РАЗРАБОТКА ИНТЕРАКТИВНОГО ОБУЧАЮЩЕГО ДОКУМЕНТА ПО ИЗУЧЕНИЮ СВОЙСТВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В.А. Евдокимова [1]***, К.В. Часов*** [2]

1) студент Армавирского механико–технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, vika.evdokimova.88@bk.ru.
2) к.п.н., доцент кафедры общенаучных дисциплин Армавирского механико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, chasov_kv@mail.ru.

Аннотация: статья посвящена вопросу подготовки интерактивного обучающего документа с целью исследования с методической точки зрения свойств последовательностей. Для решения задач применяется педагогическая технология укрупнения дидактических единиц (УДЕ). Новизна – применение технологии УДЕ и интерактивных обучающих документов.

Ключевые слова: интерактивный обучающий документ, информационные технологии, свойства последовательностей, прямая и обратная задачи, предел последовательности.

DEVELOPMENT OF AN INTERACTIVE LEARNING DOCUMENT ON STUDYING PROPERTIES OF SEQUENCES

V.A. Evdokimova [1]***, K.V. Chasov*** [2]

1) the student Armavir mechanics-technological Institute (branch) Kuban state technological University, city of Armavir, Russia, vika.evdokimova.88@bk.ru.
2) Ph. D., associate Professor, Armavir mechanics-technological Institute (branch) Kuban state technological University, city of Armavir, Russia, chasov_kv@mail.ru.

Abstract: the article is devoted to the issue of preparing an interactive training document for the purpose of researching sequence properties from a methodological point of view. To solve the problems, pedagogical technology of enlargement of didactic units (UDE) is used. Novelty - the use of UDE technology and interactive training documents.

Keywords: interactive training document, information technology, sequence properties, direct and inverse problems, sequence limit.

Интерактивный обучающий документ (ИОД) по своему смыслу включает в себя как учебный материал для изучения, так и средство его изучения. Подготовить аналогичный ИОД может не только преподаватель, но и практически каждый студент, обладающий некоторыми навыками работы с информационными технологиями и знакомый с изучаемой темой дисциплины. Конечно же, здесь необходимо добавить – и желающий учиться!

Подготовка учебного материала для его размещения в ИОД, включающая в себя отбор дидактических единиц (в смысле теоретических и практических задач) в разумных пределах и логической последовательности, позволяет студенту ещё в процессе создания ИОД настолько изучить размещаемый материал, что обучающийся сможет выступать перед остальными студентами в качестве эксперта по изучаемой теме. Именно такую цель и преследует преподаватель выдавая задание студентам – подготовить ИОД по изучению свойств последовательностей.

Рассмотрим несколько примеров на применение педагогической технологии укрупнённых дидактических единиц (УДЕ) ([1]) и применение математической символики и языка в ИОД.

Пример № 1.

I. $\left\{\frac{n^k}{a^n}\right\}$ – последовательность, $a>1$.

II. $\left\{\frac{n^k}{a^n}\right\}$ – б.м.п. (бесконечно малая последовательность).

III. $\forall m \in \mathbf{Z}:\ m \ge k$, $\Longrightarrow$

$$0<\frac{n^k}{a^n}\le\frac{n^m}{a^n}=\left(\frac{n}{\sqrt[m]{a^n}}\right)^m=\left(\frac{n}{b^n}\right)^m,\text{ где } b=\sqrt[m]{a}>1.$$

$$\frac{n}{b^n}=\frac{n}{\left(1+(b-1)\right)^n}=\frac{n}{1+n(b-1)+\frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2+\ldots+(b-1)^n}<\frac{2n}{n(n-1)(b-1)^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$\Rightarrow\left(\frac{n}{b^n}\right)^m\xrightarrow[n\to 0]{}0\ \Rightarrow\ \frac{n^k}{a^n}\xrightarrow[n\to 0]{}0.$$

$$\Rightarrow\left\{\frac{n^k}{a^n}\right\}-\text{б.м.п.}$$

В решённой выше задаче практически все символы понятны студенту к тому моменту, когда они приступают к изучению темы. Среди символов, применяемых для решения, кроме стандартных, имеются также символы из таблицы логико-речевой символики, приведённой в диссертации одного из авторов статьи ([2]).

Пример № 2. (Прямая задача**).**

I. $u_n = \dfrac{4n^2+1}{3n^2+2},\ n \in \mathbf{N}$ – последовательность.

II. $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{4}{3}.\quad n : \left|\dfrac{4}{3} - u_n\right| < \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0$.

III. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2+1}{3n^2+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{4n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2} + \frac{2}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4 + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{2}{n^2}} = \dfrac{4}{3}$.

$\forall \varepsilon > 0$:

$$\left|\frac{4}{3} - \frac{4n^2+1}{3n^2+2}\right| = \left|\frac{4(3n^2+2) - 3(4n^2+1)}{3(3n^2+2)}\right| = \left|\frac{12n^2+8-12n^2-3}{9n^2+6}\right| = \left|\frac{5}{9n^2+6}\right|,$$

$$\left|\frac{5}{9n^2+6}\right| < \varepsilon\,.\ \left|\frac{9n^2+6}{5}\right| > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < \frac{9n^2+6}{5} < -\frac{1}{\varepsilon},$$

$$\frac{9n^2+6}{5} > 0, \forall n > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < \frac{9n^2+6}{5} \Leftrightarrow \frac{5}{\varepsilon} < 9n^2+6 \Leftrightarrow \frac{5}{\varepsilon} - 6 < 9n^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{5-6\varepsilon}{\varepsilon} < 9n^2 \Leftrightarrow \frac{5-6\varepsilon}{9\varepsilon} < n^2 \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{5-6\varepsilon}{9\varepsilon}} \Leftrightarrow n > \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5-6\varepsilon}{\varepsilon}}\,.$$

$$n > \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5-6\varepsilon}{\varepsilon}} \text{ при } \varepsilon \le \frac{5}{6} \text{ и } n = 0 \text{ при } \varepsilon > \frac{5}{6}.$$

Задаче решена в символическом виде. По смыслу – это прямая задача – одна из составных частей УДЕ. Обратную задачу выдержим в словесном виде с применением символики.

В качестве условия задачи выступит значение предела неизвестной пока последовательности. При этом нам даже совсем не обязательно задавать $\forall \varepsilon > 0$.

Пример № 3. (Обратная задача**).**

I. $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{4}{3}$ – n-й член последовательности.

II. $u_n = \dfrac{4n^2+1}{3n^2+2},\ n \in \mathbf{N}$.

III. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{4}{3}$.

Тем самым, числитель и знаменатель в одинаковой степени зависит от целочисленной переменной n. Поэтому, действуя в обратном направлении при составлении искомого члена последовательности, умножим и числитель и знаменатель на переменную n в одинаковой степени, к примеру, n^2 (необязательно именно на эту степень – возможно домножение и на первую степень, третью и т.д.)

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{3} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{3n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-5}{3n^2+1}.$$

Тем самым, получено значение n -го члена последовательности:

$$u_n = \frac{4n^2-5}{3n^2+1}.$$

Ещё раз подчеркнём, что обратная задача может быть обратной не дословно (фразы, условия, числа в данных), а по смыслу. В ИОД эти задачи – прямая и обратная – могут располагаться рядом для сравнения хода решения и установления ассоциативных связей во время мыслительного процесса ([3]).

Следующая задача приводится в словесном виде с применением математической символики.

Пример № 4.

I. Последовательности $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbf{N}$ и $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$.

II. Доказать, что $x_n \nearrow$ и ограничена сверху, $y_n \searrow$ и ограничена снизу, и имеют общий предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$.

III. Составим следующие отношения

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n} > \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{n+1}{n} = 1,$$

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n}\frac{n+1}{n} < \frac{1}{1+\frac{n}{n^2-1}}\frac{n+1}{n} = \frac{n^3+n^2-n-1}{n^3+n^2-n} < 1.$$

Для их вывода использовалось простое неравенство:

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad n>0.$$

Из полученных двух отношений следует, что $x_n \nearrow$, $y_n \searrow$, а также

$$x_n < y_n.$$

Вычислим разность

$$y_n - x_n: \ \ 0 < y_n - x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} < \frac{e}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ y_n - x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = e.$$

(полученное равенство называется *вторым замечательным пределом*).

Для закрепления пройденной темы обучающемуся предлагается самостоятельно рассмотреть следующие задачи, для которых (там, где это указано), решив прямую задачу, нужно составить и решить обратную.

№ 1. Доказать, что последовательность $\{nq^n\}$ $(|q|<1)$ бесконечно малая.

№ 2. Доказать, что последовательность $x_n = \dfrac{2n+1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$ имеет пределом число 2.

№ 3. Для последовательностей $\alpha_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$, $\beta_n = \left(\dfrac{1+n}{n}\right)^{-n}$ вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\{\alpha_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\{\beta_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n \pm \beta_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n \cdot \beta_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\beta_n}{\alpha_n}\right)$. Составить и решить обратную задачу.

№ 4. Для последовательностей $\alpha_n = \dfrac{2}{n-1}+4$, $\beta_n = \dfrac{5}{n^2+1}-3$ вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\{\alpha_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\{\beta_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n \pm \beta_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n \cdot \beta_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\beta_n}{\alpha_n}\right)$. Составить и решить обратную задачу.

№ 5. Даны значения: $\lim \alpha_n + \beta_n = \dfrac{2}{n^2+1}+5$ и $\dfrac{\alpha_n}{\lim \beta_n} = \dfrac{4}{n-1}-3$. Записать представление α_n, β_n. Составить и решить обратную задачу.

Приведённые выше решённые примеры (особенно УДЕ – вторая и третья задачи) убедительно демонстрируют правильность выбранной технологии обучения посредством укрупнения знаний – суть задачи схватывается целиком. Применение математического языка (логико-речевая символика) формализует решение и также способствует укрупнению знаний. Становятся очевидными все внутренние связи, взаимозависимости в учебном материале. Подготовка ИОД даже отодвигается на второй план в мышлении студента. Наполнение ИОД информацией лишь побуждает обучающегося многократно просмотреть теорию и практику ([4]), увидеть тонкости, которые при однократном прочтении ускользнули бы от внимания.

Список использованных источников

1. Эрдниев П.М., Эрдниев Б.П. Обучение математике в школе.- М.: Столетие.- 1996.- 320 с.
2. Часов К.В. Элементы нестандартного анализа и логико-речевая символика – как средства повышения математической культуры учащихся средней школы: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 - Теория и методика обучения и воспитания (по областям и уровням образования) / Дагестанский гос. пед. ун-т. Махачкала, 2000. 176 с.
3. Колупаев И.А., Часов К.В. Нестандартная методика деления (слева и справа) квадратных матриц одного размера в среде MathCAD // Успехи современного естествознания. – 2012. – № 5. – С. 53-55; URL: http://www.natural-sciences.ru/ru/article/view?id=30077 (дата обращения: 1.10.2019)
4. Горовенко Л.А. Экспертная оценка электронного программно-методического комплекса // Научные труды Кубанского государственного технологического университета. - 2014. № 54. С.355-361.