ТРЕУГОЛЬНИКИ МАКСИМАЛЬНОЙ ПЛОЩАДИ, ВПИСАННЫЕ В ВЫПУКЛУЮ ФИГУРУ

Н. В. Гриб [1)]***, Д. И. Юрченко*** [2)]

1) к.ф.-м.н., доцент Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка, г. Минск, Беларусь, nikolay.grib@mail.ru
2) студент Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка, г. Минск, Беларусь, 3430730@gmail.com

Аннотация: Получено необходимое условие максимума площади треугольника, вписанного в выпуклую фигуру.

Ключевые слова: выпуклая фигура, площадь фигуры, треугольник.

MAXIMUM AREA TRIANGLES INSCRIBED IN A CONVEX FIGURE

Nikolay V. Grib [1)]***, Dzmitry I. Yurchanka*** [2)]

1) Ph. D., associate Professor, Belarusian state pedagogical University named after Maxim Tank, Minsk, Belarus, nikolay.grib@mail.ru
2) The student Belarusian state pedagogical University named after Maxim Tank, Minsk, Belarus, 3430730@gmail.com

Abstract: The necessary condition for the maximum area of a triangle inscribed in a convex figure is obtained.

Keywords: convex figure, figure area, triangle.

Задачи, в которых в данную плоскую фигуру нужно вписать фигуру максимальной площади, достаточно распространены среди геометрических задач на экстремум. Например, вписать в треугольник параллелограмм наибольшей площади, в окружность – треугольник, прямоугольник или многоугольник с данными длинами сторон. Эти задачи имеют естественный прикладной смысл, ведь нередко возникает потребность из куска материала вырезать некоторую фигуру, обладающую наибольшей площадью. Как правило, фигуры, о которых идет речь, – это либо окружности, либо многоугольники, иначе инструментария элементарной геометрии недостаточно для решения.

Поставим в некотором смысле более общую задачу: *в данную выпуклую фигуру вписать треугольник максимальной площади*.

Вспомним сначала два свойства выпуклой фигуры, каждое из которых может быть положено в основу ее определения.

1. Отрезок, соединяющий две точки выпуклой фигуры, целиком принадлежит этой фигуре.

2. Через любую точку границы выпуклой фигуры можно провести такую прямую, что вся фигура будет лежать в одной замкнутой полуплоскости относительно этой прямой. Такая прямая называется *опорной* прямой фигуры.

Пусть F – данная выпуклая фигура, а γ – ее граница. Из первого свойства выпуклой фигуры следует, что для любых различных точек A, B, C ее границы треугольник ABC является вписанным, так как любая его точка принадлежит F.

Зафиксируем теперь точки A и B на γ и будем искать положение точки C, при котором площадь треугольника ABC будет наибольшей. Так как $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot d(C,AB)$ (через $d(C,AB)$ здесь обозначаем расстояние C от до AB), то понятно, что C должна быть максимально удалена от прямой AB. Следовательно, фигура F целиком должна лежать в одной замкнутой полуплоскости относительно прямой, проходящей через C параллельно AB, т.е. эта прямая должна быть опорной прямой фигуры F (рисунок 1). Точку C назовем в таком случае *стационарной* точкой треугольника ABC.

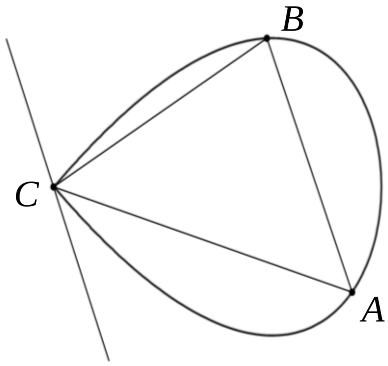

Рисунок 1 – Стационарная точка треугольника

Проведя аналогичные рассуждения для точек A и B, снова можно заключить, что для максимума площади треугольника они должны быть стационарными точками. Треугольник, все вершины которого – стационарные точки, будем называть *стационарным*. Таким образом, приходим к необходимому условию максимума площади вписанного треугольника:

Теорема 1. *Если треугольник имеет наибольшую площадь среди всех вписанных в данную фигуру треугольников, то он является стационарным, т.е. прямая, проходящая через любую его вершину параллельно противолежащей этой вершине стороне, является опорной прямой фигуры.*

Приведенное необходимое условие максимума площади не является достаточным. Например, в изображенном на рисунке 2 треугольнике Рело (см., например, [1, с. 91], [2, с. 99], [3, 4]) треугольник ABC является стационарным, но не наибольшим, максимальную площадь имеет треугольник $A_1B_1C_1$. К сожалению, получить общее достаточное условие не представляется возможным. Дело в том, что площадь вписанного треугольника представляет собой функцию от трех переменных – его вершин. Но никаких достаточных условий для глобального (в отличие от локального) максимума произвольной непрерывной или даже дифференцируемой функции не существует. Для его нахождения в общем случае приходится искать максимум функции на множестве ее стационарных точек. Так и в условиях нашей задачи общий подход к поиску максимального треугольника будет состоять в нахождении стационарного треугольника с наибольшей площадью.

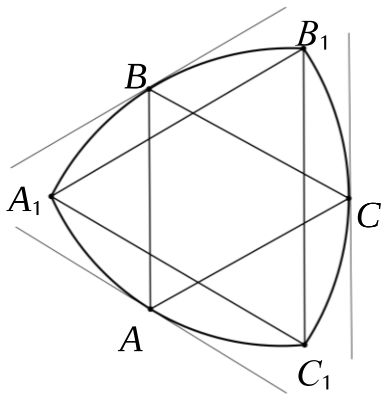

Рисунок 2 – Стационарные треугольники треугольника Рело

Далее приведем примеры нахождения максимальных вписанных треугольников, а также сформулируем некоторые утверждения, которые могут быть полезны при этом.

Стационарным треугольником, вписанным в круг, может быть только правильный треугольник, поэтому он и является наибольшим. Стационарный треугольник в квадрате – произвольный треугольник, две вершины которого находятся в соседних вершинах квадрата, а третья лежит на противолежащей стороне. Каждый такой треугольник имеет площадь, равную половине площади квадрата, и поэтому является максимальным.

Предложение 1. *Пусть F' и $A'B'C'$ – образы фигуры F и ее вписанного треугольника ABC максимальной площади при некотором аффинном преобразовании плоскости. Тогда $A'B'C'$ – треугольник максимальной площади, вписанный в F'.*

Утверждение является следствием инвариантности отношения площадей фигур при аффинном преобразовании, а также того факта, что образом треугольника при аффинном преобразовании является треугольник. Оно может быть использовано при исследовании фигур, которые подходящим аффинным преобразованием приводятся к более простым фигурам. Из утверждения, например, следует, что максимальный вписанный в эллипс треугольник – это образ правильного треугольника, вписанного в окружность, его легко построить с помощью сопряженных диаметров эллипса, как на рисунке 3. При этом для любой точки эллипса существует максимальный треугольник с вершиной в этой точке. Аналогично делается вывод о максимальном треугольнике параллелограмма, который является аффинным образом квадрата.

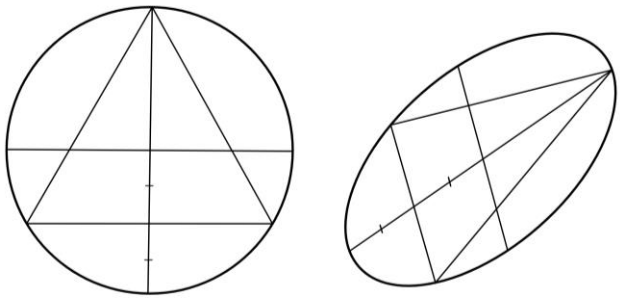

Рисунок 3 – Максимальный треугольник в эллипсе

Предложение 2. *Если треугольник ABC является максимальным для фигуры F, то он является максимальным и для любой фигуры, содержащейся в F и содержащей точки A, B, C.*

Доказательство утверждения элементарно. С его помощью задача автоматически решается в тех случаях, когда исследуемую фигуру можно поместить в некоторую фигуру с заранее известным максимальным треугольником, и этот треугольник принадлежит и исходной фигуре. Например, максимальность треугольника $A_1B_1C_1$ на рисунке 2 следует из того, что он является максимальным и для описанной около него окружности, содержащей в том числе и исходный треугольник Рело.

Рассмотрим решение задачи о треугольнике максимальной площади, вписанного в фигуру F, граница γ которой – гладкая выпуклая кривая, заданная параметрически уравнениями $x = x(t), y = y(t)$. Пусть вершины треугольника имеют координаты $A(x(t_1), y(t_1))$, $B(x(t_2), y(t_2))$, $C(x(t_3), y(t_3))$. Так как в каждой точке своей границы фигура F имеет единственную опорную прямую – касательную в этой точке, то условие стационарности точки C будет состоять в параллельности прямой AB и касательной к F в точке C, что равносильно коллинеарности направляющих векторов этих прямых. Так как $\overline{AB}\ (x(t_2) - x(t_1), y(t_2) - y(t_1))$, $\bar{c}\ (x'(t_3), y'(t_3))$, получим равенство

$$\frac{x'(t_3)}{x(t_2) - x(t_1)} = \frac{y'(t_3)}{y(t_2) - y(t_1)}.$$

Записав аналогичные условия стационарности точек A и B, придем к системе

$$\begin{cases} x'(t_1)(y(t_3) - y(t_2)) = y'(t_1)(x(t_3) - x(t_2)), \\ x'(t_2)(y(t_3) - y(t_1)) = y'(t_2)(x(t_3) - x(t_1)), \\ x'(t_3)(y(t_2) - y(t_1)) = y'(t_3)(x(t_2) - x(t_1)), \end{cases} \qquad (1)$$

которая и представляет необходимое условие максимума площади вписанного треугольника.

Для примера рассмотрим кривую $x = \sin^2 t + 3\cos t$, $y = 3\sin t + \cos t$. Как чаще всего и бывает в подобных задачах, точное решение системы (1) получить невозможно, поэтому все приближенные решения получены численно в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica, после чего выбрано то из них, при котором площадь треугольника ABC максимальна. Фигура и максимальный треугольник представлены на рисунке 4.

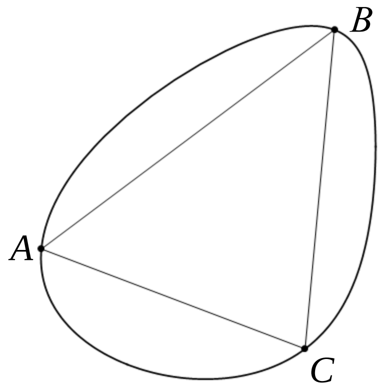

Рисунок 4 – Максимальный треугольник фигуры, заданной параметрически

Список использованных источников:

1. Яглом, И. М. Выпуклые фигуры / И. М. Яглом, В. Г. Болтянский. – М.-Л. : Гостоптехиздат, 1951. – 343 с.

2. Милостивенко Д.А., Горовенко Л.А. Особенности использования геометрической формы треугольника Рёло при проектировании деталей машин // Прикладные вопросы точных наук: Материалы I Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов, преподавателей.- Армавир: ООО «Типография имени Г. Скорины», 2017. – С. 98-101.

3. Горовенко Л.А. О развитии математической культуры студентов инженерного вуза // Прикладные вопросы точных наук Материалы III Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов, преподавателей. - Армавир: РИО АГПУ, 2019. - С. 280-282.

4. Часов К.В., Горовенко Л.А. Математическая культура как неотъемлемая составляющая информационной образовательной среды инженерно-технического вуза: монография/ К.В. Часов, Л.А. Горовенко; Армавирский механико-технологический институт.- Армавир: РИО АГПУ, 2019. - 188 с.