ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ НАД МАТРИЦАМИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ MATHCAD

Т.Е. Колган [1], К.В. Часов [2]

1) студент Армавирского механико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, tatanakolgan189@gmail.com.

2) к.п.н., доцент кафедры общенаучных дисциплин Армавирского механико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, chasov_kv@mail.ru.

Аннотация: в статье рассматриваются операции, выполняемые над матрицами общего вида, среди которых матрицы-строки, матрицы-столбцы. При подготовке интерактивного обучающего документа с целью исследования свойств операций над матрицами общего вида в математической среде MathCAD выявлены не известные студентам факты.

Ключевые слова: интерактивный обучающий документ, матрица, операции над матрицами, вырожденная матрица, математическая среда MathCAD.

INVESTIGATION OF OPERATIONS ON MATRICES IN MATHCAD

T. E. Kolgan [1], K.V. Chasov [2]

1) the student Armavir mechanics-technological Institute (branch) Kuban state technological University, city of Armavir, Russia, tatanakolgan189@gmail.com .

2) Ph. D., associate Professor, Armavir mechanics-technological Institute (branch) Kuban state technological University, city of Armavir, Russia, chasov_kv@mail.ru.

Abstract: The article discusses operations performed on general matrixes, including row matrices, column matrices. During the preparation of an interactive training document in order to study the properties of operations on matrices of a general form in the mathematical environment of MathCAD, facts unknown to students were revealed.

Keywords: interactive tutorial, matrix, matrix operations, degenerate matrix, mathematical environment MathCAD.

Проведём анализ состояния проблемы исследования, отражающий актуальность темы работы.

Известно, что только посредством решения проблемных учебных задач возможно формирование студенческой учебно-исследовательской работы (УИРС). Выполняя задание преподавателя, студент постепенно осваивает методику проведения поисковых работ, в результате чего может получить новые результаты ([1], [2], [3]). В том случае, если эти результаты не отражены в учебной литературе, а возможно и в научной литературе по исследуемой проблеме, то такое исследование студента переходит в область студенческой научно-исследовательской работы (НИРС).

Для того чтобы указанное выше могло осуществиться, необходимо чтобы с первых занятий в вузе студенты получали проблемные учебные задачи. Решение подобных задач может происходить как самостоятельная работа студента дома, так и под руководством преподавателя в рамках педагогического сотрудничества.

В качестве примера УИРС рассмотрим решение проблемной учебной задачи, поставленной одним из авторов настоящей статьи (Часов К.В.) перед обучающимися.

Во время изучения темы операции над матрицами по дисциплине математика был рассмотрен вопрос умножения согласованных неквадратных матриц. Так, умножая матрицу-строку на матрицу-столбец, получаем матрицу, состоящую из одной строки и одного столбца, что полностью соответствует правилу умножения согласованных матриц (т.е. когда количество столбцов в матрице-множимой совпадает с количеством строк в матрице-множителе). Некоторые исследователи не склонны считать полученный ниже результат матрицей – ведь получилось просто одно число, но программа MathCAD считает, что это матрица и даже считает её определитель, равный этому же числу (рисунок 1, слева).

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \mathbf{12} & \mathbf{29} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} \mathbf{11} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{205} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{132} & \mathbf{319} & \mathbf{33} \\ \mathbf{24} & \mathbf{58} & \mathbf{6} \\ \mathbf{60} & \mathbf{145} & \mathbf{15} \end{pmatrix}$$

$$\left| \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \right| = \mathbf{205} \qquad \left| \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \right| = \mathbf{0}$$

Рисунок 1 – Выполнение операции умножения двух матриц

В подтверждение отсутствия переместительного свойства для умножения матриц, кроме A·B мы посчитали матрицу B·A и получили, совершенно справедливо разные результаты (рисунок 1, справа). Более того, вычислили определитель матрицы третьего порядка – он оказался равным нулю. Нас заинтересовал этот результат, и было решено продолжить исследование для произведения аналогичных матриц.

Был произведён поиск по литературным источникам. Мы выбрали классические источники: «Введение в теорию матриц» Р.Беллман [4], «Курс высшей алгебры» А.Г.Курош [5]. Выяснилось, что приведены все операции над матрицами, их определения, приведены соответствующие примеры. Конкретно содержания нашего исследования в указанных источниках нет, но для математики наши результаты очень большого значения не имеют. По этой причине мы относим наше исследование к УИРС. И в рамках УИРС тема исследования является *актуальной*.

Была поставлена *проблема*: *исследовать произведение матриц-строк и столбцов, сделать необходимые выводы*.

Объектами нашего исследования выступают матрицы либо с одной строкой, либо с одним столбцом

Предметом исследования являются операции над матрицами, в частности их произведение.

Исследование проводилось с помощью математического пакета MathCAD с целью анализа и выявления свойств произведения матриц.

Методы исследования: анализ научно-методической литературы по теме, индукция и дедукция, анализ и синтез, сравнение, обобщение, эксперимент, в частности компьютерный эксперимент.

Исследование проводилось следующим образом.

Меняли содержимое матрицы- строки и столбца, составляли их произведение, результат был прежним во время вычисления определителя результата – нуль (рисунок 2).

$$\mathbf{C} := \begin{pmatrix} 12 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} := \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D}\cdot\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 132 & -11 & 33 \\ 24 & -2 & 6 \\ 36 & -3 & 9 \end{pmatrix} \quad \left|\mathbf{D}\cdot\mathbf{C}\right| = 0$$

$$\mathbf{E} := \begin{pmatrix} 1 & -4 & 11 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} := \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}\cdot\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 5 & -20 & 55 \\ 1 & -4 & 11 \\ 7 & -28 & 77 \end{pmatrix} \quad \left|\mathbf{F}\cdot\mathbf{E}\right| = 0$$

Рисунок 2 – Выполнение операции умножения двух матриц

Анализируя полученные результаты мы обнаружили, что все столбцы (равно как и строки) пропорциональны друг другу, а как известно из свойств определителей (любого порядка, начиная со второго), такие определители равны нулю. Кроме того, ранг матрицы-произведения равен 1, что также доказывает, что построчно и по столбцам имеется линейная зависимость.

Был подготовлен интерактивный обучающий документ (ИОД), в котором нашло отражение приведённое выше исследование, для каждого произведения матриц вычислялся его ранг.

Кроме приведённого вывода выше об определителе произведения матриц, мы сделали ещё один вывод: хотя и невозможно посчитать определитель ни для матрицы-строки, ни для матрицы-столбца, но можно выделить миноры первого порядка. Все они отличны от нуля (если все элементы обеих матриц отличны от нуля, хотя достаточно, чтобы в обеих матрицах было, хотя бы по одному элементу, отличному от нуля). Таким образом, матрица A·B содержит один элемент, отличный от нуля, её ранг равен 1. Матрица B·A – третьего порядка, но её ранг всегда равен 1.

В ИОД мы добавили рассмотрение ещё одного интересного свойства произведения матриц. Выберем произвольные квадратные матрицы второго порядка. Составим произведения A·B и B·A. Убеждаемся, что матрицы-результаты C и D получаются различными (рисунок 3), хотя читатель, наверное заметил, что наборы чисел в обеих матрицах тот же, но находятся они на разных местах в матрицах.

Вспомним одно *утверждение*, которое формулируется в теории матриц: если A и B две квадратные матрицы одного порядка с определителями |A| и |B|, то определитель матрицы C = A·B равен произведению определителей перемножаемых матриц.

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad |\mathbf{A}| = -2 \qquad |\mathbf{B}| = -2$$

$$\mathbf{C} := \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \end{pmatrix} \qquad |\mathbf{C}| = 4$$

$$\mathbf{D} := \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 13 & 20 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad |\mathbf{D}| = 4 \qquad |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| = 4$$

Рисунок 3 – Выполнение операции умножения двух матриц

Согласно приведённому выше утверждению, определители матриц C и D равны между собой и равны произведению определителей сомножителей. Для того чтобы нас не могло ввести в заблуждение совпадения всех элементов матриц C и D, пусть и на разных позициях, да ещё и равенство определителей матриц-сомножителей, приведём ещё один аналогичный пример (рисунок 4).

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad |\mathbf{A}| = -2 \qquad |\mathbf{B}| = -3$$

$$\mathbf{C} := \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 18 & 3 \end{pmatrix} \qquad |\mathbf{C}| = 6$$

$$\mathbf{D} := \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad |\mathbf{D}| = 6 \qquad |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| = 6$$

Рисунок 4 – Выполнение операции умножения двух матриц

В матрицах C и D теперь различные наборы чисел (кроме одного, но это не существенно) значение определителей матриц-сомножителей, и утверждение выполняется.

Рассмотрим ещё один пример (рисунок 5), в котором мы обнаруживаем, что в алгебраических структурах существует делитель нуля. Ненулевые матрицы перемножаются, а в результате получается нуль-матрица. Отметим, что в поле действительных чисел такая ситуация невозможна! Но в нашем случае имеется обоснование – матрицы-сомножители имеют нулевой определитель, поэтому указанное выше утверждение для произведения квадратных матриц не нарушается.

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \qquad |\mathbf{A}| = \mathbf{0} \qquad |\mathbf{B}| = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{C} := \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad |\mathbf{C}| = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{D} := \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-2} \end{pmatrix} \qquad |\mathbf{D}| = \mathbf{0} \qquad |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| = \mathbf{0}$$

Рисунок 5 – Делитель нуля в алгебраических структурах

Результаты нашего исследования получены студентом (автором Колган Т.Е.) самостоятельно в активном «педагогическом сотрудничестве с преподавателем (Часов К.В.). Именно самостоятельное получение результатов и выводов (УИРС) зачастую имеет для обучающегося большее значение, чем просто прослушивание и заучивание лекционного материала. При этом учебная исследовательская работа студента постепенно приобретает уровень научной (НИРС).

Список использованных источников:

1. Селеменев, В.Ф. Научно-исследовательская работа студентов: доступность, качество, востребованность / В.Ф. Селеменев, Ю.П. Афиногенов // Вестник Воронежского государственного университета. - № 1, 2008. – С. 37-41.

2. Лазарев, В.С. Критерии и уровни готовности будущего педагога к исследовательской деятельности / В.С. Лазарев, Н.Н. Ставринова // Педагогика. – № 2, 2006. – С.51-59.

3. Лащенко А.П., Асмыкович И.К. Система MathCAD в учебном процессе технического университета //Дистанционное и виртуальное обучение. 2018. № 3 (123). С. 116-122.

4. Беллман Р. Введение в теорию матриц. Изд-во: Мир. – 1990. – с. 368.

5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. Учебник для университетов. – Изд-во Наука. Глав.ред. физ.-мат. литературы. Москва. – 1968. – с. 431.