РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

***И.Е. Буцыленко*[1], *А.И. Шарнов*[2]**

1) студентка Армавирского механико-технологического института (филиал) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, butsylenko@mail.ru
2) к.т.н., доцент Армавирского механико-технологического института (филиал) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, a.i.sharnov@mail.ru

Аннотация: рассматривается простой методический прием решения плоских задач подземной гидравлики в комплексной плоскости.
Ключевые слова: комплексная, переменная, плоская, подземная, гидравлика, задача

SOLUTION OF PROBLEMS OF PLANE MOTION OF INCOMPRESSIBLE FLUID IN COMPLEX PLANE

***I.E. Butsylenko*[1], *A.I. Sharnov*[2]**

1) the student Armavir Institute of Mechanics and Technology (branch) of Federal State Budgetary Institution of Higher Education “Kuban State Technological University”, city of Armavir, Russia, butsylenko@mail.ru
2) Ph. D., associate Professor, Armavir Institute of Mechanics and Technology (branch) of Federal State Budgetary Institution of Higher Education “Kuban State Technological University”, city of Armavir, Russia, a.i.sharnov@mail.ru

Abstract: Solution of the problems of plane movement of an incompressible liquid in the complex plane
Key words: complex, variable, flat, underground, hydraulics, task

Гидродинамические методы основаны на теории функций комплексного переменного и позволяют определять скорости течения, давления и их градиенты в любой точке. Они дают точные решения, так как не связаны с введением грубых допущений. Недостатком этих методов является их трудоемкость и ограниченность применения частными случаями, для которых решение можно довести до конца [1, 2].

Рассмотрим простой методический прием решение задач плоского движения несжимаемой жидкости в комплексной плоскости.

Для плоского движения несжимаемой жидкости потенциал является функцией двух координат, т. е. $\Phi = \Phi(x, y)$.

Тогда уравнения движения, неразрывности и Лапласа записываются соответственно в виде

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \ v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (3)$$

Найдем уравнение линий тока. Линией тока называется такая линия, касательная к которой в любой точке совпадает с вектором скорости.

Отсюда следует выражение для направляющих косинусов (рис. 1):

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{u}{|\vec{V}|};$$

$$\cos\beta = \frac{dy}{ds} = \frac{v}{|\vec{V}|}.$$

или

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v},$$

откуда следует уравнение линий тока

$$vdx - udy = 0 \quad (4)$$

Здесь ds – элемент линии тока с проекциями dx и dy,

$|\vec{V}|$ – модуль вектора скорости с проекциями u и v; α и β – углы между осями координат и вектором скорости $\vec{V}$.

Для решения уравнения (4) введем функцию тока в виде неявной зависимости

$$\psi\,(x, y) = C. \quad (5)$$

Основное свойство функции тока – это ее постоянство вдоль линии тока. Но с переходом от одной линии тока к другой значение функции тока $\psi\,(x, y)$ меняется (рис. 2).

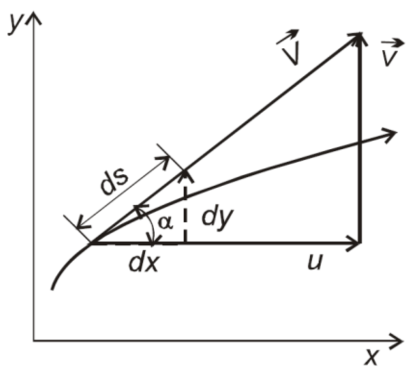

Рисунок 1 – Схема к определению направляющих косинусов вектора скорости

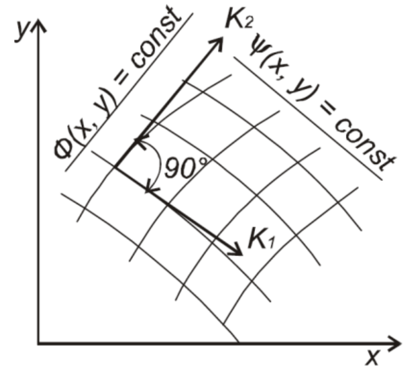

Рисунок 2 – Интерпретация функции комплексного переменного на плоскости: $\Phi\ (x, y)$ = const – семейство эквипотенциалей; $\psi\ (x, y)$ = const – семейство линий тока

Установим связь функции тока с потенциалом скорости фильтрации $\Phi(x, y) = C$.

Поскольку $\psi\ (x, y)$ = const вдоль линии тока, то полный дифференциал ее равен нулю и уравнение линий тока в неявной форме примет вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = 0\,. \tag{6}$$

Сравнивая (6) и (3), получаем

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x};\ u = \frac{\partial \psi}{\partial y}dy\,. \tag{7}$$

Сравнивая (1) и (7), находим

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y};$$

$$v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x};$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned} \tag{8}$$

Полученная система известна как уравнения Коши–Римана.

Покажем, что система уравнений (8) удовлетворяет уравнение Лапласа. Дифференцируя уравнение (8), получаем:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

или

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \qquad (9)$$

Покажем что уравнения Коши–Римана имеют связь с теорией функции комплексного переменного.

Пусть плоскость течения принята за плоскость комплексного переменного $z = x + iy$. По аналогии с этим комплексным переменным составим новую комплексную функцию

$$F(z) = \Phi(x, y) + i\psi(x, y). \qquad (10)$$

Но не всякая комплексная функция, составленная подобным образом, будет функцией комплексного переменного. Наша новая комплексная функция является не просто комплексом, но и функцией комплексного переменного. Чтобы доказать это, обратимся к уравнениям Коши–Римана.

Рассуждаем так: если комплекс (10) является функцией комплексного переменного $z = x + iy$, то производная dz/dF должна иметь одно и то же значение независимо от закона стремления $\Delta z \to 0$.

Продифференцируем уравнение (10) два раза, по x и по y

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{dF}{dZ}\frac{\partial z}{\partial x}; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} + i\frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{dF}{dZ}\frac{\partial z}{\partial y}. \end{aligned} \qquad (11)$$

Комплексную переменную $z = x + iy$ продифференцируем как сложную функцию

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1; \ \frac{\partial z}{\partial y} = i. \qquad (12)$$

Тогда, учитывая (12), из уравнений (11) имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i\frac{\partial \Phi}{\partial y}. \qquad (13)$$

Сравнивая действительные и мнимые части в уравнении (8), получаем уравнения Коши–Римана.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y};$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Таким образом, уравнения Коши–Римана являются необходимым и достаточным условием, считать комплексную функцию (10) функцией комплексного переменного $z = x + iy$. Формально, новая комплексная функция $F(z)$ зависит уже не от двух переменных (x, y), а от одного комплексного переменного z. Если нам известна функция комплексного переменного, то, отделив в ней действительную часть от мнимой, можно трактовать, что действительная часть $\Phi(x, y)$ представляет потенциал некоторого плоского фильтрационного потока. Приравнивая ее к постоянной, получим семейство эквипотенциалей $\Phi(x, y)$ = const; мнимая часть представляет функцию тока, а $\psi(x, y)$ = const представляет семейство линий тока $\Phi(x, y)$ (см. рис. 2).

Функцию комплексного переменного (10) называют характеристической функцией течения или комплексным потенциалом, который сразу дает всю картину движения: семейство эквипотенциалей, семейство линий тока и поле скоростей.

Докажем, что линии тока и эквипотенциали взаимно ортогональны [3]. Так как $\Phi(x, y)$ = const, то полные дифференциалы их равны нулю, т. е.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = 0; \\ &\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Угловые коэффициенты касательных к эквипотенциалям и линиям тока с учетом (14) запишутся соответственно (см. рис. 2)

$$\begin{aligned} &k_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Phi=const} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} / \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \\ &k_2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{\Phi=const} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} / \frac{\partial \psi}{\partial y}. \end{aligned} \tag{15}$$

С учетом уравнений Коши–Римана (8) произведение угловых коэффициентов дает $k_1 k_2 = -1$, т. е. касательные пересекаются под прямым углом.

Список использованных источников:

1. Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Розенберг Г.Д. Нефтегазовая гидромеханика: Учебное пособие для вузов. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.– 544 с.

2. Шеров А.К., Смирнов Ю.М., Аликулов Д.Е. К вопросу повышения качества изготовления гидравлических машин // Современные наукоемкие технологии. 2012. № 5. С. 40-43.

3. Пыхачев Г.Б., Исаев Р.Г. Подземная гидравлика: Учебное пособие.– М.: Недра, 1972. – 360 с.