ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО В ИНТЕРАКТИВНОМ ОБУЧАЮЩЕМ ДОКУМЕНТЕ

С.В. Кульгутин [1], К.В. Часов [2]

1) студент Армавирского механико–технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, kulgutin@inbox.ru.

2) к.п.н., доцент кафедры общенаучных дисциплин Армавирского механико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, chasov_kv@mail.ru.

Аннотация: в статье рассматриваются вопросы о комплексных числах, операциях над ними и функций комплексного переменного в интерактивном обучающем документе. Содержит методические указания по изучению комплексных чисел.

Ключевые слова: математика, комплексные числа, функции комплексного переменного, математическая среда MathCAD, интерактивный обучающий документ.

STUDY OF FUNCTIONS OF COMPLEX VARIABLES IN INTERACTIVE LEARNING DOCUMENT

S.V. Kulgutin [1], K.V. Chasov [2]

1) the student Armavir mechanics-technological Institute (branch) Kuban state technological University, city of Armavir, Russia, kulgutin@inbox.ru.

2) Ph. D., associate Professor, Armavir mechanics-technological Institute (branch) Kuban state technological University, city of Armavir, Russia, chasov_kv@mail.ru.

Abstract: The article discusses questions about complex numbers, operations on them, and the functions of a complex variable in an interactive training document. Contains guidelines for the study of complex numbers.

Keywords: mathematics, complex numbers, functions of a complex variable, mathematical environment MathCAD, interactive training document.

Работу того или иного технического устройства, электрического прибора и т.п. с бытовой точки зрения мы видим только с внешней стороны, не задумываясь о том, какие процессы происходят внутри оборудования, его узлах и составных частях.

Но, если вникнуть в существо вопроса, заглянуть внутрь устройства, то мы обнаружим насколько всё «пронизано» внутри физикой и математикой. Решая достаточно большое количество задач по физике, связанных с вопросами электроэнергетики, можем заметить, что это приводит нас к необходимости обращаться к квадратным уравнениям, у которых зачастую получается отрицательный дискриминант.

В школе на уроках математики от некоторых учителей можно услышать фразу: учитывая, что дискриминант отрицательный, то решений квадратное уравнение не имеет. И в этом указанные учителя допускают грубую ошибку, т.к. решение у этого уравнения есть, но только оно является комплексным. В этом сразу же проявляется вполне определенный физический смысл.

Великий русский учёный, механик Н.Е. Жуковский (1847-1921), разработавший теорию крыла, применил в созданной теории комплексные числа. Большинство радиотехнических и электротехнических расчётов содержит операции с комплексными числами. В электроэнергетике, к примеру, векторы синусоидально изменяющихся во времени величин для момента времени $\omega t = 0$ отображают на комплексной плоскости. Тогда вектор $\mathrm{Im}\, e^{j(\omega t+\varphi)}$ есть $\mathrm{Im}\, e^{j\varphi} = \dot{\mathrm{I}}\mathrm{m}$, где $\dot{\mathrm{I}}\mathrm{m}$ называют комплексной амплитудой тока *i*.

Указанное выше составляет *актуальность* нашего исследования.

В первом тысячелетии нашей эры (VIII век) математики сделали вывод о том, что квадратный корень из положительного числа должен имеет два значение – положительное и отрицательное, а из отрицательных чисел нельзя извлечь квадратный корень ([1]). Но, решая кубические уравнения, выяснилось (XVI век), что для получения результата необходимо ввести такое число (мнимое число), которое под знаком квадратного корня записано в виде отрицательного числа ([2]).

На протяжении двух веков после выяснения о необходимости введения комплексных чисел учёные-математики выявляли новые факты и данные о природе мнимых чисел, создавались теории, связанные с геометрическим истолкованием. Развивалась арифметика комплексных чисел – операции над ними. Кроме того математики научились вычислять корни *n*-й степени из отрицательных, а в дальнейшем и из любых комплексных чисел.

Комплексные числа стали применяться для вычисления общего решения дифференциальных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами (предложил Лагранж), а также интегралов ([2]). Указанные выше уравнения находят своё применение в теории движения материальной точки в вязкой, сопротивляющейся среде (такие уравнения даже получили имя – уравнения Бернулли). Первым применил комплексные числа Я. Бернулли именно для вычисления интегралов.

Комплексные числа нашли широкое применение во многих областях математики, в решении достаточно большого количества прикладных задач, связанных с картографией, гидродинамикой и т. д. Но и, тем не менее, к тому времени не было логического обоснования теории комплексных чисел.

С момента появления геометрического истолкования комплексных чисел математикам удалось определить многие понятия, связанные с функциями комплексного переменного, что значительно расширило область их применения.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел и сами числа значительно упрощают работу с величинами, изображаемыми векторами на плоскости. Широко применяется геометрическая интерпретация комплексных чисел для изучения течения жидкости, задач теории упругости, в теоретической электротехнике ([1]).

Многие математические модели, применяемые в математической физике и в естественных науках – квантовой механике, электротехнике, гидродинамике, картографии, электроэнергетике, нефтегазовом деле практически построены с использованием комплексных чисел [2].

Рассмотрим укрупнённую дидактическую единицу (УДЕ) ([3]), в которой сначала определяется является ли заданная функция гармонической в некоторой области, затем в модифицированной задаче к прямой вычисляется мнимая часть той же функции. Мы в данном случае не претендуем на научную новизну в представленных ниже задачах. Наша цель показать методическую новизну в применении технологии УДЕ наряду с применением информационных технологий в виде интерактивного обучающего документа (ИОД).

УДЕ 1. (прямая задача)

Пусть область G получается из плоскости исключением полуоси $y = 0,\ x \le 0$. Показать, что функция $u(x,y) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right)$ – гармоническая в этой области.

Решение. Запишем частные производные для данной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Вычисляем вторые производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x^2 + y^2 - x \cdot 2 \cdot x}{x^2 + y^2} = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2+y^2-y\cdot 2\cdot y}{x^2+y^2}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Подставим полученные выражения в уравнение Лапласа $\Delta u=0$, где $\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$:

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\equiv 0.$$

Тем самым, данная функция является гармонической.

Представленный в настоящей статье ИОД подготавливается обучающимися самостоятельно под руководством преподавателя и размещается в информационной обучающей среде кафедры. Ниже приводится модифицированная задача.

УДЕ 2. (модифицированная к прямой задаче)

Пусть область G получается из плоскости исключением полуоси y = 0, x ≤ 0. Функция $u(x,y)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$ является гармонической (установлено в УДЕ № 1 выше) в этой области. Найти мнимую часть функции комплексного переменного.

Решение. Запишем условия, при которых существует производная функции комплексного переменного:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},$$

поэтому

$$v(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy+C.$$

К примеру, точка M(x, y) лежит в правой полуплоскости (x > 0), то, интегрируя вдоль двухзвенной ломаной ANM (рисунок 1), получим

$$v(x,y)=\int_0^y\frac{x}{x^2+y^2}dy+C=arctg\frac{y}{x}+C.$$

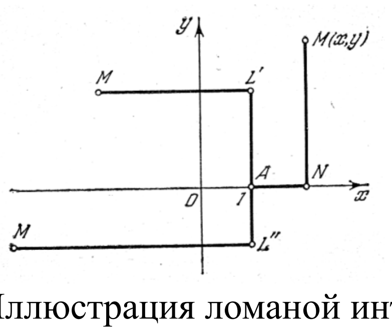

Рисунок 1 – Иллюстрация ломаной интегрирования

Если точка M(x, y) лежит во втором (или третьем) координатном угле (x ≤ 0, y ≠ 0), то, интегрируя вдоль двухзвенной ломаной AL' M (соответственно AL'' M), получим

$$v(x,y)=\int_0^y \frac{dy}{1+y^2}-\int_1^x \frac{ydx}{x^2+y^2}+C=arctg\, y-arctg\frac{x}{y}+arctg\frac{1}{y}+C.$$

Можем сделать вывод, что $v(x,y)=\arg z+C$ во всех точках G. следовательно,

$$f(z)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\cdot\arg z+i\cdot C=\ln|z|+i\cdot\arg z+i\cdot C.$$

УДЕ 3.

Проверить выполнение условий Коши-Римана для действительной и мнимой частей функция $w=\cos z$.

Решение. Пусть получены действительная и мнимая части данной функции:

$$u(x,y)=\cos x\cdot ch\, y,\quad v(x,y)=-\sin x\cdot sh\, y.$$

Проверяем условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\sin x\cdot ch\, y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\cos x\cdot sh\, y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\cos x\cdot sh\, y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\sin x\cdot ch\, y.$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\quad (\forall x,y),$$

тем самым условия Коши-Римана (Даламбера-Эйлера) выполнены, а, значит, данная функция является аналитической, т.к. частные производные первого порядка от функций u и v непрерывны для любых точек (x, y).

Подготовка приведённого выше фрагмента ИОД в рамках педагогического сотрудничества обучающегося и преподавателя позволяет студенту почувствовать себя соучастником творческого процесса. Несомненно, что обучающийся лучше будет понимать изучаемый вопрос и может выступить перед другими студентами группы как эксперт, знающий учебный материал. Зачастую это значит больше, чем просто заучивание теоретических сведений и прорешивание заданных задач.

Список использованных источников:

1. https://works.doklad.ru/view/-9Dr51Zmvz8.html (дата обращения 1.10.2019)

2. https://users.antiplagiat.ru/go?to=7ooaYBBuTiN3Trav88UjSO83Ux3thItgeGOEFYEZW6WK-Hwft8LiFfNewWhCDNB8FPbRL8hOSOoBIAVzZsF0sX9mJk3FtL8u_BgYzxZMmluuCmgiOVevBkml_Jp07xLo0&next=do (дата обращения 1.10.2019)
3. Часов К.В. и др. Укрупнённые дидактические единицы на занятиях по высшей математике / Часов К.В., Тульчий В.В., Неверов А.В. - М., 1998. - 14 с. - Деп. в НИИ Высшего Обр. 27.04.98, № 88-98.