РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

А.Н.Березина [1], К.В. Часов [2]

1) студент Армавирского механико–технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, berezina_19_vdv@mail.ru.

2) к.п.н., доцент кафедры общенаучных дисциплин Армавирского механико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, chasov_kv@mail.ru.

Аннотация: в статье исследуется операция деления матриц, которая стандартно выполняется как умножение на обратную матрицу. Авторами операция деления матрицы на матрицу выполняется без использования обратной.

Ключевые слова: система линейных уравнений, матричное решение систем матричных уравнений, обратная матрица, правило Кендюхова, математический редактор MathCAD.

IMPLEMENTATION OF THE RULES OF KENDIHOV IN THE MATHEMATICAL EDITOR MATHCAD

A. N. Beresina [1], K.V. Chasov [2]

1) the student Armavir mechanics-technological Institute (branch) Kuban state technological University, city of Armavir, Russia, berezina_19_vdv@mail.ru.

2) Ph. D., associate Professor, Armavir mechanics-technological Institute (branch) Kuban state technological University, city of Armavir, Russia, chasov_kv@mail.ru.

Abstract: in this paper, we study the operation of division of matrices, which is standardly considered in algebra as multiplication by an inverse matrix. The authors perform the operation of dividing the matrix into a matrix according to the Kendyukhov rule without using the inverse.

Keywords: system of linear equations, matrix solution of systems of matrix equations, inverse matrix, Kendyukhov's rule, mathematical editor of MathCAD.

Из классических источников по высшей алгебре известно, операции деления матрицы на матрицу (речь идёт о квадратных матрицах одинакового размера) нет ([1], [2]). Но, т.к. во время решения матричных уравнений возникает необходимость делить матрицу на матрицу, чтобы получить неизвестную, то указанная операция выполняется как умножение на матрицу обратную делителю.

Учитывая отсутствие перестановочного свойства для умножения матриц необходимо обращать внимание на то, с какой стороны нужно умножать матрицу-делимое на получаемую обратную.

Студентом В.С. Кендюховым ([3]), под научным руководством одного из авторов (Часов К.В.), были получены формулы вычисления и правила непосредственного деления квадратных матриц одного размера. Причём были выведены два правила – для «левого» и «правого» деления матрицы на матрицу.

Подготовка интерактивного обучающего документа (ИОД) на указанную выше тему даёт более глубокое и масштабное понимание об операциях с матрицами и определителями. Для математики это открытие («левое» деление квадратной матрицы на матрицу того же размера) не имеет столь уж большого значения, но имеет большое значение для методики изучения дисциплины математики. Это составляет ***актуальность*** исследования.

Проблема заключается в том, чтобы в процесс обучения ввести нестандартную методику деления квадратных матриц одного размера (*n*-го порядка) без вычисления обратной. При этом необходимо вывести формулы вычисления элементов неизвестной матрицы как множимого, так и множителя (для «левого» и «правого» деления).

В публикации [3] были получены формулы вычисления элементов неизвестной матрицы-множимого (или множителя) 2-го, 3-го, …, *n*-го порядков, правила их вычисления. По полученным формулам и правилу вычислений были подготовлены формулы вычислений этих матриц в математическом редакторе MathCad.

Рассмотрим получение искомых формул в редакторе MathCad. Для этого запишем матрицы B и X, и проверим не являются ли они вырожденными.

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad X := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|B| = 12 \qquad |X| = 1$$

Перемножим эти матрицы

$$C := X \cdot B \qquad C = \begin{pmatrix} -5 & 10 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \\ -2 & 11 & 4 \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы быть уверенными в правильности получаемых формул в математическом редакторе MathCAD специально создаём матрицы B и X и умножаем X на B и получаем матрицу C.

Проверим будет ли матрица X равна C/B.

$$X := \frac{C}{B} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Очевидно, правое деление в MathCAD существует. Но, если стоит задача найти матрицу X из равенства B*X=C, то операция X=C/B в MathCAD отсутствует, так как C/B есть не что иное как «деление справа», а нам нужно деление матрицы на матрицу «слева».

В теории высшей алгебры задача решается с использованием обратной матрицы, равенство B*X=D умножается на матрицу B^{-1} слева в левой части равенства и слева в правой части данного равенства.

$$D := B \cdot X \qquad D = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 7 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} \cdot D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Используя правило Кендюхова ([3]), можно получить формулы деления матрицы на матрицу с левой стороны ("левое деление").

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad X := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D := B \cdot X \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 9 & 5 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$d := B \qquad k := D$$

Получаем следующее правило "левого деления" квадратных матриц одного размера. Ограничимся матрицами второго порядка ([3], [4]).

Пусть дано матричное равенство: B × X = D. Элементы искомой матрицы (X) составляются из определителей матрицы-делителя (B) заменой элементами матрицы-делимого (D) следующим образом: *номер строки матрицы X показывает какой столбец определителя матрицы-делителя заменяется во всех столбцах этой строки соответствующим столбцом элементов матрицы-делимого. Все элементы получающейся матрицы делятся на определитель матрицы-делителя (или выносится за знак матрицы).*

В среде MathCAD правило реализуем для матриц 3-го порядка.

$$x_{1,1} := \frac{\left|\begin{pmatrix} k_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} \\ k_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,3} \\ k_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} \end{pmatrix}\right|}{|d|} \qquad x_{1,2} := \frac{\left|\begin{pmatrix} k_{1,2} & d_{1,2} & d_{1,3} \\ k_{2,2} & d_{2,2} & d_{2,3} \\ k_{3,2} & d_{3,2} & d_{3,3} \end{pmatrix}\right|}{|d|} \qquad x_{1,3} := \frac{\left|\begin{pmatrix} k_{1,3} & d_{1,2} & d_{1,3} \\ k_{2,3} & d_{2,2} & d_{2,3} \\ k_{3,3} & d_{3,2} & d_{3,3} \end{pmatrix}\right|}{|d|}$$

$$x_{1,1} = 0 \qquad x_{1,2} = 3 \qquad x_{1,3} = 1$$

$$x_{2,1} := \frac{\left|\begin{pmatrix} d_{1,1} & k_{1,1} & d_{1,3} \\ d_{2,1} & k_{2,1} & d_{2,3} \\ d_{3,1} & k_{3,1} & d_{3,3} \end{pmatrix}\right|}{|d|} \qquad x_{2,2} := \frac{\left|\begin{pmatrix} d_{1,1} & k_{1,2} & d_{1,3} \\ d_{2,1} & k_{2,2} & d_{2,3} \\ d_{3,1} & k_{3,2} & d_{3,3} \end{pmatrix}\right|}{|d|} \qquad x_{2,3} := \frac{\left|\begin{pmatrix} d_{1,1} & k_{1,3} & d_{1,3} \\ d_{2,1} & k_{2,3} & d_{2,3} \\ d_{3,1} & k_{3,3} & d_{3,3} \end{pmatrix}\right|}{|d|}$$

$$x_{2,1} = 1 \qquad x_{2,2} = 1 \qquad x_{2,3} = 1$$

$$x_{3,1} := \frac{\left|\begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & k_{1,1} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & k_{2,1} \\ d_{3,1} & d_{3,2} & k_{3,1} \end{pmatrix}\right|}{|d|} \qquad x_{3,2} := \frac{\left|\begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & k_{1,2} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & k_{2,2} \\ d_{3,1} & d_{3,2} & k_{3,2} \end{pmatrix}\right|}{|d|} \qquad x_{3,3} := \frac{\left|\begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & k_{1,3} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & k_{2,3} \\ d_{3,1} & d_{3,2} & k_{3,3} \end{pmatrix}\right|}{|d|}$$

$$x_{3,1} = 1 \qquad x_{3,2} = 2 \qquad x_{3,3} = 1$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что матрицы равны.

В результате проведённого нами исследования по составленным формулам деления квадратных матриц одинакового размера и правилу в математическом редакторе MathCAD был создан документ, который позволяет обойтись без использования обратной матрицы для нахождения матрицы множителя.

Полученные результаты включаются в интерактивный обучающий документ ([5], [6], [7]). Изучение документа обучающимися происходит в активной и интерактивной форме, способствует развитию творческого мышления, самостоятельности. По своему уровню подготовка ИОД, приведённого в настоящей статье является результатом научно-исследовательской работы студентов, хотя начиналась в качестве учебно-исследовательской работы.

Список использованных источников:

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. Изд-во: Мир. – 1990. – с. 368.

2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. Учебник для университетов. – Изд-во Наука. Глав.ред. физ.-мат. литературы. Москва. – 1968. – с. 431

3. Кендюхов В.С., Часов К.В. Операция деления матрицы на матрицу (квадратные) // Сборник студенческих работ, отмеченных наградами XIV студенческой научной конференции АМТИ. - Армавир: Изд-во АМТИ, 2008.- Вып.1. - С. 46-48.

4. Колупаев И.А., Часов К.В. Нестандартная методика деления (слева и справа) квадратных матриц одного размера в среде MathCAD // Успехи современного естествознания. – 2012. – № 5. – С. 53-55; URL: http://www.natural-sciences.ru/ru/article/view?id=30077 (дата обращения: 1.10.2017)

5. Часов К.В. К вопросу об интерактивности в обучении // VIII Международная конференция "Стратегия качества в промышленности и образовании". Варна, Болгария, 2012. Международный научный журнал Acta Universitatis Pontica Euxinus – № S1. 2012. С. 344-346.

6. Часов К.В. К вопросу об информационной компетентности и инновациях // Международная научно-практическая конференция «Научные исследования. Теория и практика» / спец. выпуск

Международного научного журнала «Вестник. Наука и практика» – Вроцлав, Польша, 2012 С. 32-35.

7. Горовенко Л.А. Экспертная оценка электронного программно-методического комплекса // Научные труды Кубанского государственного технологического университета. - 2014. № 54. С.355-361.