НЕРАВЕНСТВО ТИПА КОЛМОГОРОВА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

А.М. Маликов

к.ф-м. наук, старший преподаватель Худжандского государственного университета им. Б. Гафурова, Таджикистан, mumin4mss@gmail.com

Аннатация: Для среднеквадратических полиномиальных приближений функций получены точные неравенства типа Колмогорова на классах функций $L_{2,\rho}^{(r)}(a,b)$, в которых величины наилучших полиномиальных приближений оцениваются обобщенным модулем непрерывности m-го порядка, порожденным дифференциальным оператором второго порядка.

Ключевые слова*:* неравенства типа Колмогорова, наилучшее приближение, обобщённый модуль непрерывности, дифференциальный оператор.

INSPECTION OF KOLMOGOPOV TYPE FOR SOME CLASSES OF FUNCTIONS AND ITS APPLICATIONS

Abdumumin M.Malikov

Ph.D. Sci., Senior Lecturer, Khujand State University named after academician B. Gafurov, Khujand, Tajikistan, mumin4mss@gmail.com

Abstract: For root-mean-square polynomial approximate functions, sharp Kolmogorov-type inequalities are obtained on classes of functions as the best polynomial approximations and is estimated by the modulus of continuity of the m-th order generated by the second-order differential operator.

Key words: Kolmogorov-type inequalities, best approximation, generalized modulus of continuity, differential operator.

Из курса уравнений математической физики хорошо известно, что классические многочлены Лагерра, Эрмита-Чебышева и Якоби обычно возникают при решении различных дифференциальных уравнений методом разделения переменных, основанным на теоремах разложения по различным ортогональным системам функций. В последнее время наблюдается весьма интенсивное применение классических ортогональных многочленов в задачах численного анализа и математической статистики.

Функция $\mu(x)$ называется весовая функция на сегменте [a,b], если на этом сегменте она положителен, интегрируема и её интеграл неотрицательна, т.е., если $\mu(x) \geq 0$ и удовлетворяют условия

$$0 < \int_a^b \mu(x)dx < \infty.$$

Если же интервал (a, b) бесконечен, то кроме того, должны абсолютно сходиться и

Пусть $L_{2,\mu}(a, b) := L_2\big(a, b; \mu(x)\big)$ –пространство функций $f: (a, b) \to \mathbb{R}$, для которых функция $\mu^{1/2} \cdot f$ суммируема с квадратом на интервале (a, b). Пространство $L_{2,\mu}(a, b)$ –линейно, и если для двух функций $f, g \in L_{2,\mu}(a, b)$ ввести скалярное произведение двух функций по следуюший формуле

$$(f, g)_\mu := \int_a^b \mu(x) f(x) g(x) dx$$

и определить норму как $\| f \|_{2,\mu} := (f, f)_\mu^{1/2}$, то оно означает гильбертово пространство. Хорошо известно [1] что нужно рассматривать функции $\mu(x)$ на интервале (a, b) удовлетворяющие дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{d}{dx}\big(\sigma(x)\mu(x)\big) = \nu(x)\mu(x), \tag{1}$$

где σ и ν – соответственно полиномы не выше второй и первой степени.

Также известно [1], что только в трёх случаях решение μ сформулированной задачи в зависимости σ и ν, с точностью до линейного преобразования независимой переменной является весовой функцией на соответствующем интервале (a, b) для определения с точностью до постоянного множителя классических ортогональных многочлены на интервале (a, b), а именно, полиномов Якоби, Лагерра и Эрмита. Согласно [1; 2], с помощью D_μ обозначим дифференциальный оператор вида $D_\mu := \sigma(x)\frac{d^2}{dx^2} + \nu(x)\frac{d}{dx}$, и пусть $\lambda_n(\mu) := \lambda_n(\mu) = -n\nu' - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma''$.

Указанные выше классические ортогональные многочлены Якоби, Лагерра и Эрмита удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка

$$-D_\mu y = \lambda_n(\mu)y. \tag{2}$$

Из (2) следует, что числа $\lambda_n'(\mu), n \in \mathbb{Z}_+$, являются собственными значениями оператора $(-D_\mu)$, а соответствующими им собственные функции ортогональными на интервале (a, b) многочленами, соответствующими весовой функции μ(x).

Через $\mathcal{P}_k(x)(k = \overline{0, \infty})$ будем обозначать произвольную систему ортонормированных многочленов с функцией $\mu(x)$ в пространстве $L_{2,\mu} := L_{2,\mu}(a, b)$. Рассмотрим разложение в ряд Фурье по многочленам $P_k(x)$ функции $f \in L_{2,\mu}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) P_k(x). \tag{3}$$

Равенства (3) понимается в смысле сходимости в пространстве $L_{2,\mu}$;

$$c_k(f) \coloneqq \int_a^b \mu(x)f(x)P_k(x)dx$$

–коэффициенты Фурье функции f. Обозначим через $\mathcal{P}_n$ – подпространство алгебраических полиномов степени не выше n. Равенством

$$E_n(f)_{2,\mu} := \inf\{\, ||\, f - g_{n-1}||_{2,\mu} : g_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\}$$

– определим величину наилучшего приближения функции $f \in L_{2,\mu}$ элементами подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$. Через $S_{n-1}(f)$, $n \in \mathbb{N}$ обозначим частичную сумму ряда Фурье (3), т.е.

$$S_{n-1}(f,x) := \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f)P_k(x).$$

Известно [2], что для произвольной $f \in L_{2,\mu}$, $||f||_{2,\mu} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2(f)}$, $E_n(f)_{2,\mu} = ||f - S_{n-1}(f)||_{2,\mu} = \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)}$.

Пусть

$$T_\mu(x,y;h) := \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)P_k(y)h^k, \tag{4}$$

где $h \in (0,1)$, $x,y \in (a,b)$ и равенство в (4) понимается в смысле сходимости в среднем в пространстве $L_{2,\mu,\mu}((a,b)\times(a,b))$, которое состоит из интегрируемых в квадрате функций $f:(a,b)\times(a,b) \to \mathbb{R}$ с весом $\mu(x)\mu(y)$ и соответствующий нормой

$$||f||_{2,\mu,\mu} := \sqrt{\int_a^b \int_a^b \mu(x)\mu(y)f^2(x,y)dxdy} < \infty.$$

Следуя работам [1; 3] и используя формулу (4), для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}(a,b)$ запишем оператор усреднения

$$\mathcal{F}_{h,\mu}(f,x) := \int_a^b \mu(t)f(t)T_\mu(x,t,1-h)dt, \quad 0 < h \le 1.$$

Используя оператор вида (4) и (3) запишем специальные конечные разности первого и высших порядков для функции $f \in L_{2,\mu}$. Можно заметить, что в силу (4) $\mathcal{F}_{h,\mu}(f,x) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-h)^k c_k(f)P_k(x)$ а потому имеем $\Delta_{h,\mu}^1(f,x) := \mathcal{F}_{h,\mu}(f,x) - f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} ((1-h)^k - 1)c_k(f)P_k(x)$. Далее методом математической индукции получаем

$$\Delta_{h,\mu}^m(f,x) \coloneqq \Delta_{h,\mu}^1(\Delta_{h,\mu}^{k-1}(f),x)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} ((1-h)^k - 1)^m \mathrm{c}_k(f)P_k(x). \tag{5}$$

Примененяя равенство Парсеваля на (5) получаем

$$||\Delta_{h,\mu}^m||_{2,\mu}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (1-(1-h)^k)^{2m}\mathrm{c}_k^2(f). \tag{6}$$

С помощью равенства (6) для функции $f \in L_{2,\mu}$ находим обобщённый модель непрерывности m –го порядка равенствам

$$\Omega_{m,\mu}(f,t):=sup\{||\Delta_{h,\mu}^{m}(f)||_{2,\mu}: 0<h\leq 1\}=$$
$$=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(1-(1-t)^k)^{2m}C_k^2(f)},\quad 0<t<1.$$

Пусть $D_{\mu}^{0}f:=f$ и $D_{\mu}^{r}f:=D_{\mu}^{1}(D_{\mu}^{r-1}f),\, r\in N.$ Через $L_2^{(r)}(D)_{\mu}, r=2,3,...,$ обозначим множество функций $f\in L_{2,\mu}$, которые имеют абсолютно непрерывные производные $(2r-1)$ -го порядка и для которых $D_{\mu}^{r}f\in L_{2,\mu}$.

При этом для произвольной функции $f\in L_{2,\mu}$ все промежуточные производные $D_{\mu}^{s}(f),\ s=1,2,...,r-1,\ r\in N,$ наряду с самой функцией f и ее r-ной производной $D_{\mu}^{r}(f)$ также принадлежат пространству $L_{2,\mu}:=L_{2,\mu}(a,b)$. Это обстоятельство позволяет доказать неравенство типа Колмогорова для произвольной функции $f\in L_{2,\mu}^{(r)}$. Имеет место следующая

Теорема 1. *Для произвольной функции* $f\in L_{2,\mu}^{(r)}$ *при любых чисел* $r,s\in Z_{+},\ r\geq s$ *имеет место неравенство типа Колмогорова*

$$||D_{\mu}^{s}(f)||_{L_{2,\mu}}\leq ||f||_{L_{2,\mu}}^{1-s/r}\cdot||D_{\mu}^{r}(f)||_{L_{2,\mu}}^{s/r}, \tag{7}$$

где
$$D_{\mu}:=\sigma(x)\frac{d^2}{dx^2}+\tau(x)\frac{d}{dx},\ D_{\mu}^{0}(f)=f,\ D_{\mu}^{1}(f)=D_{\mu}(f),$$
$$D_{\mu}^{r}(f):=D_{\mu}^{1}\left(D_{\mu}^{r-1}(f)\right),\ r\in N.$$

Неравенство (7) точное в том смысле, что существует функция $f_0\in L_{2,\mu}^{(r)}$, для которой оно обращается в равенство.

Теорема 2. *Для произвольной функции* $f\in L_{2,\mu}^{(r)}$, *при любых* $n\in N, r,s\in Z_{+},\ r\geq s$ *имеет место неравенство типа Колмогорова*

$$E_{n-1}(D_{\mu}^{s}(f))_{L_{2,\mu}}\leq\frac{E_{n-1}(f)_{L_{2,\mu}}}{\left(E_{n-1}(f)_{L_{2,\mu}}\right)^{s/r}}\cdot\left(E_{n-1}(D_{\mu}^{r}(f))\right)^{s/r} \tag{8}$$

Теорема 3. *При любых* $n\in N,\ r,s\in Z_{+},\ r\geq s$ *имеет место экстремальное равенство*

$$\sup_{f\in W^{(r)}L_{2,\mu}}\frac{E_{n-1}(D_{\mu}^{s}(f))_{L_{2,\mu}}}{\left(E_{n-1}(f)_{L_{2,\mu}}\right)^{1-s/r}}=1.$$

В заключение отметим, что аналогичные экстремальные задачи когда в качестве аппарата приближении используются другие системы функций рассмотрены в [4; 5].

Список использованных источников:

1. Абилов В.А, Абилова Ф.В, Каримов М.К. Точные скорости сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам в пространстве $L_2((a,b),p(x))$. – Журнал вычислительной математики и математической физики 2009, т.49, 6, с. 966-980.
2. Тухлиев К., Маликов А.М. О приближении функций в среднем на всей оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева - Эрмита в L_2. // ДАН РТ. 2016, т.59, 7-8, С.282-289.
3. Маликов А.М. Среднеквадратические полиноминальные приближения функций на всей оси и значения поперечников // ДАН РТ. 2016, т.59, 11-12, С.457-462.
4. Шабозов М.Ш., Тухлиев К., Муродов К.Н. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье-Бесселя и значения n-поперечников некоторых классов функций. – Проблемы вычислительной и прикладной математики, 2015 – №2 – С. 39-47.
5. Тухлиев Д.К. О точных константах в теоремах о приближении функций в пространстве Бергмана // Учёные записки ХГУ им. Б.Гафурова, Серия естественные и экономические науки, 2018, №3 (46), с.12-22.