IV International Scientific Practical Conference of graduate and postgraduate students, lecturers «APPLIED ISSUES OF EXACT SCIENCES»
13-14 November 2020, Armavir

СВОЙСТВА КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ, ЗАПОЛНЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЙ

Черепов К.Р. [1)]***, К.В. Часов*** [2)]

1) студент Армавирского механико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, ckarlien@mail.ru

2) к.п.н., доцент Армавирского механико-технологического института (фили-ала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, chasov_kv@mail.ru

Аннотация: в данной статье рассматривается свойство вырожденности квадратных матриц, заполненных членами арифметических прогрессий. Получено доказательство их вырожденности.

Ключевые слова: матрица, определитель матрицы, арифметическая прогрессия, вырожденность матрицы.

PROPERTIES OF A SQUARE MATRIX FILLED WITH CONSEQUENTIAL MEMBERS OF ARITHMETIC PROGRESSIONS

Cherepov K.R. [1)]***, K.V. Chasov*** [2)]

1) student of the Armavir Mechanics and Technology Institute (branch) of the Kuban State Technological University, Armavir, Russia, ckarlien@mail.ru

2) Ph.D., Associate Professor of the Armavir Mechanics and Technology Institute (branch) of the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Kuban State Technological University", Armavir, Russia, chasov_kv@mail.ru

Abstract: This article discusses the degeneracy property of square matrices filled with members of arithmetic progressions. A proof of their degeneracy is obtained.

Key words: matrix, matrix determinant, arithmetic progression, matrix degeneracy.

Целью нашей работы является доказательство вырожденности квадратичных матриц, составленных из членов одной или нескольких арифметических прогрессий.

Рассмотрим матрицу третьего порядка, составленную из последовательных членов арифметической прогрессии (Рис. 1):

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad |A| = 0$$

Рис. 1 – Значение определителя матрицы

Видим, что определитель матрицы равен 0, такие матрицы называются вырожденными.

Получим новую матрицу из исходной (Рис. 1), поменяв местами элементы первый и третий во второй строке (Рис. 2а). Определитель этой матрицы равен 0.

Исходную матрицу (Рис. 1) изменяем следующим образом: во втором столбце меняем местами элементы первой и третьей строк (Рис. 2б). Определитель полученной матрицы также равен 0.

Проделаем следующее изменение исходной матрицы: заменим ее вторую строку последовательными членами другой арифметической прогрессии (Рис. 2в). Определитель новой матрицы вновь равен 0.

$$A1 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad A2 := \begin{bmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 9 \end{bmatrix} \qquad A3 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$|A1| = 0 \qquad |A2| = 0 \qquad |A3| = 0$$

а) б) в)

Рисунок 2 – Значение определителей матриц с изменениями: а) во 2-й строке; б) во 2-м столбце; в) во 2-й строке другая прогрессия

Если мы заменим любой столбец исходной матрицы (Рис. 1) последовательными членами любой другой арифметической прогрессии, определитель полученной матрицы будет равен 0. Почему полученная матрица является вырожденной?

Доказательство свойства вырожденности квадратных матриц третьего порядка, составленных из последовательных членов арифметической прогрессии

1. Берем произвольную арифметическую прогрессию с первым элементом ***a1*** и разностью ***d***. Составим квадратную матрицу третьего порядка из последовательных членов данной арифметической прогрессии.

$$A := \begin{pmatrix} a1 & a1 + d & a1 + 2\cdot d \\ a1 + 3\cdot d & a1 + 4\cdot d & a1 + 5\cdot d \\ a1 + 6\cdot d & a1 + 7\cdot d & a1 + 8\cdot d \end{pmatrix}$$

Пропорциональности строк или столбцов визуально не наблюдается. На основании свойств элементарных преобразований матриц вычтем из элементов второй и третьей строки соответствующие элементы первой строки, получим:

$$A := \begin{pmatrix} a1 & a1 + d & a1 + 2d \\ 3d & 3d & 3d \\ 6d & 6d & 6d \end{pmatrix} \quad |\mathbf{A}| \to \mathbf{0}$$

Наглядно видна пропорциональность второй и третьей строки, следовательно, определитель матрицы, составленный из последовательных элементов арифметической прогрессии, всегда равен 0.

Даже если поменяем первый и третий элементы любой строки, матрица также окажется вырожденной. Покажем на примере.

Поменяем в исходной матрице в третьей строке первый элемент с третьим местами, получим:

$$A := \begin{pmatrix} a1 & a1 + d & a1 + 2d \\ a1 + 5d & a1 + 4d & a1 + 3d \\ a1 + 6d & a1 + 7d & a1 + 8d \end{pmatrix}$$

На основании свойств элементарных преобразований матриц вычтем из элементов второй и третьей строки соответствующие элементы первой строки, получим:

$$A := \begin{pmatrix} a1 & a1 + d & a1 + 2d \\ 5d & 3d & d \\ 6d & 6d & 6d \end{pmatrix}$$

По свойству матриц транспонируем полученную матрицу:

$$A := \begin{pmatrix} a1 & 5d & 6d \\ a1 + d & 3d & 6d \\ a1 + 2d & d & 6d \end{pmatrix}$$

Вычтем из элементов второй и третьей строки соответствующие элементы первой строки:

$$A := \begin{pmatrix} a1 & 5d & 6d \\ d & -2d & 0 \\ 2d & -4d & 0 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{A}| \to \mathbf{0}$$

Тоже видна пропорциональность второй и третьей строки, следовательно, определитель матрицы, составленный из членов арифметической прогрессии, всегда равен 0.

2. Пойдем дальше: составим матрицу из разных арифметических прогрессии, т.е. в каждой новой строке (или столбце) будет записана новая арифметическая прогрессия.

$$A := \begin{bmatrix} a1 & a1+d1 & a1+2\ d1 \\ a2+3\ d2 & a2+2\ d2 & a2+d2 \\ a3+d3 & a3+2\ d3 & a3+3\ d3 \end{bmatrix}$$

В первой и третьей строке возрастающая арифметическая погрессия, а во второй строке убывающая арифметическая прогрессия.

По свойству матриц транспонируем данную матрицу:

$$A := \begin{bmatrix} a1 & a2+3\ d2 & a3+d3 \\ a1+d1 & a2+2\ d2 & a3+2\ d3 \\ a1+2\ d1 & a2+d2 & a3+3\ d3 \end{bmatrix}$$

Вычтем из второй и третьей строки первую строку, получим:

$$A := \begin{bmatrix} a1 & a2+3\ d2 & a3+d3 \\ d1 & -d2 & d3 \\ 2\ d1 & -2\ d2 & 2\ d3 \end{bmatrix} \qquad |A| \rightarrow 0$$

Как мы видим, вторая строка пропорциональна третьей строке с коэффициентом пропорциональности, равным 2. А, значит, определитель данной матрицы будет равен 0.

3. В исходной матрице (см. п. 1) заменим элементы любой строки произвольными числами. *Выясним, при каких значениях этих чисел определитель полученной матрицы будет равняться нулю.*

$$A := \begin{bmatrix} a1 & a1+d & a1+2\ d \\ a1+3\ d & a1+4\ d & a1+5\ d \\ c & k & m \end{bmatrix}$$

Вычтем из второй строки первую строку, получим:

$$A := \begin{bmatrix} a1 & a1+d & a1+2\ d \\ 3\ d & 3\ d & 3\ d \\ c & k & m \end{bmatrix}$$

По свойству матриц транспонируем полученную матрицу:

$$A := \begin{bmatrix} a1 & 3\ d & c \\ a1+d & 3\ d & k \\ a1+2\ d & 3\ d & m \end{bmatrix}$$

Вычтем из второй и третьей строк первую строку, получим:

$$A := \begin{bmatrix} a1 & 3\ d & c \\ d & 0 & k-c \\ 2\ d & 0 & m-c \end{bmatrix}$$

Вычислим определитель данной матрицы:

$$|A| = 3d \times 2d \times (k-c) - 3d \times d \times (m-c) = 6d^2k - 6d^2c - 3d^2m + 3d^2c = 6d^2k - 3d^2c - 3d^2m =$$
$$= 3d^2(2k - c - m)$$

Приравняем определитель матрицы к 0:

$$3d^2(2k-c-m)=0;$$
$$2k-c-m=0;$$
$$2k=c+m;$$
$$k=\frac{c+m}{2}$$

Мы видим, что число $\boldsymbol{k}$ равно полусумме чисел $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{m}$ и находится между ними. Это свойство является характерным для последовательных членов арифметической прогрессии.

Сделаем выводы:

1) определитель матрицы третьего порядка, составленной из последовательных членов одной или разных арифметических прогрессий, всегда равен 0.

2) определитель матрицы третьего порядка, составленной из членов арифметической прогрессии и тремя произвольными числами в одной из строк (столбцов), будет равен нулю тогда и только тогда, когда указанные числа будут являться последовательными членами произвольной арифметической прогрессии.

Указанное свойство вырожденности квадратных матриц третьего порядка, составленных из последовательных членов арифметической прогрессии, не приводится ни в одном классическом научном источнике, среди которых можем выделить [1] и [2], не представлен указанный факт и ни в каком другом источнике, в том числе сети интернет. В работах одного из соавторов [3] и [4] приводится исследование различных последовательностей, среди которых прогрессирующие последовательности, но доказательства вырожденности не приведено для подобных последовательностей. В совместной работе соавторов данной статьи [5] установлены некоторые новые свойства арифметических прогрессий, но доказательства так и не было. В данной статье ***получено доказательство*** вырожденности квадратных матриц третьего порядка, составленных из членов арифметической прогрессии. Работа над этой темой сначала для одного из соавторов (Черепов К.Р.) стала учебной исследовательской работой, а затем перешла в ранг научной исследовательской работы.

Список использованных источников

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. Изд-во: Мир. – 1990. – с. 368.

2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. Учебник для университетов. – Изд-во Наука. Глав.ред. физ.-мат. литературы. Москва. – 1968. – с. 431

3. Смольняков И.М., Часов К.В. Некоторые свойства прогрессирующих последовательностей // Международный журнал

экспериментального образования. – 2014. – № 7 ч.1. – С. 106-107.

4. Смольняков И.М., Часов К.В. Исследование различных последовательностей // Материалы VI Международной студенческой электронной научной конференции «Студенческий научный форум» URL: www.scienceforum.ru/2014/729/6698 (дата обращения: 12.12.2018).

5. Черепов К.Р., Часов К.В. Подготовка интерактивного обучающего документа по изучению свойств арифметических прогрессий // Прикладные вопросы точных наук / Материалы III Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов, преподавателей, посвящённой 60-летию со дня образования Армавирского механико-технологического института. 2019. С. 331-334.