ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВ МАТРИЦ, СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ЧЛЕНОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЙ

К.Р. Черепов[1], Л.А. Горовенко[2]

1) студент Армавирского механико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, Ckarlien@mail.ru

2) к.т.н., доцент Армавирского механико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, lgorovenko@mail.ru

Аннотация: в данной статье рассматривается условия вырожденности квадратных матриц, составленных из одной геометрической прогрессии.

Ключевые слова: матрица, вырожденность, геометрическая прогрессия.

INVESTIGATION OF SOME PROPERTIES OF MATRICES COMPOSED OF SUCCESSIVE TERMS OF GEOMETRIC PROGRESSIONS

K.R. Cherepov [1], L.A. Gorovenko[2]

1) student of the Armavir Mechanics and Technology Institute (branch) of the Kuban State Technological University, Armavir, Russia, Ckarlien@mail.ru

2) Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Armavir Mechanics and Technology Institute (branch) of the Kuban State Technological University, Armavir, Russia, lgorovenko@mail.ru

Abstract: this article considers the conditions of degeneracy of square matrices composed of a single geometric progression.

Keywords: matrix, degeneracy, geometric progression.

Опишем проведённые нами исследования некоторых свойств матриц, составленных из последовательных членов геометрических прогрессий. В качестве инструмента исследования была выбрана система математических и инженерных расчётов MatchCAD.

Построим функцию пользователя для получения квадратных матриц, составленных из последовательных членов геометрической прогрессии (рисунок 1).

```
f2(x1, d, n) := | n ← n
                | x_1 ← x1
                | for i ∈ 1..n − 1
                |   x_{i+1} ← x_i·d
                | i ← 1
                | for k ∈ 1..trunc(√n)
                |   for j ∈ 1..trunc(√n)
                |     | r_{k,j} ← x_i
                |     | i ← i + 1
                | r
```

Рисунок 1 – Функция пользователя по заполнению матрицы элементами геометрической прогрессии

Поясним программу: происходит инициализация матрицы, в которой формируется линейный массив заданной длины (3-й параметр функции пользователя), переформируется с помощью вложенных циклов в двумерный квадратный массив с количеством строк и столбцов, вычисляемым с помощью отбрасывания дробной части корня квадратного из введенного пользователем числа, определяющего количество элементов в матрице, с целью предотвратить возможную ошибку (т.е. для случая, когда введённое число – не квадрат натурального числа) при их вводе. Первый параметр – первый элемент данной геометрической прогрессии прогрессии, второй – её знаменатель.

Таким образом, мы провели эксперимент с огромным количеством матриц, заполненных последовательными элементами различных геометрических прогрессий. И всякий раз значение определителя этих матриц было нулевым!!!

На рисунке 2 приведены результаты тестирования программы со следующими исходными данными: количество элементов в линейном массиве – 16. В результате получается матрица 4-го порядка.

$$d := f2(3,3,16)$$

$$d \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 9 & 27 & 81 \\ 243 & 729 & 2187 & 6561 \\ 19683 & 59049 & 177147 & 531441 \\ 1594323 & 4782969 & 14348907 & 43046721 \end{pmatrix}$$

$$|d| = 0$$

Рисунок 6 – Результат работы программы для членов геометрической прогрессии (строится матрица 4-го порядка)

Функция составлена верно, определитель матрицы равен нулю – матрица вырожденная. Сформулируем гипотезу.

Гипотеза 1. *Квадратная матрица, составленная из последовательных членов одной геометрической прогрессии, является вырожденной.*

Приведём доказательство гипотезы.

Для начала, возьмём квадратную матрицу 3-его порядка, составленную из последовательных членов одной геометрической прогрессии, где $\boldsymbol{g_1}$ - первый член, $\boldsymbol{d}$ - знаменатель:

$$G_3 := \begin{bmatrix} \boxed{g_1} & g_1 d & g_1 d^2 \\ g_1 d^3 & g_1 d^4 & g_1 d^5 \\ g_1 d^6 & g_1 d^7 & g_1 d^8 \end{bmatrix}$$

Видна пропорциональность всех 3-х строк и столбцов, вычтем из 2-ой и 3-ей строк первую строку, умноженную на соответствующие коэффициенты, получим:

$$G_3 := \begin{bmatrix} \boxed{g_1} & g_1 d & g_1 d^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Определитель данной матрицы будет равен нулю, так как содержит нулевые строки.

Очевидно, что в квадратной матрице любого порядка, составленной из последовательных членов одной геометрической прогрессии, все строки пропорциональны, следовательно, данные матрицы вырождены. Данное свойство вырожденности сохраняется и для квадратных матриц, составленных из последовательных членов убывающей или знакочередующейся геометрической прогрессии.

Итак, наша гипотеза о том, что квадратная матрица, составленная из последовательных членов одной геометрической прогрессии, является вырожденной, верна!

Сформулируем следующую гипотезу.

Гипотеза 2. *Квадратная матрица порядка n≥3, составленная из последовательных членов одной геометрической прогрессии, при замене (n-2) строк (столбцов) или их сочетаний произвольными числами, будет вырожденной.*

Приведём доказательство. Если в исходной матрице 3-его порядка заменить одну из строк (столбцов) произвольными числами, то останутся пропорциональными две строки (столбца), т.е. матрица останется вырожденной.

Рассмотрим квадратную матрицу 4-ого порядка, составленную из последовательных членов одной геометрической прогрессии.

$$G_4 := \begin{bmatrix} \boxed{g_1} & g_1 d & g_1 d^2 & g_1 d^3 \\ g_1 d^4 & g_1 d^5 & g_1 d^6 & g_1 d^7 \\ g_1 d^8 & g_1 d^9 & g_1 d^{10} & g_1 d^{11} \\ g_1 d^{12} & g_1 d^{13} & g_1 d^{14} & g_1 d^{15} \end{bmatrix}$$

Заменим в ней две строки (столбца) на произвольные числа, получим:

$$G_4 := \begin{bmatrix} \boxed{g_1} & g_1 d & g_1 d^2 & g_1 d^3 \\ g_1 d^4 & g_1 d^5 & g_1 d^6 & g_1 d^7 \\ c & m & k & t \\ c_1 & m_1 & k_1 & t_1 \end{bmatrix}$$

Видна пропорциональность первых двух строк, следовательно, матрица вырожденная.

Таким образом, в квадратной матрице n-ого порядка, составленной из последовательных членов одной геометрической прогрессии, при замене (n-2) строк (столбцов) на произвольные числа, всегда остаются две пропорциональные строки (столбца). Следовательно, вырожденность матрицы сохраняется.

Заменим в исходной матрице 4-ого порядка один столбец и одну строку произвольными числами, получим:

$$G_4 := \begin{bmatrix} \boxed{g_1} & g_1 d & g_1 d^2 & c_1 \\ g_1 d^4 & g_1 d^5 & g_1 d^6 & m_1 \\ g_1 d^8 & g_1 d^9 & g_1 d^{10} & k_1 \\ c & m & k & t \end{bmatrix}$$

Затем вычтем из 2-ой и 3-ей строк первую строку, умноженную на d^4 и d^8 соответственно, получаем:

$$G_4 := \begin{bmatrix} \boxed{g_1} & g_1 d & g_1 d^2 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 - c_1 \cdot d^4 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 - c_1 \cdot d^8 \\ c & m & k & t \end{bmatrix}$$

Вычислим определитель данной матрицы через сумму произведений элементов четвертого столбца на их алгебраические дополнения.

Очевидно, что каждое из 4-ех алгебраических дополнений содержит как минимум одну нулевую строку, следовательно, определитель матрицы $G_4=0$.

Рассмотрим квадратную матрицу n-ого порядка, составленную из последовательных членов одной геометрической прогрессии:

$$G_n := \begin{bmatrix} \boxed{g_1} & g_1d & g_1d^2 & g_1d^3 & \ldots. & g_1d^{n-1} \\ g_1d^n & g_1d^{n+1} & g_1d^{n+2} & g_1d^{n+3} & \ldots. & g_1d^{2n-1} \\ g_1d^{2n} & g_1d^{2n+1} & g_1d^{2n+2} & g_1d^{2n+3} & \ldots. & g_1d^{3n-1} \\ g_1d^{3n} & g_1d^{3n+1} & g_1d^{3n+2} & g_1d^{3n+3} & \ldots. & g_1d^{4n-1} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ g_1d^{(n-1)n} & g_1d^{(n-1)n+1} & g_1d^{(n-1)n+2} & g_1d^{(n-1)n+3} & \ldots. & g_1d^{n^2-1} \end{bmatrix}$$

Заменим в исходной матрице последние x столбцов на произвольные числа $p \in \{p_{n(n-2)}\}$, где $n \geq (x+2)$, тогда мы можем изменить (n-x-2) последних строк на произвольные числа (в соответствии с нашей гипотезой). Мы можем изменить любые строки и столбцы, но для удобства доказательства мы меняем последние строки и столбцы. Тогда *неизменными останутся: (n-x) столбцов и (x+2) строк.*

$$G_n := \begin{bmatrix} \boxed{g_1} & g_1d & g_1d^2 & g_1d^3 & \ldots. & g_1d^{n-x-1} & \ldots. & p_6 \\ g_1d^n & g_1d^{n+1} & g_1d^{n+2} & g_1d^{n+3} & \ldots. & g_1d^{2n-x-1} & \ldots. & p_7 \\ g_1d^{2n} & g_1d^{2n+1} & g_1d^{2n+2} & g_1d^{2n+3} & \ldots. & g_1d^{3n-x-1} & \ldots. & p_8 \\ g_1d^{3n} & g_1d^{3n+1} & g_1d^{3n+2} & g_1d^{3n+3} & \ldots. & g_1d^{4n-x-1} & \ldots. & p_9 \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ g_1d^{(x+1)n} & g_1d^{(x+1)n+1} & g_1d^{(x+1)n+2} & g_1d^{(x+1)n+3} & \ldots. & g_1d^{(x+1)n-x-1} & \ldots. & p_{11} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \ldots. & p_5 & \ldots. & p_{13} \end{bmatrix}$$

Невооруженным глазом видна пропорциональность с первой по (x+2) строки в столбцах с первого по (n-x) с коэффициентами пропорциональности: d^n; d^{2n}; d^{3n};… $d^{(x+1)n}$ соответственно. Вычтем из второй, третьей, … , (x+2) - ой строк первую строку, умноженную на соответствующие коэффициенты. Обозначим разности, получающиеся в x последних столбцах через s_k, где $s_k \in \{s_{x(x+1)}\}$. Получим матрицу:

$$G_n := \begin{bmatrix} \boxed{g_1} & g_1d & g_1d^2 & g_1d^3 & \ldots. & g_1d^{n-x-1} & \ldots. & p_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots. & 0 & \ldots. & s_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots. & 0 & \ldots. & s_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots. & 0 & \ldots. & s_9 \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots. & 0 & \ldots. & s_{11} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \ldots. & p_5 & \ldots. & p_{13} \end{bmatrix}$$

Мы получили в первых (x+2) строках и первых (n-x) столбцах только одну ненулевую строку, а остальные (x+1) – нулевые строки.

Вычислим определитель матрицы через суммы произведений элементов n-ого столбца на их алгебраические дополнения. Эти алгебраические дополнения являются определителями (n-1) порядка.

Дальнейшие вычисления сводим к понижению порядка миноров в алгебраических дополнениях до столбца (n-x).

Все миноры порядка (n-x) содержат как минимум одну нулевую строку. Докажем это.

В результате преобразований ушло *x* последних столбцов, и *x* строк. Выше мы доказали, что количество нулевых строк в матрице G_n равно (x+1). Следовательно, в минорах, как минимум, остается одна нулевая строка.

Поэтому каждый минор равен нулю. И определитель матрицы G_n также равен нулю.

Данное свойство вырожденности сохраняется и для квадратных матриц, составленных из последовательных членов убывающей или знакочередующейся геометрической прогрессии, при замене (n-2) строк (столбцов) или их сочетаний на произвольные числа.

Т.е. матрица n-ого порядка, строки (столбцы) которой состоят из последовательных членов одной геометрической прогрессии, при замене (n-2) строк (столбцов) или их сочетаний на произвольные числа, остается вырожденной – гипотеза 2 доказана.

Более того, путём аналогичных рассуждений, нами было доказано, что *матрица n-ого порядка, строки (столбцы) которой состоят из последовательных членов разных геометрических прогрессий, при замене (n-2) строк (столбцов) или их сочетаний на произвольные числа, также остается вырожденной.*

Список использованных источников:

1. Смольняков И.М., Часов К.В. Некоторые свойства прогрессирующих последовательностей // Международный журнал экспериментального образования. – 2014. – № 7 ч.1. – С. 106-107.

2. Черепов К.Р., Часов К.В. Подготовка интерактивного обучающего документа по изучению свойств арифметических прогрессий // Прикладные вопросы точных наук / Материалы III Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов, преподавателей, посвящённой 60-летию со дня образования Армавирского механико-технологического института. 2019. С. 331-334.

3. Часов К.В., Горовенко Л.А. Математическая культура как неотъемлемая составляющая информационной образовательной среды инженерно-технического вуза: монография/ К.В. Часов, Л.А. Горовенко; Армавирский механико-технологический институт.- Армавир: РИО АГПУ, 2019. - 188 с.

4. Горовенко Л.А., Алексанян Г.А. Анализ дидактических возможностей использования в образовательном процессе инструментария виртуальной доски Realtimeboard // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки. 2019. № 2 (241). С. 47-53.

5. Шабозов М.Ш., Тухлиев Д.К. О совместном приближении функций и их последовательных производных в пространстве Бергмана // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2018. Т. 61. № 5. С. 419-426.

6. Алексанян Г.А. Об эффективности использования новых информационных технологий в обучении математике // Новые технологии. 2011. № 4. С. 229-231.