра масс и возникновении реактивных моментов от движений манипулятора [1, 2].

Динамика квадрокоптера описывается нелинейными уравнениями, полученными на основе законов Ньютона и уравнений Эйлера – Лагранжа [1, 3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = (\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi) \frac{v_1}{m}, \\ \dot{y} = (-\cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\sin\theta\cos\varphi) \frac{v_1}{m}, \\ \dot{z} = -g + (\cos\theta\cos\varphi) \frac{v_1}{m}, \\ \ddot{\varphi} = \frac{I_y - I_z}{I_x} \dot{\theta}\dot{\psi} - \frac{U_2}{I_x}, \\ \ddot{\theta} = \frac{I_z - I_x}{I_y} \dot{\varphi}\dot{\psi} - \frac{U_3}{I_y}, \\ \ddot{\psi} = \frac{I_x - I_y}{I_z} \dot{\varphi}\dot{\theta} - \frac{U_4}{I_z}. \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $x, y, z$  – координаты центра масс;

$\varphi, \theta, \psi$  – углы Эйлера;

$U_1, U_2, U_3, U_4$  – управляющие воздействия;

$\ddot{\varphi}, \ddot{\theta}, \ddot{\psi}$  – угловые ускорения, возникающие в том числе под действием реактивных моментов от манипулятора.

Манипулятор моделируется как система трех жестких звеньев с вращательными сочленениями [4]. Динамика описывается в форме уравнений Эйлера – Лагранжа [5]:

$$A(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + K(q) = Q \quad (2)$$

где  $A(q)$  – матрица инерций;

$C(q, \dot{q})$  – матрица кориолисовых и центробежных сил;

$K(q)$  – вектор гравитационных сил;

$Q$  – вектор управляющих моментов.

Учет взаимного влияния подсистем включает изменение общего тензора инерции, смещение центра масс и реактивные моменты, передаваемые на платформу квадрокоптера при движении звеньев манипулятора.

Для управления комбинированной системой применен каскадный подход с разделением на контуры:

1. Внешний контур реализует управление высотой:

$$U_1 = \frac{m_0}{\cos\varphi\cos\theta} (\dot{z}^* + K_{p,z}e_z + K_{d,z}\dot{e}_z + g) \quad (3)$$

2. Средний контур отвечает за управление ориентацией с компенсацией моментов от манипулятора:

$$U_2 = I_{xx} \left( \ddot{\varphi}^* + K_{p,\varphi}e_\varphi + K_{d,\varphi}\dot{e}_\varphi + \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{xx}}\dot{\theta}\dot{\psi} \right) + \tau_r \quad (4)$$

3. Внутренний контур обеспечивает управление манипулятором с использованием линеаризации обратной связью:

$$\tau = M(q)a_q + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) \quad (5)$$

где  $a_q = \ddot{q}^* + K_p(q - q^*) + K_d(\dot{q} - \dot{q}^*)$ .

Моделирование выполнено в среде Engage с использованием языка Julia [6]. Параметры системы:

- Масса квадрокоптера: 8 кг;
- Масса полезной нагрузки: 5,5 кг;
- Длины звеньев: 0.4, 0.3, 0.2 м.

Результаты моделирования представлены на графиках (рис. 1 – 5).

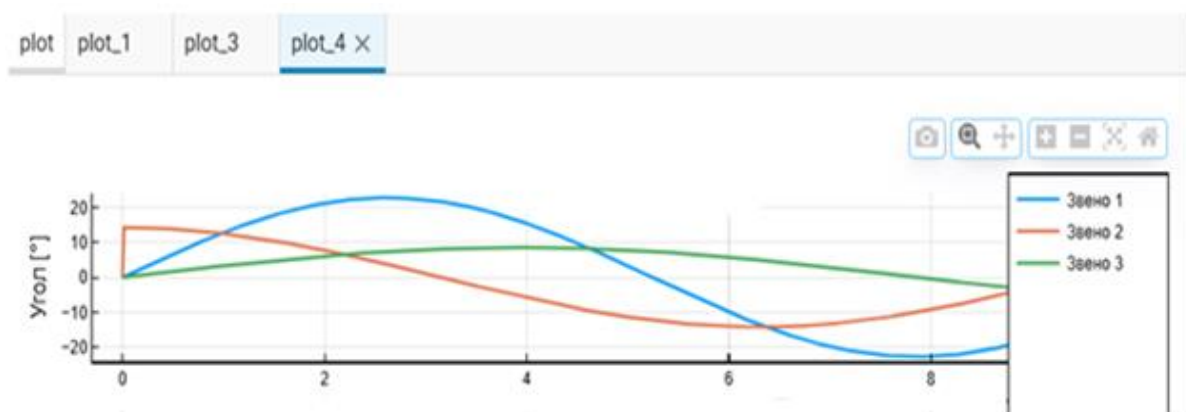


Рис. 1

Рис.1 – изменение углов трех звеньев манипулятора в зависимости от времени. Выбрано оптимальное время проектирования 10сек. Каждый

подграфик соответствует одному из звеньев манипулятора: «Звено 1», «Звено 2», «Звено 3».

График представлен для визуализации динамики движения манипулятора, для анализа точности, плавности траектории или корректировки управления.

Рис. 2 – сравнение заданных и фактических углов рысканья объекта – угол поворота корпуса квадрокоптера в горизонтальной плоскости.

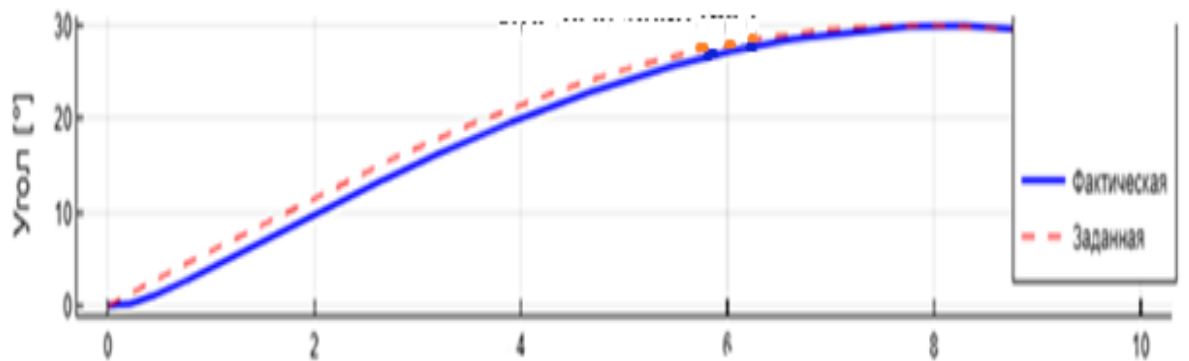


Рис. 2

График позволяет оценить, насколько точно система следует заданной траектории. Расхождение между линиями могут указывать на: задержки в системе управления (инерционность механизмов); погрешности датчиков или внешние возмещения.

Рис. 3 - угол тангажа – угол между продольной осью летательного аппарата и горизонтом.

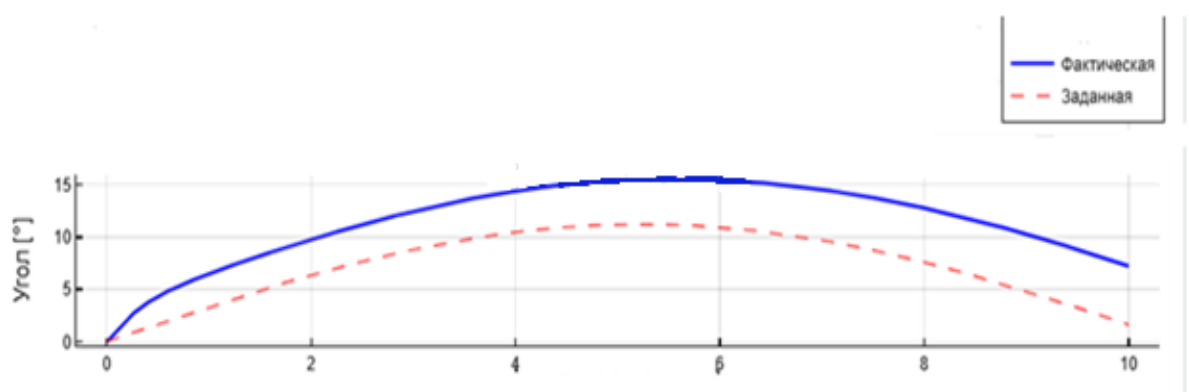


График предназначен для анализа управления углом тангажа в системе управления ЛА.

Рис. 4 - сравнение фактического и заданного угла крена (наклона) объекта.

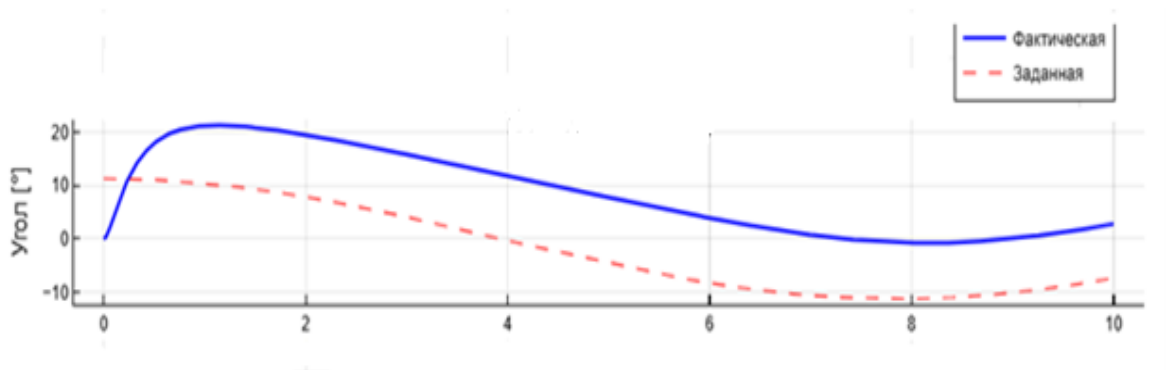


Рис. 4

График предназначен для анализа работы системы стабилизации объекта, поддержание баланса мобильного робота. Сравнение с предыдущими графиками (углы крена и тангажа) позволяет комплексно оценить ориентацию объекта в пространстве.

Рис. 5 - отображение высоту и траекторию квадрокоптера.

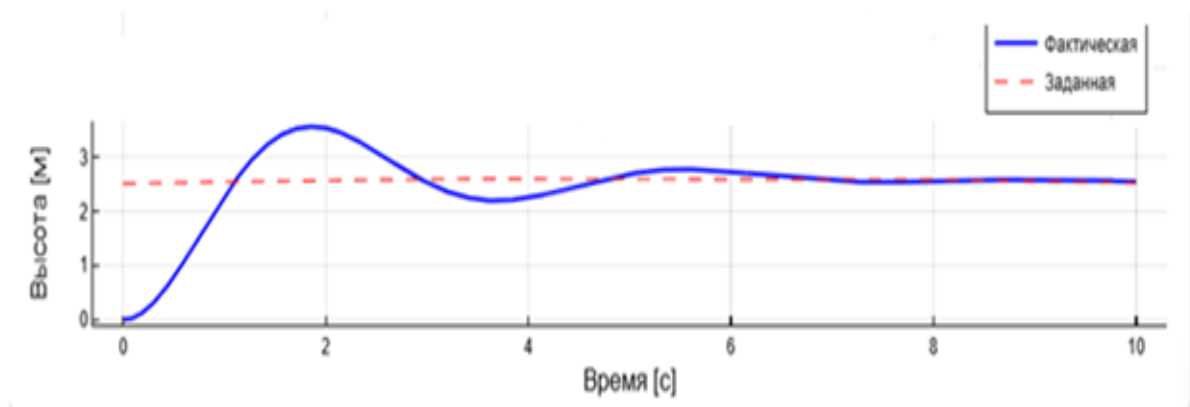


Рис. 5

График демонстрирует динамику изменения высоты объекта, что критически важно для оценки работы систем управления и навигации. По рисунку видно насколько точно аппарат следует заданной траектории по высоте.

Результаты моделирования демонстрируют, что углы манипулятора отслеживают заданную траекторию, а углы ориентации квадрокоптера (рыскание, тангаж, крен) соответствуют заданным с погрешностью до  $12^\circ$ . Высота стабилизируется с отклонением менее 0.2 м, а время выхода на заданный режим — 4.8 с.

### Заключение

Разработанная система управления квадрокоптером с манипулятором обеспечивает требуемую точность и устойчивость. Применение каскадной

структуры с ПД – регуляторами и компенсацией реактивных моментов позволило достичь показателей:

- Погрешность углов ориентации  $\leq 12^\circ$ ,
- Время стабилизации  $\leq 5$  сек.,
- Отклонение по высоте  $\leq 0,3$  м.

Результаты могут быть использованы при проектировании БПЛА для инспекции, доставки и монтажа в автоматическом режиме.

### Литература

1. Маргун А.А. и др. Система управления беспилотным летательным аппаратом, оснащённым робототехническим манипулятором // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2014. №6 (94).
2. Nayak V., Papachristos Ch., Alexis K. Design and Control of an Aerial Manipulator for Contact-based Inspection // arXiv:1804.03756. 2018.
3. Лазарев В.С., Лацев А.А. Разработка математической модели БПЛА на базе квадрокоптера // ИВД. 2018. №2 (49).
4. Андреев А.С., Макаров Д.С. Об управлении движением трёхзвенного манипулятора // Ульяновский государственный университет. 2017.
5. Cartesian impedance control of a UAV with a robotic arm / V. Lippiello, F. Ruggiero // IFAC Proceedings Volumes. 2012. V. 10. N Part 1. P. 704–709.
6. Engee: Российская платформа математических вычислений и динамического моделирования. URL: <https://start.engee.com/>.