# ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФУРЬЕ-ЧЕБЫШЁВА

***А.М.Туйчиев***

преподаватель Худжандского государственного университета им. Б.Г.Гафурова, г. Худжанд, Таджикистан, t-87yil@mail.ru

**Аннотация:** Найдены точные неравенство типа Джексона-Стечкина между величиной наилучшего приближения функции частными суммами Фурье-Чебышева и обобщенными модулями непрерывности $m$-го порядка, определяемыми дифференциальным оператором второго порядка.

**Ключевые слова:** наилучшие приближения, оператор обобщенного сдвига, модуль непрерывности $m$ -го порядка, ряд Фурье-Чебышева, дифференциальный оператор.

# ON THE MEAN SQUARE POLYNOMIAL APPROXIMATION OF FUNCTIONS BY FOURIER-CHEBYSHEV SUMS

**A.M.Tuychiev**

Lecturer of B.G.Gafurov Khujand State University, Khujand, Tajikistan, t-87yil@mail.ru

**Abstract:** Exact inequalities of Jackson type Stechkin between the value of best approximation of functions by private sums of the Fourier - Chebyshev and generalized moduli of continuity of the $m$-th order defined by a differential operator of second order.

**Key words:** best approximation, generalized shift operator, modulus of continuity of $m$-order, Fourier-Chebyshev series, differentiation operator.

Различные модификации модулей непрерывности, базирующихся на операторах обобщенных сдвигов, позволяют формулировать естественные аналоги задач теории приближения функций и построенные по ним обобщенные модули гладкости могут быть лучше приспособлены для изучения связей между гладкостными свойствами функции и наилучшими приближениями этой функции в различных банаховых пространствах.

Различные результаты о приближении функций с использованием операторов обобщенного сдвига можно найти в [1–3] и в используемой в этих работах литературе. В подавляющем большинстве работ этого направления рассматривается приближение функций многочленами на конечном отрезке.

В данной работе операторы обобщенного сдвига применяются в вопросах приближения функций суммами Фурье-Чебышева в некоторых экстремальных задачах теории аппроксимации.

Приведем ряд необходимых обозначений и вспомогательные факты из работ [1-3]. Пусть $L_{2,\mu} := L_{2,\mu}[-1;1]$ – множество измеримых на отрезке $[-1;1]$ функций $f$ с весом $\mu(x) := 1/\sqrt{1-x^2}$, имеющих конечной нормой

$$\| f \|_{2,\mu} = \left( \int_{-1}^{1} \mu(x) f^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

В [1] изучена задача отыскания точной константы в неравенстве типа Джексона-Стечкина между величиной наилучшего среднеквадратического приближения функций $f \in L_{2,\mu}$ и обобщенного модуля непрерывности, порожденного оператором обобщенного сдвига

$$F_h f(x) = \frac{1}{2}[f(x\cos h + \sqrt{1-x^2}\sin h) + f(x\cos h - \sqrt{1-x^2}\sin h)]$$

и имеющего вид

$$\Omega_m^2(D^r;t)_{2,\mu} = \sup\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (1-\cos kh)^{2m} k^{4r} c_k^2(f) : |h| \le t \right\}, \tag{1}$$

где $D = (1-x^2)\dfrac{d^2}{dx^2} - x\dfrac{d}{dx}$ — дифференциальный оператор второго порядка Чебышева, $D^r f = D(D^{r-1} f), r \ge 2, r \in N,$ множество алгебраических полиномов степени не более $n,$ обозначим $P_n$. Пусть

$$\varepsilon_{n-1}(f) = \inf\{ \| f - p_{n-1} \| : p_{n-1} \in P_{n-1} \} \tag{2}$$

— наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\mu}$ элементами подпространства $P_{n-1}$.

Известно [2], что среди всех элементов $p_{n-1} \in P_{n-1}$ частичная сумма $S_{n-1}(f;x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) T_k(x)$ ряда Фурье-Чебышева

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) T_k(x), \quad c_k(f) = \int_{-1}^{1} \mu(x) f(x) T_k(x) dx,$$

$$T_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(k \arccos x), k = 1,2,\ldots$$

доставляет минимум величине (2). При этом

$$\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\mu} = \| f - S_{n-1}(f) \|_{2,\mu} = (\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f))^{1/2}. \tag{3}$$

Через $L_{2,\mu}^{(2r)} := L_{2,\mu}^{(2r)}[-1,1]$ обозначим множество функций $f \in L_{2,\mu}$, у которых производная $\mathrm{D}^r f \in L_{2,\mu}$. В [1] доказано, что для произвольной $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ имеет место точное неравенство

$$\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\mu} \le n^{-2r} \cdot \varepsilon_{n-1}(D^r f)_{2,\mu} \tag{4}$$

и равенство в (4) доставляет функция $f_0(x) = T_n(x) \in L_{2,\mu}^{(2r)}$. Имеет место следующая простая

**Лемма 1.** *Пусть* $m, n \in \mathrm{N}$. *Для произвольной функции* $f \in L_{2,\mu}$ *имеет место равенство*

$$\frac{1}{n^{4m}} \cdot \sum_{k=0}^{n} k^{4m} c_k^2(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f) = \frac{1}{n^{4m}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1)^{4m} - k^{4m}\right] \cdot E_k^2(f). \tag{5}$$

Лемма 1 представляет возможность доказать следующую обратную теорему теории приближения.

**Теорема 1.** *При любых* $m, n \in \mathrm{N}$ *справедливо экстремальное равенство*

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}} \frac{n^{2m} \cdot \Omega_m\left(f; \frac{2}{n}\right)_{2,\mu}}{\left\{\sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1)^{4m} - k^{4m}\right] \cdot E_k^2(f)_{2,\mu}\right\}^{1/2}} = 2^m. \tag{6}$$

Аналогичные экстремальные задачи, в пространстве Бергмана рассмотрены в [5].

Пусть $W_{2,\mu}^{(r)}(\mathrm{D}), r \in \mathrm{N}$ - класс функций $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$, для которых $\left\|D^r f\right\|_{2,\mu} \le 1.$

Имеет место следующая

**Теорема 2.** *Пусть* $r \in \mathrm{N}$ . *Тогда при любом* $n \in \mathrm{N}$ *справедливо равенство*

$$\varepsilon_{n-1}(W_{2,\mu}^{(r)}(D))_{2,\mu} = \sup\left\{\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\mu} : f \in W_{2,\mu}^{(r)}(D)\right\} = \frac{1}{n^{2r}}. \tag{7}$$

**Теорема 3.** *Пусть* $n, s, r \in \mathrm{N}$, $r \ge 2$ *и* $s < r$ . *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in W_{2,\mu}^{(r)}(D) \\ f \notin P_{n-1}}} \frac{\varepsilon_{n-1}(D^s f)_{2,\mu}}{\varepsilon_{n-1}^{1-s/r}(f)_{2,\mu}} = 1. \tag{8}$$

Неубывающую на $[0,\infty)$ функцию $\Phi$ назовем мажорантой $k$ –го порядка [5], если функция $t^{-k}\Phi(t)$ не возрастает на $[0,\infty)$, $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(t) \to 0$, при $t \to 0$. При $k = 1$ функцию $\Phi$ называют просто мажорантой. Через $W_{2,\mu}^{(r)}(\Omega_m, \Phi)_p$ $(r \in \mathrm{Z},\ 0 < p \le \infty)$ обозначим множество функций $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$, у которых производная $r$ –го порядка $D^r f$ при любых $h\in[0,3\pi/(4n)]$ удовлетворяет условию

$$\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)},t)_{2,\mu}\, g(t)dt\right)^{1/p} \le \Phi(h).$$

Отметим, что из равенства (8) несложным вычислением в качестве следствия можно получить равенство

$$\varepsilon_{n-1}(W_{2,\mu}^{(r)}(\Omega_m,\Phi)_p) = \sup\left\{\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\mu} : f\in W_{2,\mu}^{(r)}(\Omega_m,\Phi)_p\right\} =$$

$$= n^{-2r}\Phi(h)\cdot\left\{\int_0^h (1-\cos nt)^{mp}\varphi(t)dt\right\}^{1/p}.$$

Определенный интерес представляет изучение поведения $\varepsilon_{n-1}(D^s f)_{2,\mu}$ на классе $W_{2,\mu}^{(r)}(\Omega_m,\Phi)_p$ при $n>r\ge s,\ n\in\mathrm{N},\ r,s\in\mathrm{Z}_+,$ то есть требуется найти следующую величину

$$\varepsilon_{n-1}^{(s)}(W_{2,\mu}^{(r)}(\Omega_m,\Phi)_p) = \sup\left\{\varepsilon_{n-1}(D^s f)_{2,\mu} : f\in W_{2,\mu}^{(r)}(\Omega_m,\Phi)_p\right\}. \qquad (9)$$

В принятых обозначениях справедлива

**Теорема 4.** *Пусть* $\Phi$ *–мажоранта, определяющая класс функций* $W_{2,\mu}^{(r)}(\Omega_m,\Phi)_p$, *где* $0<p\le 2, m,r\in\mathrm{N},$ *и выполняется равенство (9). Тогда для любого* $n\in\mathrm{N},\ n>r$ *и произвольного* $s(0\le s\le r)$ *имеет место равенство*

$$\varepsilon_{n-1}^{(s)}(W_{2,\mu}^{(r)}(\Omega_{m,}\Phi)_p) = n^{-2(r-s)}\Phi(h)\cdot\left\{\int_0^h (1-\cos nt)^{mp}\varphi(t)dt\right\}^{1/p} \qquad (10)$$

Существует функция $g_1\in W_{2,\mu}^{(r)}(\Omega_m,\Phi)_p$, которая реализует знак равенства в (10).

Из теоремы 4 вытекает ряд утверждений.

**Следствие 1.** *В условиях теоремы* 4 *при* $p=1/m, m\in\mathrm{N}$ *и* $\varphi(t)\equiv 1$ *имеет место равенство*

$$\varepsilon_{n-1}^{(s)}(W_{2,mu}^{(r)}(\Omega_m;\Phi))_{1/m} = n^{-(n-s)}\Phi(h)\cdot\left\{\frac{n}{nh-\sin nh}\right\}^m,$$

*и, в частности, при* $nh=\pi/2$ *имеем*

$$\varepsilon_{n-1}^{(s)}(W_{2,\mu}^{(r)}(\Omega_m;\Phi))_{1/m} = n^{-(n-s)+m}\left(\frac{2}{\pi-2}\right)^m\cdot\Phi(h).$$

**Следствие 2.** *Если в теореме* 4 *полагать* $p=1/m, m\in\mathrm{N}$ *и* $\varphi(t)=t$, *то получаем*

$$\varepsilon_{n-1}^{(s)}(W_{2,\mu}^{(r)}(\Omega_m;\Phi))_{1/m} =$$

$$= 2^m n^{-2(n-s)} \left\{nh(nh-\sin nh)-[(nh)^2-2(1-\cos nh)]\right\}^{-m} \cdot \Phi(h),$$

откуда при $nh=\pi/2$ следует равенство

$$\varepsilon_{n-1}^{(s)}(W_{2,\mu}^{(r)}(\Omega_m;\Phi))_{1/m} = (\frac{4}{4-\pi})^m \cdot \frac{1}{n^{2(r-s)}} \cdot \Phi(\frac{\pi}{2n})$$

**Список использованных источников:**


1. Тухлиев К. Точные верхние грани отклонения некоторых классов функций от их частных сумм ряда Фурье-Чебышева в пространстве $L_2$, I // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2013, №4, С.33-46.
2. Туйчиев А.М. О среднеквадратическом полиномиальном приближении функций суммами Фурье-Чебышёва, //ДАН РТ, 2020, том , №11, С.517-527.
3. Тухлиев К., Туйчиев А.М. О совместном приближение функций и её производных частными суммами Фурье – Чебышева в $L_{2,\mu}[-1,1]$ //Учёные записки ХГУ им. Б.Гафурова, Серия естественные и экономические науки, 2018, №4 (47), С. 15-21.
4. Алексанян, Г. А. Исследование функций, заданных на множестве изолированных точек / Г. А. Алексанян, А. А. Аничков // Прикладные вопросы точных наук: Материалы III Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов, преподавателей – Армавир: РИО АГПУ, 2019. – С. 219-222.
5. Тухлиев Д.К. О точных константах в теоремах о приближении функций в пространстве Бергмана // Учёные записки ХГУ им. Б.Гафурова, Серия естественные и экономические науки, 2018, №3 (46), с. 12-22.
6. Тухлиев К., Туйчиев А.М. Среднеквадратическое приближение функций на всей оси с весом Чебышева-Эрмита алгебраическими полиномами, //Труды Института математики и механики УрО РАН, Том 26, №2, 2020. С. 270-277.