ИНТЕРАКТИВНЫЙ ОБУЧАЮЩИЙ ДОКУМЕНТ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Т.Е. Колган [1], К.В. Часов [2]

1) студент Армавирского механико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», simpson.marsh.01@gmail.com
2) к. пед. н., доцент кафедры общенаучных дисциплин Армавирского механико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», chasov_kv@mail.ru

Аннотация. Технологическое оборудование в электроэнергетике, энергетике и нефтегазовой отрасли является сборным или сварным из различных элементарных конструкций, собираемых в один общий агрегат. Собранная конструкция обязательно имеет узлы, с помощью которых соединяются различные элементы конструкции. В местах отверстий возникают напряжения, ослабляющие конструкцию. С целью подкрепления, уменьшения напряжения применяют различные накладки, наплывы. В статье рассмотрены некоторые вопросы и формулы плоской теории упругости, позволяющие выяснить происходящие в конструкции процессы, реализованные в интерактивном обучающем документе.

Ключевые слова. Плоская теория упругости, тензор напряжений, технологические отверстия, напряжения в конструкции, подкрепление отверстий, интерактивный обучающий документ.

INTERACTIVE TRAINING DOCUMENT ON STUDYING THE PLANE PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY

T.E. Kolgan [1], K.V. Chasov [2]

1) student of the Armavir Institute of mechanics and technology (branch) Kuban state technological University, berezinaanastejscha@yandex.ru
2) Ph. D., associate Professor of the Department of General scientific disciplines of the Armavir Institute of mechanics and technology (branch) IN FGBOU "Kuban state technological University", chasov_kv@mail.ru

Annotation. Technological equipment in the electric power, energy and oil and gas industries is prefabricated or welded from various elementary structures assembled into one common unit. The assembled structure necessarily has nodes with which various structural elements are connected. At the places of the holes, stresses arise that weaken the structure. In order to reinforce, reduce stress, various overlays, nodules are used. The article discusses some issues and formulas of the plane theory of elasticity, which make it possible to find out the processes occurring in the structure, implemented in an interactive training document.

Keywords. Flat theory of elasticity, stress tensor, technological holes, stresses in the structure, reinforcement of holes, interactive training document.

Значительная часть оборудования в электроэнергетике, энергетике и нефтегазовой отрасли, как и всякое техническое и технологическое оборудование в любой другой отрасли народного хозяйства, является сборным или сварным из различных элементарных конструкций. Тем самым, несомненно, практически каждая сборная часть конструкции будет содержать технологические отверстия различных форм и назначения. Их наличие обосновывается необходимостью для выполнения важных функций для производственного процесса. В то же время указанные отверстия являются фактором, ослабляющим как конструкцию, так и место сочленения частей конструкции.

Места напряжений в материале конструкций подвержены воздействию сил (изгиб, кручение, растяжение, давление), стремящихся разрушить материал, поэтому инженеры и задумались над задачей подкрепления технологических отверстий.

Указанные вопросы являются очень важными в образовательном процессе будущих инженеров и бакалавров соответствующих технических направлений. Для их усвоения обучающимся предлагается составлять интерактивные обучающие документы (ИОД), отражающие учебный материал по исследованию плоской задачи теории упругости.

Ограничимся в данной статье плоской задачей теории упругости для изотропной среды. В качестве основных теоретических положений плоской теории упругости рассмотрим основные уравнения для указанной плоской задачи. В построении физической и математической модели задачи объемные силы не участвуют.

Необходимо учитывать многообразие частей, составляющих те или иные конструкции. В нашем исследовании мы рассмотрим так называемые идеализированные объекты получающиеся из реальных тел с помощью конформных отображений. Тем самым, построим механические модели соответствующих напряжений.

Как известно (Н.И.Мусхелишвили [1]), во время деформации в материале, а, точнее, в местах сочленения частей объекта соответствующей конструкции, возникают напряжения. С помощью двух уравнений, связывающих компоненты тензора напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy}

между собой мы и будем исследовать поведение частей конструкций при деформации.

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0 \quad ; \quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0 \qquad (1)$$

Но даже для решения плоской задачи только этих уравнений не хватает. Необходимо третье уравнение, заменяющее шесть условий совместимости Beltrami-Michell'а [1]. Оно выражает условие, которое должно соблюдаться для того, чтобы к функциям σ_x, σ_y, τ_{xy} (из уравнений (1)), можно было подобрать функции u и v, связанные с σ_x, σ_y, τ_{xy} соотношениями:

$$\sigma_x=\lambda\Theta+2\mu\frac{\partial u}{\partial x};\sigma_y=\lambda\Theta+2\mu\frac{\partial v}{\partial y};\tau_{xy}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad (2)$$

где $\Theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$ (3)

и λ,μ – некоторые коэффициенты, связывающие напряжения и деформации.

В плоской механической модели для возникающих в материале напряжений, при отсутствии объёмных сил, получим следующее третье уравнение:

$$\Delta\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=0,$$

где Δ – операция Лапласа для двух переменных:

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

и тогда,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\cdot\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=0 \qquad (4)$$

Отметим, что при отсутствии объемных сил, т.е. в плоской теории упругости уравнения (1) и уравнение (4) выражают условия совместимости. Объединим эти уравнения в систему дифференциальных уравнений, проинтегрируем её относительно компонент напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} и в результате и получим решение задачи плоской теории упругости (Н.И.Мусхелишвили [1]), выражающее собой *бигармоническое уравнение* (называемое *бигармонической функцией*):

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0\,, \tag{5}$$

где u(x,y) – функция напряжений или функция Airy (G.B.Airy, 1862), связанная следующими соотношениями с компонентами напряжений:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad ; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \tag{6}$$

Рассмотрим теперь некоторую плоскую пластинку достаточно малой высоты (тонкая плоская пластинка) (рис. 1).

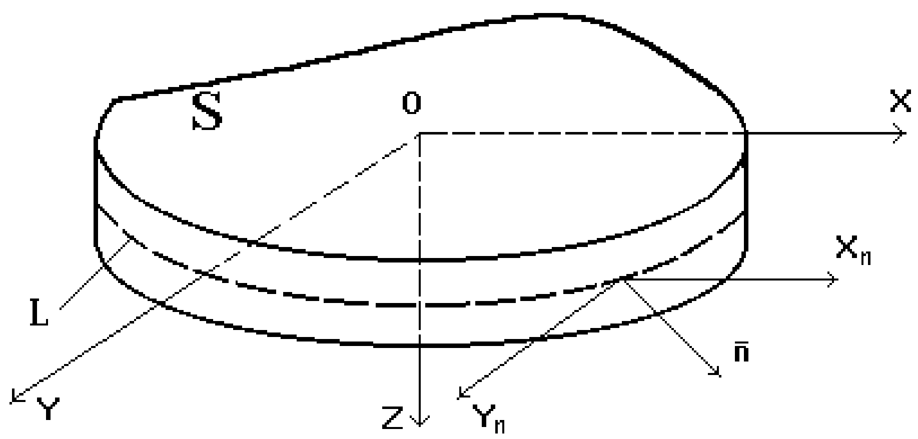

Рис. 1. Плоская пластинка достаточно малой высоты

Решение бигармонического уравнения (5) должно удовлетворять на границе L области S определенным граничным условиям.

Из теории функций комплексного переменного известно, что любую бигармоническую функцию можно представить двумя аналитическими функциями комплексного переменного z = x + iy. При этом бигармоническая функция имеет следующий вид:

$$u = \mathrm{Re}\left\{\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)\right\}, \quad (\bar{z} = x - iy), \tag{7}$$

где, Re – действительная часть функции комплексного переменного.

Тем самым решение плоской задачи теории упругости заключается в нахождении двух аналитических функций φ(z) и ψ(z)=dχ/dz, удовлетворяющих следующим граничным условиям (Н.И. Мусхелишвили [1]), записанным комплексным представлением напряжений и смещений:

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = i\int_{O}^{S}(X_n + iY_n)ds + C, \qquad (t \in L) \qquad (8)$$

связывает данные функции с напряжениями (компонентами X_n и Y_n по осям Ох и Оу), причем S – дуга контура L, начиная от некоторой точки этого контура, С – некоторая комплексная постоянная (т.е. – первая основная задача теории упругости);

$$\text{ж}\,\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = 2\mu(u + iv), \qquad (t \in L) \qquad (9)$$

связывает искомые функции со смещениями u и v по осям Ох и Оу (т.е. – вторая основная задача теории упругости), причем μ – модуль сдвига для материала пластинки.

При этом для случая обобщённого плоского напряжённого состояния

ж = (3-ν)/(1+ν)

и для случая плоской деформации, где ν – коэффициент Пуассона:

ж = 3-4ν.

Тем самым формулы (8) и (9) дают решение плоской задачи теории упругости.

Указанные вопросы изучаются в курсах дисциплин теоретическая и техническая механика. Применяя элементы нестандартного анализа ([2]) и методы конформного отображения, обучающиеся изучают учебный материал плоской задачи теории упругости приведённый в ИОД. Документ может быть загружен в информационную образовательную среду кафедры.

Огромное значение имеет факт, что ИОД разрабатывается студентами во время выполнения домашнего задания. Во время работы над документом ИОД происходит формирование и развитие профессиональных компетенций бакалавров и будущих инженеров ([3]), что позволяет говорить о формировании и развитии культуры мышления и математической культуры.

Список использованной литературы:

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.-Л. Изд-во Академии наук СССР. 1949.
2. Неверов А.В. Элементы нестандартного анализа как эффективное дидактическое средство дальнейшего совершенствования развивающего

обучения математике: дис.... канд. пед. наук: 13.00.02 -Теория и методика обучения и воспитания (по областям и уровням образования)/Дагестанский гос. пед. ун-т. Махачкала, 2000. 176 с.

3. Паврозин А.В. ФОРМИРОВАНИЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ НА ПРИМЕРЕ ПОДГОТОВКИ БАКАЛАВРОВ В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ // Электронный сетевой политематический журнал "Научные труды КубГТУ". 2014. № S4. С. 197-200.