ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА МНОЖЕСТВЕ ИЗОЛИРОВАННЫХ ТОЧЕК

Г.А. Алексанян[1)], А.А. Аничков[2)]

1) к.п.н., доцент Армавирского механико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, floop2010@mail.ru

2) преподаватель математики и информатики ГБПОУ КК «Армавирский юридический техникум», г. Армавир, mailto:rabbit_090@mail.ru

Аннотация: в данной статье рассматривалась методика исследования функций, заданных на множестве изолированных точек, приведены основные недостатки современной методики ее преподавания и методы их решения.

Ключевые слова: функция, изолированные точки, исследование функции.

RESEARCH OF FUNCTIONS DEFINED ON A SET OF ISOLATED DOTS

G.A. Aleksanyan[1)], A.A. Anichkov[2)]

1) candidate of pedagogical sciences, associate professor of the Armavir Mechanics and Technology Institute (branch) of Kuban State Technological University, Armavir, Russia, floop2010@mail.ru

2) teacher of mathematics and computer science, GBPOU CC "Armavir Law College", Armavir, mailto: rabbit_090@mail.ru

Abstract: this article examined the methodology for studying functions defined on a set of isolated points. The main disadvantages of the modern methodology for its teaching and methods for solving them are presented.

Key words: function, isolated points, function research.

С понятием функциональной зависимости школьники впервые знакомятся в 7 классе средней школы [1]. При этом сразу же строятся графики и исследуются некоторые свойства непрерывных элементарных функций. При этом происходит некоторая перегрузка в расширении понятийного аппарата школьников. Ведь им предстоит всего за 2-3 урока овладеть табличным и графическим способами задания функций и научиться их исследовать. Цель нашей статьи – исключить эту перегрузку посредством поэтапного изучения свойств функций:

– на первом этапе предполагается изучение функций, заданных на множестве изолированных точек;

– на втором этапе предлагается изучение непрерывных функций;

– на третьем этапе предлагается изучение произвольных функций.

Реализацию этого подхода разумно начинать уже с изучения линейной функции в 7 классе средней школы. При этом сначала школьники на примерах осваивают переход от табличного способа задания функции, а затем исследуют функции по их графикам на основе следующей системы определений.

На первом этапе, функция $y = ax + b$ задаётся таблицей, содержащей 7-8 значений аргумента и функции. По этой таблице строится график заданной функции – 7-8 точек на координатной плоскости. Именно по этому графику проводится исследование функции на основе следующей системы определений.

Определение 1. Точка x_i называется *точкой возрастания* функции $y = f(x)$, если выполняется неравенство $f(x_{i-1}) < f(x_i) < f(x_{i+1})$, т.е. если значение функции в данной точке больше значения функции в предшествующей точке, но меньше значения функции в последующей точке.

Определение 2. Точка x_i называется *точкой убывания* функции $y = f(x)$, если выполняется неравенство $f(x_{i-1}) > f(x_i) > f(x_{i+1})$, т.е. если значение функции в данной точке меньше значения функции в предшествующей точке, но больше значения функции в последующей точке.

Определение 3. Точка $a = x_1$ функции $y = f(x)$ называется *точкой убывания* (*возрастания*) *справа*, если выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$).

Т.е., если значение функции на левой границе её области определения $D(f)$ больше (меньше) значения функции в последующей точке.

Определение 4. Точка $b = x_n$ функции $y = f(x)$ называется *точкой убывания* (*возрастания*) *слева*, если выполняется неравенство $f(x_n) < f(x_{n-1})$ ($f(x_n) > f(x_{n-1})$).

Определение 5. Точка $x_i = x_{\min}$ ($x_i = x_{\max}$) функции $y = f(x)$ называется *точкой минимума* (*максимума*) *функции*, если выполняется неравенство $f(x_i) < f(x_{i-1})$ и $f(x_i) < f(x_{i+1})$ ($f(x_i) > f(x_{i-1})$ и $f(x_i) > f(x_{i+1})$).

Разумеется, эти определения не сообщаются школьникам в таком виде и даже не записываются ими в тетради. Они лишь прорабатываются на конкретных примерах, и результаты исследования функций подробно записываются школьниками в их тетради. Именно эти записи и помогут им правильно выполнять самостоятельные и домашние задания.

Исследование функции по этой системе определений позволяет классифицировать все точки области определения функции, разбив её на шесть непересекающихся множеств: область убывания, область возрастания, область постоянства, точки минимума, точки максимума и точки, не входящие в первые пять классов. В качестве примера функции, все точки области определения которой относятся к шестому классу – функция Дирихле.

Таким образом, предлагаемый нами подход к исследованию функций на возрастание и убывание представляет собой не только полноценную и, скорее всего, безальтернативную схему, позволяющую классифицировать все точки области определения исследуемой функции (Рис.1).

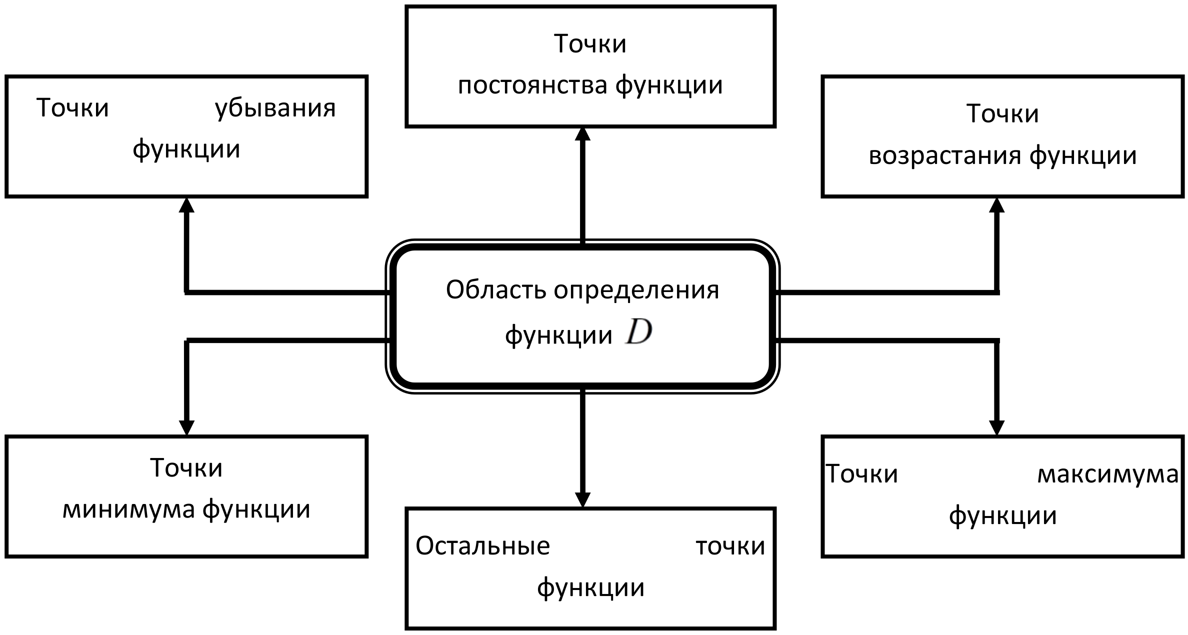

Рис. 1. Схема классификации точек области определения функции.

Эту схему следует изобразить школьникам в своих тетрадях и пользоваться ею при исследовании функций на убывание и возрастание. При этом, как было сказано выше, суть понятий на Рис. 1 прорабатывается и закрепляется школьниками на конкретных примерах. Рассмотрим такой пример. Пусть требуется исследовать функцию, заданную на множестве изолированнных точек следующим графиком (Рис. 2).

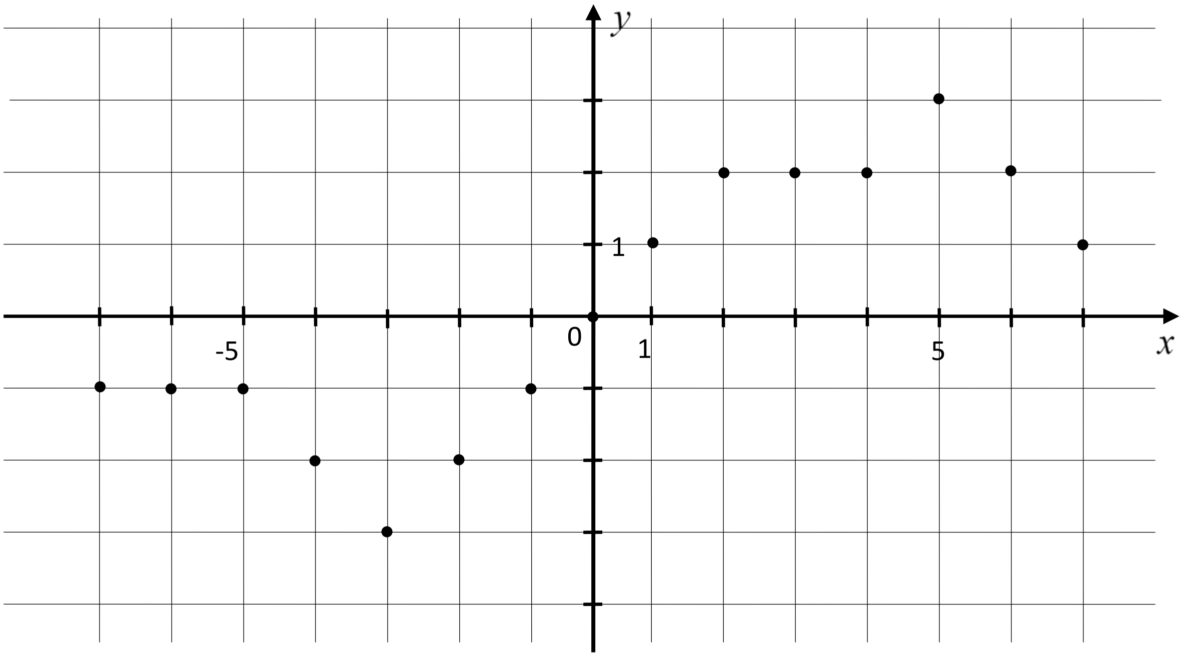

Рис. 2

В соответствии с системой определений (1)-(5) имеем следующие результаты исследования функции на убывание и возрастание:

1) $D(y)=\{-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5;6;7\}$ – область определения функции,

2) $E(y)=\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5\}$ – область значений функции,

3) $D_{\downarrow}=\{-4;6;7\}$ – область убывания функции,

4) $D_{\uparrow}=\{-2;-1;0\}$ – область возрастания функции,

5) $D_{\min}=\{-3\}$ – множество минимумов функции,

6) $D_{\max}=\{5\}$ – множество максимумов функции,

7) $D_{-}=\{-7;-6;-5\}\cup\{2;3;4\}$ – область постоянства функции.

Обращаем внимание читателя на то, что множества в пунктах 3) – 7) предсталяют собой непересекающиеся классы и их объединение совпадает с областью определения функции. Другими словами, проведено детальное исследование функции на возрастание и убывание.

При изучении конкретных элементарных функций, заданных на множествах изолированных точек, исследование зачастую оказывается значительно более простым.

Рассмотрим пример исследования линейной функции. Пусть требуется построить график и исследовать функцию, заданную следующей таблицей:

x	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
y	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2

График функции, заданной таблицей школьники строят легко, поскольку ранее уже научились строить точки на координатной плоскости. Поэтому основное внимание при выполнении этого упражнения уделяется исследованию заданной функции по построенному её графику на убывание и возрастание (Рис. 3).

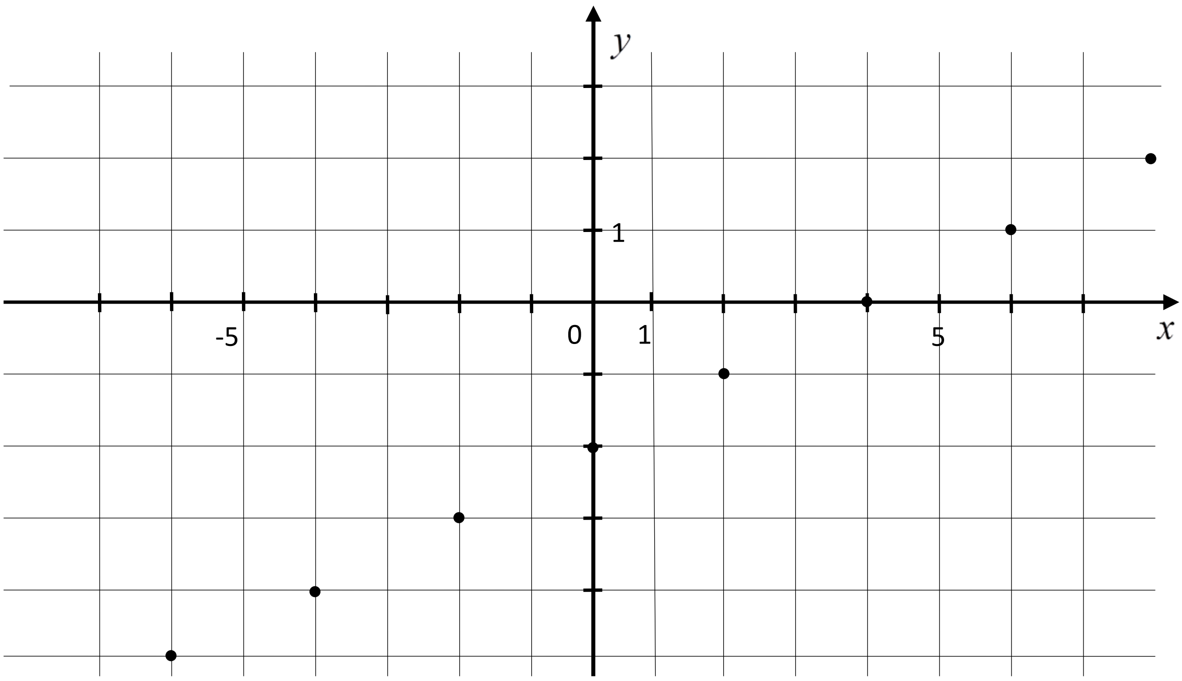

Рис. 3

Результаты исследования записываем в виде следующих множеств:

1) $D(y) = \{-6; -4; -2; 0; 2; 4; 6; 8\}$,

2) $E(y) = \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$,

3) $D_{\uparrow} = \{-6; -4; -2; 0; 2; 4; 6; 8\}$ – область возрастания функции,

Поскольку область возрастания функции включает в себя все точки области определения функции, то другие множества пусты и в результаты исследования не входят. Кроме того, исследуемая функция является возрастающей. Особо обращаем внимание школьников на то, что не всякая функция, область определения которой состоит только из точек возрастания функции, является возрастающей. Например, функция $y = -\dfrac{1}{x}$, заданная на множестве целых чисел, исключая ноль, не является возрастающей функцией, хотя вся область определения этой функции состоит только из точек возрастания.

Рассмотрим ещё один пример. Пусть требуется исследовать функцию $f(x)=x^2$ с областью определения $D(f)=\{-3;-2;-1;0;1;3\}$ (Рис. 4), классифицировав все точки её области определения.

Воспользовавшись системой определений 1-5, находим:

1) $D(y)=\{-3;-2;-1;0;1;3\}$ - область определения функции;
2) $E(y)=\{-3;-2;-1;0;1;3\}$ - область значений функции;
3) $D_{\downarrow}=\{-3;\ -2;-1\}$ - область убывания функции;
4) $D_{\uparrow}=\{1;3\}$ - область возрастания функции;
5) $D_{\min}=\{0\}$.

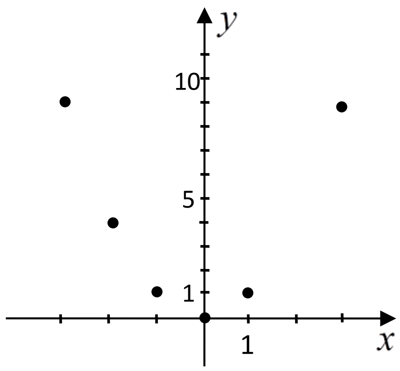

Рис. 4

При традиционном исследовании данной функции в качестве результатов такого исследования было бы записано следующее: функция $y=x^2$ убывает на множестве $\{-3;-2;-1;0\}$ и убывает на множестве $\{0;1;3\}$. Кроме того, точка $x=0$ является точкой минимума исследуемой функции. Обратим внимание, что такое исследование имеет серьёзные недостатки. Во-первых, точка $x=0$ не классифицируется в рамках этого исследования, поскольку входит как в три различных множества. Во-вторых, когда говорится, что функция $y=x^2$ убывает на множестве $\{-3;-2;-1;0\}$ и функция $y=x^2$ возрастает на множестве $\{0;1;3\}$, то фактически речь идёт о других двух функциях, а не о заявленной на исследование. И результаты исследования этих двух функций нельзя автоматически приписывать третьей функции $y=x^2$, имеющей совершенно другую область определения $D(y)=\{-3;-2;-1;0;1;3\}$, а значит отличной от первых двух. Более подробно о новом подходе к исследованию функций изложено в [2], [3].

Предлагаемый подход к исследованию функций и его первая ступень – исследование функций на множестве изолированных точек наиболее эффективно может быть реализован в учебных классах и аудиториях, оснащённых интерактивными досками, позволяющими быструю смену слайдов с заранее подготовленными изображениями графиков функций и их изменения в процессе обучения. Если же такой современной технологией обучения класс не оснащён, то можно использовать проекционную аппаратуру или плакаты. Важно в течение короткого времени исследовать на уроке 5-7 хорошо продуманных примеров и закрепить их в виде самостоятельной работы с выборочным выставлением оценок. Обратная связь очень важна для дальнейшей коррекции тех недопонятых или неправильно понятых моментов нового подхода, которые могут иметь место у школьников при первоначальном изучении нового материала.

Список использованных источников:

1. Горовенко Л.А. Технологии использования QUICK RESPONSE в информационно-образовательной среде технического вуза // Технологии, экономика и управление: анализ мировых и отечественных тенденций и перспектив развития Сборник статей Всероссийской научно-практической конференции. отв. ред.: Н. А. Овчаренко, Т. В. Лохова.. 2018. С. 109-113.
2. Бондар М.Д., Паврозин А.В. 3D-Моделирование // ПРИКЛАДНЫЕ ВОПРОСЫ ТОЧНЫХ НАУК Материалы I Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов, преподавателей. 2017. С. 242-244.
3. Иноземцев С.А., Дублинский Я.В., Часов К.В. Изображение графиков числовых множеств в интерактивном обучающем документе // СТУДЕНЧЕСКИЙ НАУЧНЫЙ ФОРУМ - 2017 IX Международная студенческая электронная научная конференция. 2017.