КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ И ОДНА ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

А. Д. Стриленко [1), Н. В. Гриб [2)

1) магистрант УВО «Белорусский государственный университет», г. Минск, Беларусь, riddik_54@mail.ru
2) к.ф.-м.н., доцент УВО «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка», г. Минск, Беларусь, nikolay.grib@mail.ru

Аннотация: Введено понятие квазидифференциала разности выпуклых функций. На его основе предложено решение одной экстремальной задачи.

Ключевые слова выпуклая функция, субдифференциал, квазидифференциал.

QUASIDIFFERENTIAL OF FUNCTION AND ONE EXTREME PROBLEM

Artem D. Strilenko[1), Nikolay V.Grib [2)

1) undergraduate Belarusian State University, Minsk, Belarus, riddik_54@mail.ru
2) Ph. D., associate Professor, Belarusian state pedagogical University named after Maxim Tank, Minsk, Belarus, nikolay.grib@mail.ru

Abstract: The quasidifferential of difference of convex functions is introduced. The solution to one extreme problem is proposed.

Keywords: convex function, subdifferential, quasidifferential.

Многие прикладные и теоретические задачи приводят к исследованию некоторой функции на экстремум. Традиционные методы математического анализа, такие как применение дифференциала и гессиана, позволяют исследовать функции в точках, где они дифференцируемы. Тем не менее, часто встречаются функции, дифференцируемые не на всей области определения, потому для их исследования приходится разрабатывать новые инструменты и методы.

Цель настоящей работы – ввести понятие квазидифференциала функции и изучить его эффективность на примере одной экстремальной задачи.

Важным классом функций являются выпуклые функции. Функция называется выпуклой, если она удовлетворяет неравенству

$$f(t \cdot x + (1-t) \cdot y) \ge t \cdot f(x) + (1-t) \cdot f(y), t \in [0,1]$$

Для таких функций в выпуклом анализе – разделе математики, занимающем промежуточное положение между анализом и геометрией, – существует аналог дифференциала – субдифференциал.

Пусть функция f определена на множестве $X \subset R^n$. Субдифференциалом выпуклой функции f в точке $x \in X$ называется множество

$$\partial f(x) = \{v \mid f(y) - f(x) \ge \langle v, y-x \rangle, \forall y \in X\},$$

где $\langle a,b \rangle$ – скалярное произведение векторов a и b (см., напр., [1]).

Субдифференциал имеет простой геометрический смысл. Для каждого $v \in \partial f(x)$ функция $h(y) = f(x) + \langle v, y-x \rangle$ задает гиперплоскость, лежащую не выше графика функции f.

Нетрудно показать, что множество $\partial f(x)$ обладает свойством линейности, т.е. для выпуклых функций f_1, f_2 и неотрицательных скаляров λ_1, λ_2 верно равенство

$$\partial(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = \lambda_1 \partial f_1(x) + \lambda_2 \partial f_2(x),$$

где в правой части произведение подразумевает умножение всех элементов множества на скаляр, а сумма – всевозможные суммы элементов разных множеств. В точках, где функция дифференцируема, субдифференциал совпадает с обычным дифференциалом.

Несмотря на важность класса выпуклых функций, он достаточно узок в сравнении с пространством всех непрерывных функций. Однако существует простой способ его значительного расширения, состоящий в рассмотрении разности двух выпуклых функций.

Классом функций K, определенных на R^n , назовем множество функций, представимых в виде $f = f_1 - f_2$, где функции f_1, f_2 выпуклые. К этому классу принадлежат, например, любые линейные комбинации выпуклых функций, а также поточечные супремум и инфимум произвольного числа выпуклых и вогнутых функций (функция g считается вогнутой, если $-g$ выпукла).

Следуя В.Ф. Демьянову и А.М. Рубинову [2], квазидифференциалом функции $f \in K$ назовем пару $Df(x) = [\partial f_1(x), \partial f_2(x)]$.

Отметим важные свойства квазидифференциалов.

Теорема 1. Если $f, g \in K$, то справедливо равенство

$$D(\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x) = [\lambda_1 \partial f_1(x) + \lambda_2 \partial g_1(x), \lambda_1 \partial f_2(x) + \lambda_2 \partial g_2(x)].$$

Пусть $\operatorname{int} A$ – внутренность множества A.

Теорема 2. Для того, чтобы точка x была точкой локального минимума (максимума) функции $f \in K$, необходимо

$$\partial f_2(x) \subset \partial f_1(x) \quad (\partial f_1(x) \subset \partial f_2(x)).$$

Если

$$\partial f_2(x) \subset \operatorname{int} \partial f_1(x) \quad (\partial f_1(x) \subset \operatorname{int} \partial f_2(x)),$$

то точка x является точкой строгого локального минимума (максимума).

Рассмотрим применение квазидифференциала на конкретной задаче.

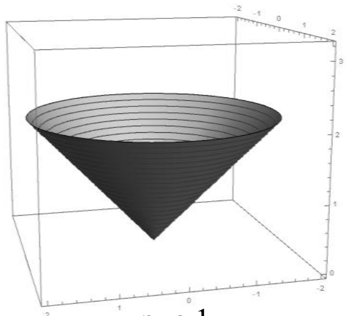
рис.1

Задача. Даны окружность и две точки, лежащие внутри нее. Исследовать на экстремум сумму расстояний от произвольной точки плоскости до данных объектов.

Пусть A, B – данные точки, $\omega(O,R)$ – данная окружность с центром O и радиусом R. Тогда задача сводится к исследованию определенной на плоскости функции $f(M) = (f_1 + f_2 + f_3)(M)$, где $f_1(M) = MA$ – евклидово расстояние между точками M и A, $f_2(M) = MB$, $f_3(M) = |MO - R|$. Представим функцию f_3 в виде $f_3 = f_{31} - f_{32}$, где

$$f_{31}(M) = \begin{cases} 2(MO - R), & MO > R, \\ 0, & MO \le R, \end{cases} \qquad f_{32}(M) = OM - R.$$

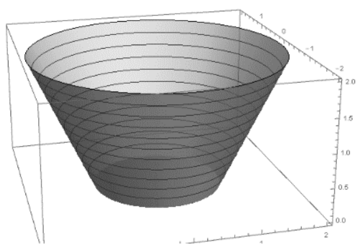
рис.2

Тогда, как легко видеть, f_1, f_2, f_{32} определяют конусы и выпуклы (рис. 1), а f_{31} – усеченный конус и также выпукла (рис. 2). Получили, что $f \in K$, причем

$$Df(x) = [\partial(f_1 + f_2 + f_{31})(x), \partial f_{32}(x)].$$

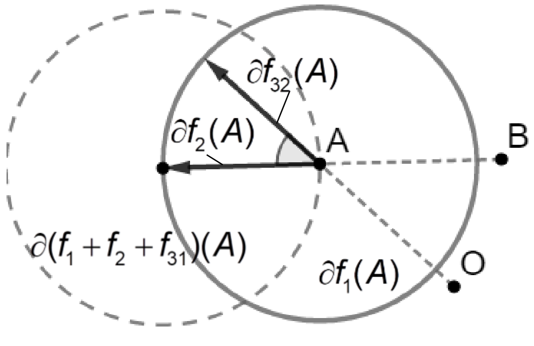

Рис. 3

Теперь исследуем f на экстремум. В силу громоздкости вычислений субдифференциалов функций f_1, f_2, f_{31}, f_{32} приведем лишь их результат. Пусть $g(M) = MT$, где точка T фиксирована, тогда $\partial g(M) = \overrightarrow{TM} \big/ \left|\overrightarrow{TM}\right|$, если $M \ne T$, и $\partial g(T) = \{\vec{\mathrm{v}}, |\vec{\mathrm{v}}| \le 1\}$. Для f_{31} имеем

$$\partial f_{31}(M) = \left\{\lambda \overrightarrow{OM} \big/ \left|\overrightarrow{OM}\right|, \lambda \in [0,2]\right\} \text{ при } \left|\overrightarrow{OM}\right| = R, \text{ и } \partial f_{31}(N) = \vec{0} \text{ при } \left|\overrightarrow{ON}\right| < R.$$

Следовательно, в точке A $\partial(f_1 + f_2 + f_{31})(A)$ представляет собой множество векторов с началом в A и концами в круге, полученном при смещении $\partial f_1(A)$ на вектор $\partial f_2(A)$ (рис. 3). Согласно теореме 2, точка A является точкой локального минимума, когда

$\partial f_{32}(A) \subset \operatorname{int} \partial(f_1 + f_2 + f_{31})(A)$. Как легко видеть, это происходит при $\angle OAB < 60°$.

В точке B результат полностью аналогичен.

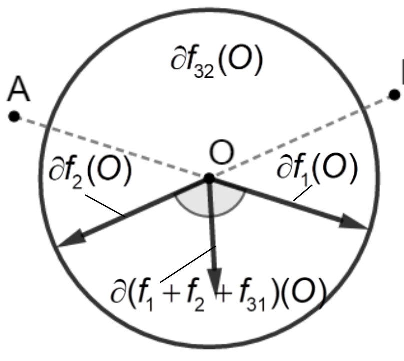

Рис. 4

Для точки O (рис. 4), очевидно, может выполняться только условие максимума, т. е. вектор $\partial(f_1 + f_2 + f_{31})(O)$ должен лежать внутри круга $\partial f_{32}(O)$, или, что то же самое, длина этого вектора должна быть меньше единицы. Следовательно, точка O является точкой локального максимума, если $\angle AOB > 120°$.

В точках $M \mid OM = R$ ситуация сложнее (рис. 5). Ясно, что $\partial(f_1 + f_2)(M)$ как сумма единичных векторов лежит на биссектрисе $\angle AMB$. Т.к. $\partial f_{31}(M), \partial f_{32}(M)$ лежат на одной прямой, то для выполнения $\partial f_{32}(M) \subset \partial(f_1 + f_2 + f_{31})(M)$ требуется сонаправленность $\partial(f_1 + f_2)(M)$ и $\partial f_{32}(M)$. Следовательно, MO должна быть биссектрисой $\angle AMB$. Но тогда $\partial(f_1 + f_2 + f_{31})(M) = \left\{ \lambda \overrightarrow{OM} \middle/ \left|\overrightarrow{OM}\right|, \lambda \in \left[\left|\partial(f_1 + f_2)(M)\right|, 2 + \left|\partial(f_1 + f_2)(M)\right| \right] \right\}$, и для выполнения необходимого условия минимума теоремы 2 требуется $\left|\partial(f_1 + f_2)(M)\right| \le 1$, т.е. $\angle AMB \ge 120°$. При этом ясно, что на ω достаточное условие не достигается.

В точках, отличных от рассмотренных выше, функция f дифференцируема, и потому ее исследование в рамках данной статьи не представляет интереса.

Т.о. получили, что в точке A (B) локальный минимум достигается при $\angle OAB \left(\angle OBA\right) < 60°$, в точке O – локальный максимум при $\angle AOB > 120°$; в точках $M \in \omega$ может достигаться минимум, если

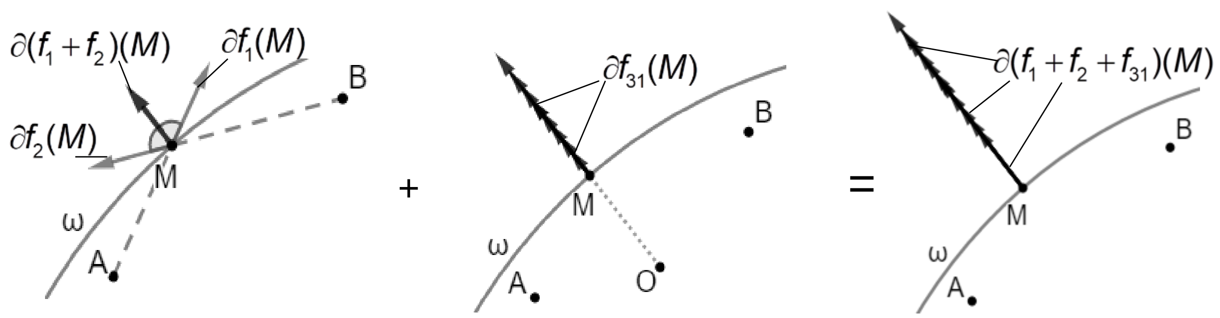

Рис. 5

$\angle AMB > 120°$, а OM – биссектриса этого угла.

К сожалению, в некоторых случаях мы получили лишь необходимое условие экстремума. Дело в том, что квазидифференциал, как и дифференциал, осуществляет приближение функции лишь первого порядка. В таких ситуациях нельзя получить решение с помощью общих методов, поэтому приходится искать инструменты, учитывающие специфику конкретной задачи.

Список использованных источников:

1. Пшеничный, Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Б. Н. Пшеничный – М.: Наука, 1980. – 320 с.

2. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление / В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов. – М.: Наука, 1990. — 431 с.

3. Горовенко Л.А., Мельников А. Р. Применение математического аппарата решения оптимизационных задач графическим методом // Сборник докладов победителей и лауреатов XXII студенческой научной конференции АМТИ. Армавир: ООО «Редакция газеты «Армавирский собеседник», подразделение Армавирская типография», 2016. - С. 87-90.