IV International Scientific Practical Conference of graduate and postgraduate students, lecturers «APPLIED ISSUES OF EXACT SCIENCES»
13-14 November 2020, Armavir

# ФРАКТАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЛАСТЕЙ ЕЁ ПРИМЕНЕНИЯ

***И.А. Груднов[1], Л.А. Горовенко[2]***

1) студент Армавирского механико–технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, fidjerald63@mail.ru
2) к.т.н., доцент Армавирского механико–технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, lgorovenko@mail.ru

**Аннотация.** В данной статье рассматривались исторические аспекты развития методов получения фрактальных изображений. Приведены результаты моделирования фрактального изображения без использования рекурсивного вызова.
**Ключевые слова:** фракталы, программирование, программирование повторяющихся изображений.

# FRACTAL GEOMETRY AND RESEARCH OF ITS APPLICATION AREAS

***Ilya A. Grudnov[1], Lyubov A. Gorovenko[2]***

1) the student Armavir Institute of Mechanics and Technology (branch) of Federal State Budgetary Institution of Higher Education “Kuban State Technological University”, city of Armavir, Russia, fidjerald63@mail.ru
2) Ph. D., associate Professor, Armavir Institute of Mechanics and Technology (branch) of Federal State Budgetary Institution of Higher Education “Kuban State Technological University”, city of Armavir, Russia, lgorovenko@mail.ru

**Abstract.** This article discusses the historical aspects of the development of methods for obtaining fractal images. The results of modeling a fractal image without using a recursive call are presented.
**Keywords:** fractals, programming, programming of repeated images.

Фракта́л (лат. fractus — дроблёный, сломанный, разбитый) — множество, обладающее свойством самоподобия (объект, в точности или приближённо совпадающий с частью себя самого, то есть целое имеет ту же форму, что и одна или более частей).

Фрактальной называют геометрическую или физическую структуру, имеющую неправильную или фрагментированную форму на всех масштабах измерения - от наибольшего до наименьшего.

Одним из первых исследований в области фрактальной геометрии была работа философа и математика Готфрида Лейбница в 17 - м веке. Однако, природа рекурсивного самоподобия (основной принцип в изучении многих фракталоподобных объектов и математических «монстров»), породивших эту новую концепцию, отсрочили значимое исследование примерно на два века. Прошло более ста лет, прежде чем Карл Вейерштрасс в 1872 году представил первое определение функции, график которой по сегодняшним меркам можно было бы считать фрактальным. То есть Вейерштрасс показал, что можно определить функцию с неинтуитивным свойством, заключающимся в том, что она может быть как всюду непрерывной, так и нигде не дифференцируемой.

Последующие работы, в том числе работы Георга Кантора (в частности, «Канторовские множества»), Феликса Клейна и Анри Пуанкаре, сыграли решающую роль в закладке фундамента, на котором развернулось большинство современных математических исследований фрактальной геометрии. Однако без помощи современных вычислительных и графических инструментов большая часть ранних исследований фрактальной геометрии была сильно ограничена.

В 60-х годах прошлого века французско-американский математик Бенуа Мандельброт сумел объединить сотни лет математических исследований, придумав слово «фрактал» и иллюстрируя его математическое определение с помощью замечательных компьютерных визуализаций. Наиболее заметным среди демонстраций Мандельброта было его использование бесконечной рекурсии для определения того, что сегодня известно как множество Мандельброта. С математической точки зрения, множество Мандельброта определяется как набор значений C в комплексной плоскости, для которых орбита 0 при итерации комплексного многочлена $z_{n+1} = (z_n)^2 + C$ остается ограниченной. Эквивалентно, комплексное число C является частью множества Мандельброта, если при старте с $Z_0 = 0$ и применяя итерации многократно, абсолютное значение $Z_n$ остается ограниченным, как бы ни было велико n. Эта, казалось бы, безобидная процедура отвечает за создание прекрасного, бесконечно детализированного множества Мандельброта, изображенного на рисунке 1.

Этот рисунок и другие ему подобные генерируются с помощью современных вычислительных инструментов, способных выполнять практически неограниченное множество последовательных итераций, число которых крайне сложно было бы выполнить в рамках «ручных» вычислений.

Помимо создания потрясающих художественных изображений, фрактальная геометрия также нашла разнообразное применение в таких областях, как структурная инженерия, медицина, телекоммуникации, городское планирование и т.д. Итерационные методы использовались для создания высокопрочных строительных кабелей путем переплетения ряда тонких проводов в более толстые, которые, в свою очередь, используются в следующей итерации, чтобы сделать кабели еще большего размера и прочности, чем раньше (рисунок 2). Эта простая процедура, предполагающая обычно не более чем несколько итераций, для большинства промышленных целей имеет сходство с фрактальным узором и позволяет нам использовать особые свойства, которые предлагает фрактальная геометрия.

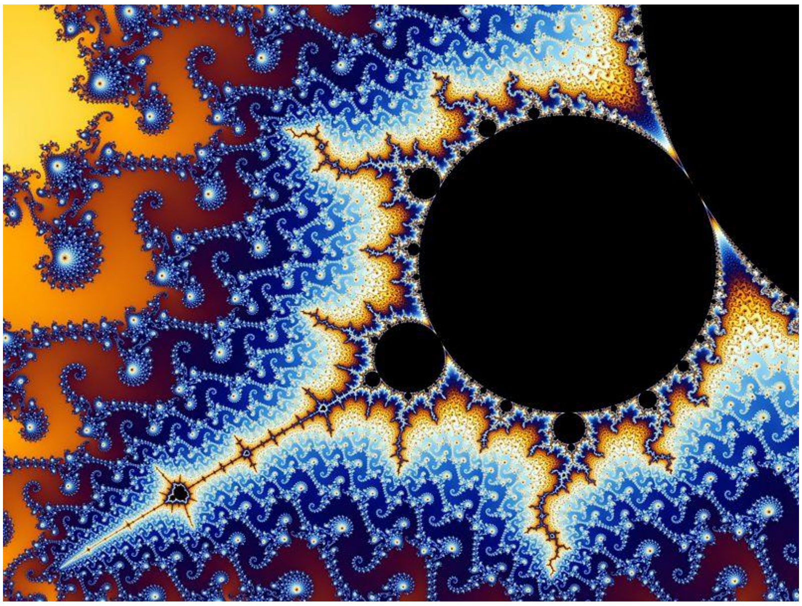

*Рисунок 1 - Множество Мандельброта*

По мере того, как медицина продолжает развиваться, полезность фракталов в лечении и выявлении проблем со здоровьем становится все более очевидной. Биомимикрия, концепция черпания вдохновения для человеческих конструкций из мира природы, в настоящее время используется в попытке решить проблему переноса жидкости, имитируя фрактальные узоры наших кровеносных сосудов и легких.

Так, учёным-исследователем Дебом Пенсом из Университета штата Орегон был предлжен способ распространения охлаждающей жидкости по поверхности кремниевого чипа. На поверхности чипа был выгравирован рисунок, построенный по принципу строения кровеносных сосудов человека и представляющий собой простую систему низкого давления для легкого охлаждения чувствительных компьютерных чипов, позволяя охлаждающей жидкости (например, жидкому азоту) равномерно течь по поверхности чипа, сохраняя его прохладным (рисунок 3). В этом случае связь между биомимикрией и фракталами становится совершенно ясной. Возникает естественный вопрос: в какой степени биомими-крия может помочь исследователям в изучении биологических и природных явлений? Будущее, безусловно, многообещающее.

Хотя классическая евклидова геометрия и другие смежные области математики часто используются для понимания и предсказания природных явлений, эти традиционные способы мышления могут оказаться недостаточными для ответа на некоторые из более сложных вопросов, возникающих в природе.

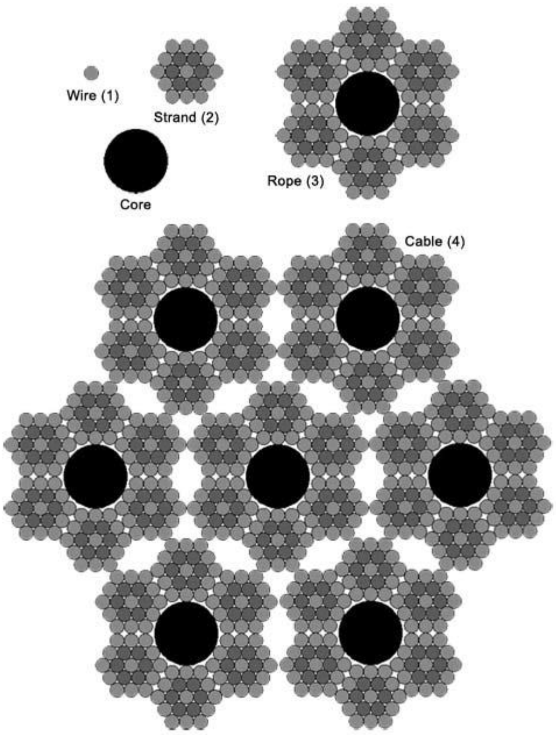


*Рисунок 2 - Итерационные методы строительства, применяемые для создания высокопрочного строительного кабеля*

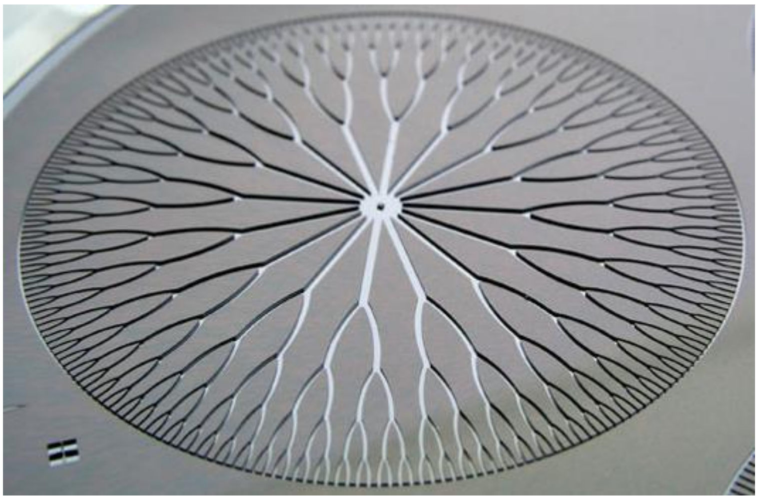

*Рисунок 3 - Фрактальный теплообменник, вытравленный в кремнии и разработанный Дебом Пенсом из Университета штата Орегон*

По словам исследователей из Университета штата Орегон, вышеуказанный рисунок может быть выгравирован на кремниевых чипах, позволяя охлаждающей жидкости (например, жидкому азоту) равномерно течь по поверхности чипа, сохраняя его прохладным.

Рассмотрим один из наиболее простых способов построения функций, порождающих фрактальные изображения – организация цикла с пересчётом координат. Именно этот способ был использован нами при построении описанного ниже изображения.

Для реализации задачи построения фрактального изображения нами была выбрана среда программирования ABC Pascal, которая реализует поддержку графического режима посредством включённого в неё модуля GraphABC. В качестве реализуемой задачи мы выбрали построение изображения «Дерева Пифагора».

Нами были установлены условия выполнения для цикла, чтобы определить количество шагов цикла, т. е. глубину повторения рисунка, от которой будет зависеть степень «разрастания» рекурсивного изображения.

Алгоритм, в соответствии с которым нами была написана программа построения дерева Пифагора:

Инициализация начальных значений параметров осуществляется в конце программы.

Перед телом цикла:

1) Объявим константу Const max = …

Будем использовать её в дальнейшем в качестве ограничения шагов рекурсии, так что вводим вместо «…» нужное нам значение.

2) Инициализируем процедуру построения линий

**procedure** LineTo1(x,y:Integer;l,u:Real), которая реализует перерасчёт координат и прорисовку линий по заданным координатам процедурой

```
Line(x,y,Round(x + l * cos(u)),Round(y - l * sin(u))).
```

Координаты конечной точки при этом вычисляются по формуле:

```
x = x + l * cos(u); y = y - l * sin(u),
```

Теперь приступим к циклу.

Условием выполнения цикла будет служить условие того, что длина линии на достигла ограничения по константе max, т.е. выполняется условие l>max. Это значит, что цикл будет выполняться, пока длина линий (ветвей дерева) будет больше константы.

В теле цикла присваиваем длине выражение, уменьшающее её значение, данная строка будет задавать плотность фрактального изображения (l := l*0.7;).

Применяем:

- процедуру построения линий (LineTo1(x,y,l,u););
- изменение координат по указанным ранее принципам;
- изображение линий с новой длиной и началом отрезка в изменяемых координатах, а также по заданному углу, изменение которого указываем здесь же:

Draw(x,y,l,u + pi/7);
Draw(x,y,l,u - pi/5);

При этом u – это наш начальный угол.

После тела цикла вводим начальные данные для наших процедур:

Draw(550, 640,180,pi/2);

Приведём код программы, которая у нас получилась

```
uses GraphABC;
Const
max = 4;
procedure LineTo1(x,y:Integer;l,u:Real);
Begin
Line(x,y,Round(x + l * cos(u)),Round(y - l * sin(u)));
End;
procedure Draw(x,y:Integer;l,u:Real);
begin
if l>max then
begin
l := l*0.7;
SetPenColor(clBlue);
LineTo1(x,y,l,u);
x := Round(x + l*cos(u));
y := Round(y - l*sin(u));
Draw(x,y,l,u + pi/7);
Draw(x,y,l,u - pi/5);
end;
```

```
end;
begin
SetWindowCaption('Derevo Piphagora');
SetWindowSize(900,600);
Draw(550, 640,180,pi/2);
end.
```

Результаты тестирования программы представлены на рисунке 4.

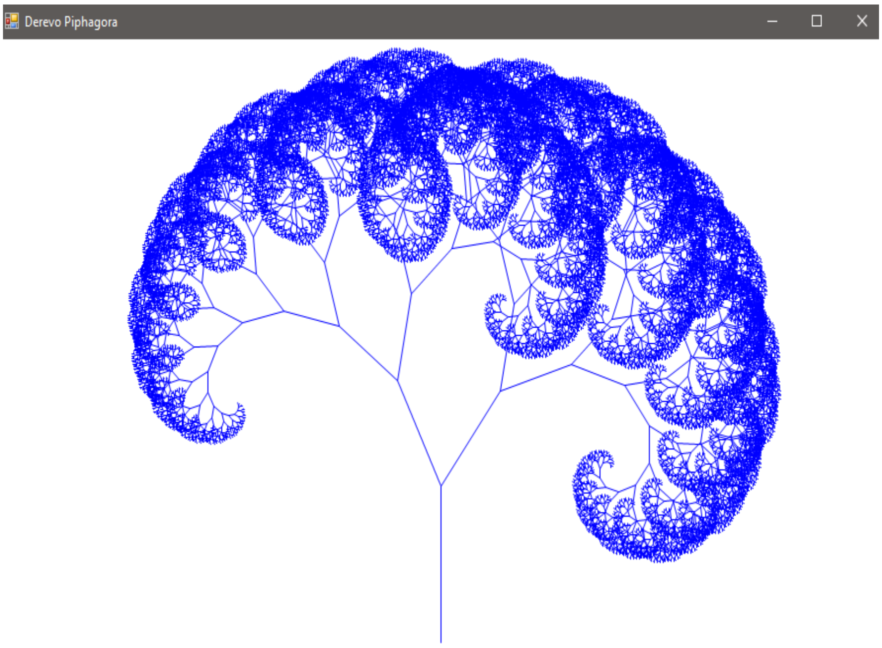


Рисунок 4 – Фрактальное изображение «Дерево Пифагора»

В ходе проведённого исследования были получены следующие результаты:

1) рассмотрены исторические аспекты получения фрактальных изображений и области применения принципов фрактальной геометрии;

2) изучены принципы построения рекурсивных изображений и фрактальных изображений без использования рекурсивного вызова.

3) проведено моделирование получаемого фрактального изображения с различными значениями параметров исходных данных.

Проведённое исследование позволит совершенствовать методы создания программ, реализующих фрактальную графику.

**Список использованных источников:**

1. Горовенко Л.А. Математические методы компьютерного моделирования физических процессов// Международный журнал

экспериментального образования. Пенза: ИД «Академия естествознания», 2017. – №2. – с. 92–93.

2. Вахрушев А.И., Алексанян Г.А. Аппроксимация функций // Прикладные вопросы точных наук: Материалы II Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов, преподавателей.- Армавир: РИО АГПУ, 2018. – С. 35-37.

3. Груднов И.А., Горовенко Л.А. Исследование методов программирования фрактальных изображений // Прикладные вопросы точных наук. Материалы III Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов, преподавателей .- Армавир: РИО АГПУ, 2019. - С. 248-252.