ИНТЕРАКТИВНЫЙ ОБУЧАЮЩИЙ ДОКУМЕНТ ПО ПРИМЕНЕНИЮ РЯДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

***А.Е. Терехов* [1], *К.В. Часов* [2]**

1) студент Армавирского механико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», andrew_tereh@mail.ru
2) к. пед. н., доцент кафедры общенаучных дисциплин Армавирского механико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», chasov_kv@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается методика решения прикладных задач плоской теории упругости с помощью степенных рядов и ряда Фурье. Задача плоской теории упругости включает в себя плоскую деформацию и обобщённое плоское напряжённое состояние. Предложены соответствующие формулы для описания плоского напряжённого состояния с помощью рядов Тейлора, Лорана, Фурье. По известным формулам получены соответствующие формулы для перемножения и возведения в степень рядов Фурье в комплексной форме, сходящиеся абсолютно и равномерно.

Ключевые слова. Аналитическая функция, степенной ряд, ряды Фурье, Тейлора, Лорана, абсолютная и равномерная сходимость.

INTERACTIVE TRAINING DOCUMENT ON THE APPLICATION OF SERIES FOR SOLVING PROBLEMS OF THE PLANE ELASTICITY

***A.E. Terekhov* [1], *K.V. Chasov* [2]**

1) student of the Armavir Institute of mechanics and technology (branch) Kuban state technological University, andrew_tereh@mail.ru
2) Ph. D., associate Professor of the Department of General scientific disciplines of the Armavir Institute of mechanics and technology (branch) IN FGBOU "Kuban state technological University", chasov_kv@mail.ru

Annotation. The article discusses the methodology for solving applied problems of the plane theory of elasticity using power series and Fourier series. The problem of the plane theory of elasticity includes plane deformation and a generalized plane stress state. Corresponding formulas are proposed for describing a plane stress state using the Taylor, Laurent, and Fourier series.

According to well-known formulas, the corresponding formulas for multiplication and raising to a power of Fourier series in complex form are obtained, converging absolutely and uniformly.

Keywords. Analytical function, power series, Fourier, Taylor, Laurent series, absolute and uniform convergence.

Решение прикладных задач плоской теории упругости неизменно вызывают у студентов любых специальностей и направлений достаточно серьёзные затруднения. Так происходит, например, во время изучения деформации образца, в котором появляются напряжения и их необходимо рассчитать. Трудности у студентов возникают ещё на этапе выбора подхода к решению задачи, не говоря уже о знании и использовании формул расчёта напряжений.

Авторы надеются, что разработанный ими интерактивный обучающий документ (ИОД), с размещёнными в нём формулировками и формулами, поможет обучающимся изучить данный вопрос всесторонне и качественно. Так при знакомстве с документом студенты анализируют приведённые формулировки определений, формулы, теоретические выводы в требуемой последовательности. При этом немаловажным фактом является то, что ИОД подготовил их однокурсник в процессе самостоятельной работы.

Во время работы с документом у студентов неизбежно возникают вопросы к авторам (точнее, к соавтору – их однокурснику, как уже к эксперту в данной области). Это могут быть замечания и предложения, связанные с расположением учебного материала на экранной странице, с интерактивными ссылками в документе, видеофрагментами по теме. Редко, но иногда обнаруживаются ошибки в ходе рассуждений, что сразу же исправляется.

Очевидно, что в приведённой выше деятельности обучающихся присутствуют все признаки учебной исследовательской работы студентов, а в деятельности студента, подготавливающего ИОД – научной исследовательской работы ([1]).

ИОД содержит вводную часть, в которой приводится теория степенных рядов и рядов Фурье в комплексной форме и поясняется необходимость применения их для решения конкретных прикладных задач плоской теории упругости.

Рассмотрим наиболее важные факты из теории степенных рядов и рядов Фурье. Из теории аналитических функций известно ([2]), что в некотором круге $|z-a|<R$ аналитическая функция f(z) единственным образом представима внутри него рядом Тейлора, при этом ряд сходится

абсолютно и равномерно, его коэффициенты удовлетворяют условиям Коши

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k\,, \qquad (1)$$

где

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} f(z)\frac{dz}{(z-a)^{k+1}}=\frac{1}{k!}f^{(k)}(a),\quad \left(0<r<R\right). \qquad (2)$$

Условия Коши для коэффициентов ряда Тейлора:

$$|a_k|\le\frac{M(r)}{r^k},\quad M(r)=\max_{|z-a|=r}|f(z)|\,. \qquad (3)$$

Если же функция комплексного переменного f(z) аналитическая не в круге $|z-a|<R$, а в некотором кольце $R_1<|z-a|<R_2$, то f(z) представима в нём абсолютно и равномерно сходящимся рядом Лорана. Отметим, что представима она также единственным образом.

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left(z-a\right)^k, \qquad (4)$$

где

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} f(z)\frac{dz}{(z-a)^{k+1}}\,,\quad \left(R_1<r<R_2\right)$$

Для коэффициентов a_k справедливы оценки:

$$|a_k|\le\frac{M(r)}{r^k},\quad M(r)=\max_{|z-a|=r}|f(z)|. \qquad (5)$$

В ИОД была рассмотрена также действительная функция, заданная на интервале $\theta\in\left]0,\,2\pi\right[$ и удовлетворяющая условиям Дирихле. f(θ) в этом случае может быть представлена ряда Фурье:

$$f(\theta)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k e^{ik\theta}+\bar{a}_k e^{-ik\theta}\right),\quad a_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-ik\theta}d\theta. \qquad (6)$$

При выполнении некоторых условий ряд Фурье такой функции равномерно и абсолютно сходится. Выясним эти условия: непрерывность функции f(θ) и её производных до (n-1)-го порядка включительно на интервале $\theta \in \left]0,\, 2\pi\right[$, а также n-ая производная функции удовлетворяет условиям Дирихле на интервале $\theta \in \left]0,\, 2\pi\right[$.

Отметим также, что коэффициенты a_k удовлетворяют следующим условиям:

$$|a_k| = \frac{M}{k^{n+1}}, \tag{7}$$

где M – некоторая положительная постоянная ([3]).

В. Г. Кичигин вывел формулы умножения и возведения в степень рядов Фурье в комплексной форме ([4]) как частный случай операций, выполняемых над функциями, представленными в виде сумм абсолютно и равномерно сходящихся рядов по полиномам Фабера. И приводятся эти формулы, кроме того они включены и в ИОД.

$$\left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\sigma^k + \delta\overline{a_k}\sigma^{-k}\right)\right]\cdot\left[b_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(b_k\sigma^k + \omega\overline{b_k}\sigma^{-k}\right)\right] = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k\sigma^k + \delta\omega\overline{c_k}\sigma^{-k}\right)$$

,

$$c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\delta\overline{a_l}b_{k+l} + \omega a_{k+l}\overline{b_l}\right), \tag{8}$$

где $\sigma = e^{i\theta}$, δ=±1, ω=±1.

Для случая возведения в степень рядов Фурье:

$$\left[f(\theta)\right]^n = a_{0,n} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{k,n}\sigma^k + \overline{a_{k,n}}\sigma^{-k}\right), \quad \text{(n=1, 2, ...)}, \tag{9}$$

где

$$a_{k,n} = \sum_{l=0}^{k} a_l a_{k-l,n-1} + \sum_{l=1}^{\infty}(\overline{a_l}a_{k+l,n-1} + a_{k+l}\overline{a}_{l,n-1}), \quad a_{k,1} = a_k .$$

При этом ряды для произведения функций и возведения в степень сходятся абсолютно и равномерно, а ряды коэффициентов c_k и $a_{k,n}$ сходятся абсолютно.

Следствием предыдущих или доказываемых аналогично являются следующие формулы:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\sigma^k + \overline{a_k}\sigma^{-k}\right)\right]\cdot\left[\sigma_0\sigma^n \pm \sigma_0^{-1}\sigma^{-n}\right] = \sigma_0\overline{a_n} \pm \sigma_0^{-1}a_n + \sum_{r=1}^{\infty}\left(a'_r\sigma^r \pm \overline{a'_r}\sigma^{-r}\right), \tag{10}$$

где

$$a'_r = \sigma_0\delta_1\left(r,n\right)\overline{a}_{n-r} + \sigma_0\delta_2(r,n)a_{r-n} \pm \sigma_0^{-1}a_{r+n};$$

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\beta_k\sigma^k - \overline{\beta_k}\sigma^{-k}\right)\right]\cdot\left[\sigma_0\sigma^n \pm \sigma_0^{-1}\sigma^{-n}\right] = -\sigma_0\overline{\beta_n} \pm \sigma_0^{-1}\beta_n + \sum_{r=1}^{\infty}(\beta_r'\sigma^r \mp \overline{\beta_r'}\sigma^{-r}),$$

$$\beta_r'' = -\sigma_0\delta_1(r,n)(n-r)\overline{\beta_{n-r}} + \sigma_0\delta_2(r,n)(r-n)\beta_{r-n} \pm \sigma_0^{-1}(r+n)\beta_{r+n}; \quad (11)$$

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} k^2\left(\beta_k\sigma^k + \overline{\beta_k}\sigma^{-k}\right)\right]\cdot\left[\sigma_0\sigma^n + \sigma_0^{-1}\sigma^{-n}\right] = \sigma_0\overline{\beta_n} \pm \sigma_0^{-1}\beta_n + \sum_{r=1}^{\infty}(\beta_r''\sigma^r + \overline{\beta_r''}\sigma^{-r}),$$

$$\beta'' = \sigma_0\delta_1(r,n)(n-r)^2\overline{\beta_{n-r}} + \sigma_0\delta_2(r,n)(r-n)^2\beta_{r-n} + \sigma_0^{-1}(r+n)^2\beta_{r+n}; \quad (12)$$

$$\left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(\sigma^k + \sigma^{-k}\right)\right]\cdot\left[\sigma_0\sigma^n \pm \sigma_0^{-1}\sigma^{-n}\right] = a_n\left(\sigma_0 \pm \sigma_0^{-1}\right) + \sum_{r=1}^{\infty}\left(a_r'\sigma^r \pm \overline{a_r'}\sigma^{-r}\right),$$

$$a_r' = \sigma_0\delta(n)a_0 + \sigma_0\delta_1(r,n)a_{n-r} + \sigma_0\delta_2(r,n)a_{r-n} \pm \sigma_0^{-1}a_{r+n},$$

$$\overline{a_r'} = \pm\sigma_0^{-1}\delta(n)a_0 + \sigma_0^{-1}\delta_1(r,n)a_{n-r} + \sigma_0^{-1}\delta_2(r,n)a_{r-n} \pm \sigma_0 a_{r+n}; \quad (13)$$

$$\left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(\sigma^k - \sigma^{-k}\right)\right]\cdot\left[\sigma_0\sigma^n \pm \sigma_0^{-1}\sigma^{-n}\right] = a_n\left(\sigma_0 \pm \sigma_0^{-1}\right) + \sum_{r=1}^{\infty}(a'\sigma^r{}_r \mp \overline{a_r'}\sigma^{-r}),$$

$$a_r' = \sigma_0\delta(n)a_0 - \sigma_0\delta_1(r,n)a_{n-r} + \sigma_0\delta_2(r,n)a_{r-n} \pm \sigma_0^{-1}a_{r+n},$$

$$\overline{a_r'} = \pm\sigma_0^{-1}\delta(n)a_0 - \sigma_0^{-1}\delta_1(r,n)a_{n-r} + \sigma_0^{-1}\delta_2(r,n)a_{r-n} \pm \sigma_0 a_{r+n}, \quad (14)$$

где введены обозначения:

$$\delta(n) = \begin{bmatrix}1, \text{ при } r = n\\ 0, \text{ при } r \neq n\end{bmatrix}; \quad \delta_1(r,n) = \begin{bmatrix}1, \text{ при } r < n\\ 0, \text{ при } r \geq n\end{bmatrix}; \quad \delta_2(r,n) = \begin{bmatrix}1, \text{ при } r > n\\ 0, \text{ при } r \leq n\end{bmatrix},$$

$$\left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(\sigma^k - \sigma^{-k}\right)\right]\cdot\left[\sigma_0\sigma^n \pm \sigma_0^{-1}\sigma^{-n}\right] = -a_n(\sigma_0 \mp \sigma_0^{-1}) + \sum_{r=1}^{\infty}(a_r'\sigma^r \mp \overline{a_r'}\sigma^{-r}),$$

$$a_r' = \delta(n)a_0\sigma_0 - \sigma_0\delta_1(r,n)a_{n-r} + \sigma_0\delta_2(r,n)a_{r-n} \pm \sigma_0^{-1}a_{r+n},$$

$$\overline{a_r'} = \pm\delta(n)a_0\sigma_0^{-1} - \sigma_0^{-1}\delta_1(r,n)a_{n-r} + \sigma_0^{-1}\delta_2(r,n)a_{r-n} \pm \sigma_0 a_{r+n}. \quad (15)$$

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\sigma^k + b_k\sigma^{-k}\right)\right]\cdot\left[\sigma_0\sigma^\lambda \pm \sigma_0^{-1}\sigma^{-\lambda}\right] = \sigma_0 b_\lambda \pm \sigma_0^{-1}a_\lambda + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k'\sigma^k \pm b_k'\sigma^{-k}\right),$$

$$a_k' = \sigma_0\delta_1(k,\lambda)b_{\lambda-k} + \sigma_0\delta_2(k,\lambda)a_{k-\lambda} \pm \sigma_0^{-1}a_{k+\lambda},$$

$$b_k' = \sigma_0^{-1}\delta_1(k,\lambda)a_{\lambda-k} + \sigma_0^{-1}\delta_2(k,\lambda)b_{k-\lambda} \pm \sigma_0 b_{k+\lambda}, \quad (16)$$

где

$$\delta_1(k,\lambda) = \begin{bmatrix}1, \text{ при } k < \lambda\\ 0, \text{ при } k \geq \lambda\end{bmatrix}; \quad \delta_2(k,\lambda) = \begin{bmatrix}1, \text{ при } k > \lambda\\ 0, \text{ при } k \leq \lambda\end{bmatrix}.$$

В ИОД утверждается, что размещённых в нём формул вполне достаточно для решения большинства прикладных задач плоской теории упругости. В ИОД, наряду с классическим математическим анализом, применяется и нестандартный ([5]). Работа над подобным документом способствует формированию и развитию математической и технической культуры, профессиональных компетенций бакалавров в техническом вузе

([6]), умений и навыков участия в учебно- и научно-исследовательской работы студентов.

Список использованной литературы:

1. Смольняков И.М., Часов К.В. Формирование НИР студентов посредством информационной образовательной среды // Материалы VI Международной студенческой научной конференции «Студенческий научный форум» URL: https://scienceforum.ru/2014/article/2014007495 (дата обращения: 10.01.2020).

2. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. т.I, т.II, М., Изд-во «Наука», 1967, 1969.

3. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М-Л., т.I, т.II, ГИТТЛ, 1952, 1956.

4. Кичигин В.Г. Упругое равновесие изотропной пластинки с конечным числом эллиптических отверстий подкреплённых неширокими кольцами. Тр. Николаевского кораблестр. Ин-та, в.25, 1968.

5. Неверов А.В. Элементы нестандартного анализа как эффективное дидактическое средство дальнейшего совершенствования развивающего обучения математике: дис.... канд. пед. наук: 13.00.02 -Теория и методика обучения и воспитания (по областям и уровням образования)/Дагестанский гос. пед. ун-т. Махачкала, 2000. 176 с.

6. Паврозин А.В. ФОРМИРОВАНИЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ НА ПРИМЕРЕ ПОДГОТОВКИ БАКАЛАВРОВ В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ // Электронный сетевой политематический журнал "Научные труды КубГТУ". 2014. № S4. С. 197-200.