# ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ БИССЕКТОРЫ ПЛОСКИХ ФИГУР

***Н. В. Гриб [1], М. В. Круталевич [2]***

1) к.ф.-м.н., доцент Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка, г. Минск, Беларусь, nikolay.grib@mail.ru
2) студентка Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка, г. Минск, Беларусь, margaritak1708@gmail.com

**Аннотация:** Введено понятие прямолинейного биссектора плоской фигуры, кратчайшего и локально кратчайшего прямолинейного биссектора. Для прямолинейного биссектора сформулированы необходимые и достаточные условия быть локально кратчайшим.
**Ключевые слова:** плоская фигура, площадь фигуры, прямолинейный биссектор.

# RECTILINEAR BISECTORS OF PLANE FIGURES

***Nikolay V.Grib [1], Margarita V. Krutalevich [2],***

1) Ph. D., associate Professor, Belarusian state pedagogical University named after Maxim Tank, Minsk, Belarus, nikolay.grib@mail.ru
2) The student Belarusian state pedagogical University named after Maxim Tank, Minsk, Belarus, margaritak1708@gmail.com

**Abstract:** The concept of a rectilinear bisector of a flat figure, the shortest and locally shortest rectilinear bisector is introduced. Necessary and sufficient conditions for a locally shortest bisector are formulated.
**Keywords:** plane figure, figure area, rectilinear bisector.

Под ***фигурой*** будем понимать часть евклидовой плоскости, ограниченную кусочно-гладкой замкнутой простой (без самопересечений) кривой. Следуя Д. Пойа [1, стр. 202], ***биссектором*** фигуры назовем простую кривую с концами на границе фигуры, делящую эту фигуру на две части равной площади.

Задача о нахождении кратчайшего биссектора фигуры имеет очевидный прикладной смысл. Например, нужно разделить участок земли на два равновеликих участка забором минимальной длины. При этом, по всей видимости, наибольший практический интерес представляет поиск прямолинейного забора, в этом случае ищется кратчайший отрезок, делящий фигуру на две равновеликие части. Для краткости будем называть прямолинейные биссекторы фигуры $l$-биссекторами, а кратчайшие прямолинейные биссекторы – $ml$-биссекторами.

Введем сначала необходимые определения. -окрестностью множества $X$ назовем множество точек плоскости, расстояние от которых до множества $X$ меньше $\varepsilon$. Под расстоянием от точки до множества при этом понимаем точную нижнюю грань расстояний от данной точки до точек множества. Прямолинейный биссектор фигуры будем называть ***локально кратчайшим*** ($lml$-биссектором), если существует его -окрестность, не содержащая биссекторов меньшей длины. Например, в прямоугольнике отрезок, соединяющий середины коротких сторон, – не кратчайший, но локально кратчайший $l$-биссектор.

Биссектор фигуры будем называть ***внутренним***, если все его точки, за исключением концов, есть внутренние точки фигуры, т.е. для каждой не концевой точки биссектора существует окрестность, целиком принадлежащая фигуре. Внутренний биссектор разбивает фигуру на две фигуры, биссектор, не являющийся внутренним, разбивает фигуру на части, каждая из которых может состоять из нескольких компонент, как это показано на рис. 1.

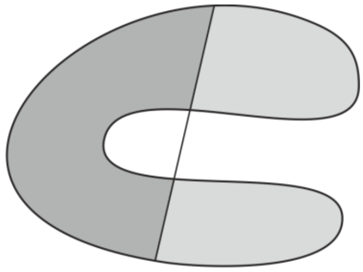

Рис. 1

Будем считать кривую, ограничивающую фигуру, положительно ориентированной. Из определения фигуры следует, что в каждой точке ее границы существуют две полукасательные – левая (ее направление противоположно направлению обхода кривой) и правая (направление совпадает с направлением обхода). Левую и правую полукасательные в точке $A$ будем обозначать через $l_{A,1}$ и $l_{A,2}$ соответственно. Если $l_{A,1}$ и $l_{A,2}$ дополняют друг друга до прямой, то в точке $A$ существует касательная, назовем такую точку ***гладкой***.

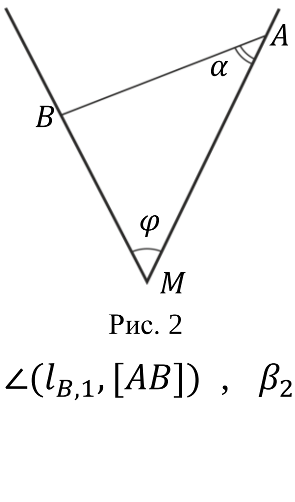


Рис. 2

**Лемма 1.** *Пусть точки $A$ и $B$ лежат на сторонах угла $\angle M = \varphi$, площадь треугольника $ABC$ равна* 1, *$\angle BAM = \alpha$. Тогда*

$$AB = \sqrt{\frac{2\sin\varphi}{\sin\alpha\,\sin(\varphi+\alpha)}}.$$

Доказательство элементарно.

Пусть $AB$ – $l$-биссектор фигуры. Обозначим $\alpha_1 = \angle(l_{A,1}, [AB])$, $\alpha_2 = \angle(l_{A,2}, [AB])$, $\beta_1 = \angle(l_{B,1}, [AB])$, $\beta_2 = \angle\left(l_{B,2}, [AB]\right)$, при этом углы между левыми полукасательными и биссектором вычисляем как углы поворота по часовой стрелке этих полукасательных до совпадения с направлением биссектора, соответствующие углы для правых полукасательных определяются через поворот против часовой стрелки (рис 3).

**Лемма 2.** *Если сумма углов между левыми (правыми) полукасательными и внутренним l-биссектором AB меньше развернутого угла, то AB не является локально кратчайшим прямолинейным биссектором.*

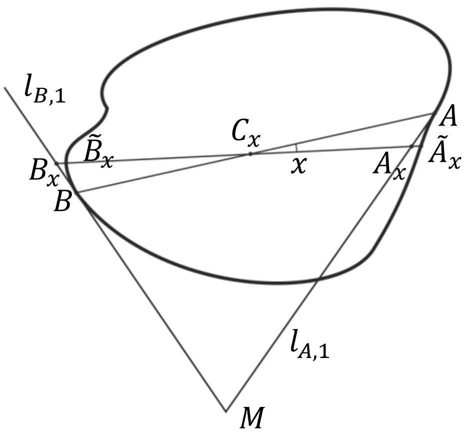

Рис. 4

Доказательство. Не ограничивая общность, считаем, $\alpha_1 < \beta_1$. Докажем, что любой достаточно близкий к $AB$ $l$-биссектор с концами слева от $A$ и $B$ короче $AB$. $l$-биссектор, образующий с $AB$ угол $x$, обозначим через $\tilde{A}_x\tilde{B}_x$, и пусть $A_x = \tilde{A}_x\tilde{B}_x \cap l_{A,1}$, $B_x = \tilde{A}_x\tilde{B}_x \cap l_{B,1}$, $C_x = AB \cap A_xB_x$, $M$ – точка пересечения $l_{A,1}$ с прямой, содержащей $l_{B,1}$ (рис. 4). Заметим, что $AA_x = O(x)$, $BB_x = O(x)$, $A_x\tilde{A}_x = o(x)$, $B_x\tilde{B}_x = o(x)$, тогда для площадей криволинейных треугольников $AA_x\tilde{A}_x$ и $BB_x\tilde{B}_x$ верны соотношения $S_{AA_x\tilde{A}_x} = o(x^2)$, $S_{BB_x\tilde{B}_x} = o(x^2)$. Площади криволинейных секторов $AC_x\tilde{A}_x$ и $BC_x\tilde{B}_x$ равны, поэтому $\left|S_{MAB} - S_{MA_xB_x}\right| = \left|S_{AC_xA_x} - S_{BC_xB_x}\right| \leq \left|S_{AA_x\tilde{A}_x} + S_{BB_x\tilde{B}_x}\right| =: \delta(x) = o(x^2)$, отсюда $S_{MA_xB_x} \leq S_{MAB} + \delta(x)$. Так как $\angle MA_xB_x = \alpha_1 + x$, то, приняв $S_{MAB} = 1$, $\angle AMB = \varphi$, из леммы 1 найдем

$$AB = \sqrt{\frac{2\sin\varphi}{\sin\alpha_1 \sin(\varphi+\alpha_1)}},\ A_xB_x \geq \sqrt{\frac{2\sin\varphi\,(1+\delta(x))}{\sin(\alpha_1+x)\sin(\varphi+\alpha_1+x)}}.$$

Докажем, что при достаточно малых $x$ выполняется $AB - A_xB_x > cx$, для этого вычислим предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{AB - A_xB_x}{x} \geq \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\sqrt{\frac{2\sin\varphi}{\sin\alpha_1\sin(\varphi+\alpha_1)}} - \sqrt{\frac{2\sin\varphi}{\sin(\alpha_1+x)\sin(\varphi+\alpha_1+x)}} - \sqrt{\frac{2\,\delta(x)\sin\varphi}{\sin(\alpha_1+x)\sin(\varphi+\alpha_1+x)}}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\sqrt{\frac{2\sin\varphi}{\sin\alpha_1\sin(\varphi+\alpha_1)}} - \sqrt{\frac{2\sin\varphi}{\sin(\alpha_1+x)\sin(\varphi+\alpha_1+x)}}\right).$$

Этот предел равен взятой со знаком «–» производной функции из леммы 1 в точке $\alpha_1$. Дифференцируя, получим, что он равен $\sin(\varphi + 2\alpha_1)\sqrt{\frac{\sin\varphi}{2\sin^3\alpha_1\sin^3(\varphi+\alpha_1)}} > 0$, так как $\varphi + 2\alpha_1 < \pi$. Таким образом, при достаточно малых $x$ выполняется $AB - A_xB_x > cx$ ($c$ – положительная константа, зависящая только от $\varphi$ и $\alpha_1$), и тогда $\tilde{A}_x\tilde{B}_x \leq A_xB_x + o(x) < AB - cx + o(x) < AB$. Лемма 1 доказана.

Из леммы 2 непосредственно следует

**Теорема 1.** *Если внутренний l-биссектор AB является lml-биссектором, то* $\alpha_1+\beta_1\geq\pi$ *и* $\alpha_2+\beta_2\geq\pi$.

**Следствие 1.** Если концы *внутреннего lml-биссектора AB являются гладкими точками фигуры, то он образует равные углы с касательными в точках A и B.*

**Следствие 2.** Концы *lml-биссектора выпуклой фигуры являются гладкими точками.*

По аналогии с точками отрицательной кривизны назовем точку $A$ границы фигуры ***отрицательной слева*** (***справа***), если существует ее окрестность, внутри которой все точки левой (правой) полукасательной принадлежат фигуре.

**Теорема 2.** *Если для внутреннего l-биссектора AB выполняются оба условия:*

1) $(\alpha_1+\beta_1>\pi)$ *или* $(\alpha_1+\beta_1=\pi$, *точки A и B отрицательны слева);*
2) $(\alpha_2+\beta_2>\pi)$ *или* $(\alpha_2+\beta_2=\pi$, *точки A и B отрицательны справа),*

*то AB – lml-биссектор.*

Доказательство. Докажем, что любой достаточно близкий к $AB$ $l$-биссектор с концами слева от $A$ и $B$ длиннее $AB$. Ограничимся более сложным случем из условия 1), когда $\alpha_1+\beta_1=\pi$, а точки $A$ и $B$ отрицательны слева. Если некоторый $l$-биссектор образует с $AB$ угол $x$, обозначим его через $\tilde{A}_x\tilde{B}_x$, и пусть $A_x=\tilde{A}_x\tilde{B}_x\cap l_{A,1}$, $B_x=\tilde{A}_x\tilde{B}_x\cap l_{B,1}$, $C_x=AB\cap A_xB_x$, $M$ – точка пересечения $l_{A,1}$ с прямой, содержащей $l_{B,1}$ (рис. 5). Так как $AA_x=O(x)$, $BB_x=O(x)$, $A_x\tilde{A}_x=o(x)$, $B_x\tilde{B}_x=o(x)$, то для площадей криволинейных треугольников $AA_x\tilde{A}_x$ и $BB_x\tilde{B}_x$ верны соотношения $S_{AA_x\tilde{A}_x}=o(x^2)$, $S_{BB_x\tilde{B}_x}=o(x^2)$. С учетом равенства площадей криволинейных секторов $AC_x\tilde{A}_x$ и $BC_x\tilde{B}_x$ получим $|S_{MAB}-S_{MA_xB_x}|=|S_{AC_xA_x}-S_{BC_xB_x}|=|S_{AA_x\tilde{A}_x}-S_{BB_x\tilde{B}_x}|=:\delta(x)=o(x^2)$, отсюда $S_{MA_xB_x}\geq S_{MAB}-\delta(x)$.

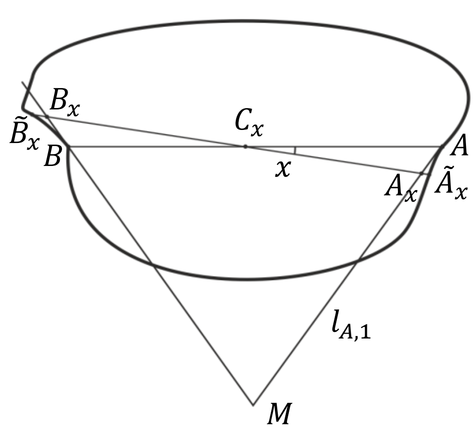

Рис. 5

Если $\angle AMB=\varphi$, то $\angle MAB=\frac{\pi-\varphi}{2}$, $\angle MA_xB_x=\frac{\pi-\varphi}{2}+x$, поэтому, приняв $S_{MAB}=1$, из леммы 1 найдем

$$AB=\sqrt{\frac{2\sin\varphi}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}},\quad A_xB_x\geq\sqrt{\frac{2\,(1-\delta(x))\sin\varphi}{\cos\left(\frac{\varphi}{2}-x\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}+x\right)}}.$$

С помощью равносильных преобразований от неравенства

$$\sqrt{\frac{2\sin\varphi}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}} < \sqrt{\frac{2\,(1-\delta(x))\sin\varphi}{\cos\left(\frac{\varphi}{2}-x\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}+x\right)}},$$

легко прийти к неравенству $2\sin^2 x > (\cos\varphi + 1)\delta(x)$, которое, очевидно, верно при всех достаточно малых $x$. Получили, что при любом достаточно малом $x$ $AB < A_x B_x \leq \tilde{A}_x \tilde{B}_x$. Аналогичные рассуждения можно провести для биссекторов с концами справа от $A$ и $B$. Теорема доказана.

При определении локальной минимальности прямолинейного биссектора случай $\alpha_1 + \beta_1 = \pi$ , $\alpha_2 + \beta_2 = \pi$ представляется наиболее сложным. Это условие не является достаточным, что можно заметить на примере большой оси эллипса. Вместе с этим малая ось показывает, что отрицательность концов биссектора слева и справа не является необходимым условием. Улучшить достаточное условие можно в терминах кривизны кривой, однако это выходит за рамки данной работы.

Поиск кратчайшего *l*-биссектора фигуры, как правило, состоит в нахождении и сравнении длин *lml*-биссекторов. При этом приходится опираться на индивидуальные свойства исследуемой фигуры.

Для примера приведем алгоритм поиска *ml*-биссектора в выпуклом многоугольнике. Из следствий 1, 2, а также теоремы 2 заключаем, что *lml*-биссекторами являются те и только те *l*-биссекторы, которые образуют равные углы со сторонами многоугольника, и при этом их концы не должны совпадать с вершинами многоугольника (рис. 6). Длины таких биссекторов (а также их существование) для каждой пары сторон вычисляются непосредственно. На последнем шаге остается из всех найденных *lml*-биссекторов выбрать самый короткий.

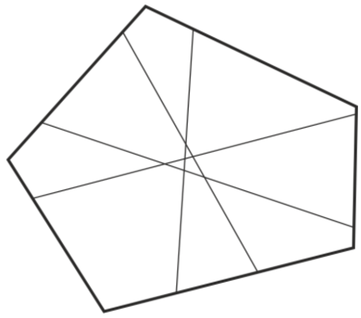

Рис. 6

**Список использованных источников:**

1. Пойа, Д. Математика и правдоподобные рассуждения / Д. Пойа. – 2-е изд., испр. – М. : Наука, 1975. – 462 с.
2. Часов К.В., Горовенко Л.А. Математическая культура как неотъемлемая составляющая информационной образовательной среды инженерно-технического вуза: монография/ К.В. Часов, Л.А. Горовенко; Армавирский механико-технологический институт.- Армавир: РИО АГПУ, 2019. - 188 с.