НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ДВУХ КАРТ

В. С. Миналто [1], С. А. Салтавец [2]

1) студент Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка, г. Минск, Беларусь, minalto.v.s@gmail.com
2) студент Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка, г. Минск, Беларусь, saltavetss@mail.ru

Аннотация: Решена задача о неподвижных точках двух карт с помощью метода преобразований плоскости.

Ключевые слова: преобразование плоскости; движение; преобразование подобия; неподвижная точка преобразования.

FIXED POINTS OF TWO MAPS

Vadim S. Minalto [1], Stefan A. Saltavets [2]

3) The student Belarusian state pedagogical University named after Maxim Tank, Minsk, Belarus, minalto.v.s@gmail.com
4) The student Belarusian state pedagogical University named after Maxim Tank, Minsk, Belarus, saltavetss@mail.ru

Abstract: The problem of fixed points of two maps is solved using the method of plane transformations.

Keywords: plane transformations, plane motion, similarity transformation, transformation fixed point.

Во многих сборниках олимпиадных задач по математике, а также книгах, посвященных нестандартным математическим задачам (например, [1, стр.63]), можно встретить очень популярную задачу о картах разных масштабов: «Две прямоугольные карты одной местности разного масштаба наложены друг на друга так, что меньшая карта лежит целиком на большей. Докажите, что их можно проткнуть булавкой так, чтобы на обеих картах была проколота одна и та же точка местности» (рисунок 1).

Идея приводимого доказательства состоит в следующем. Пусть K_1 – большая карта, K_2 – карта меньшего размера. Отметим на K_2 тот же район, что занимает K_2 на K_1. Представим теперь, что в точности в этом районе лежит карта K_3 той же местности. Проделаем с картами K_2 и K_3 такую же процедуру и получим новую область и новую карту K_4. Повторяя этот процесс, получим бесконечную последовательность вложенных все уменьшающихся карт (рисунок 2), поэтому существует единственная точка, принадлежащая всем картам последовательности. Эта точка и является искомой, будем в дальнейшем называть ее неподвижной точкой двух карт.

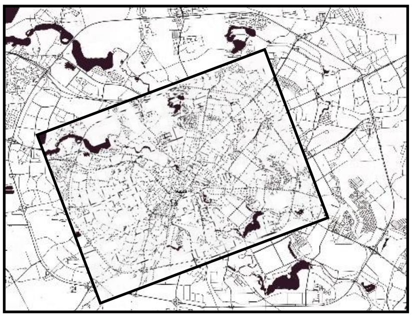

Рисунок 1

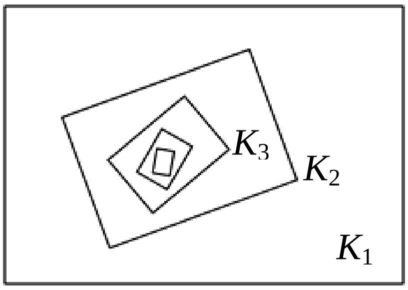

Рисунок 2

Это безусловно красивое доказательство не требует специальных знаний и доступно даже школьнику. Обратной стороной простоты является неполнота доказательства – для обеспечения его строгости все-таки нужны сведения из математического анализа, топологии [3, 4, 5] .

Рассмотрим некоторые естественные вопросы, которые могут появиться после знакомства с задачей.

1. Существует ли неподвижная точка, если:

- меньшая карта перевернута;
- меньшая карта не полностью лежит внутри большей;
- обе карты одинаковы, т.е. имеют один масштаб?

2. Возможно ли, что неподвижная точка не является единственной?

3. Можно ли найти все неподвижные точки в каждом из рассмотренных случаев?

Сформулируем теперь задачу в более общем виде.

На столе лежат две карты одной местности. Найти все их неподвижные точки.

Метод, применяемый при решении исходной задачи, теперь оказывается непригодным. Дело здесь в том, что исследуемая задача относится скорее не к топологии, а к элементарной геометрии, и наиболее естественный метод ее решения – метод движений и подобий плоскости.

Пусть карты F и F' лежат на плоскости П. Обозначим их вершины через $ABCD$ и $A'B'C'D'$ соответственно. Будем рассматривать преобразования плоскости П, переводящие F в F'. Задача сводится к нахождению неподвижных точек таких преобразований и проверке их принадлежности F и F'. Необходимо выделить два принципиально разных случая.

1. Карты равны, т.е. имеют одинаковый масштаб. В этом случае F в F' переводится некоторым движением ψ – тем же движением плоскости П, которое прямоугольник $ABCD$ переводит в прямоугольник $A'B'C'D'$. Из теоремы Шаля известно, что существует 4 типа движений плоскости:

параллельный перенос, поворот, осевая симметрия и скользящая симметрия. При этом параллельный перенос и поворот являются собственными преобразованиями (или преобразованиями первого рода, не меняют ориентацию плоскости), а осевая и скользящая симметрии – несобственными (или преобразованиями второго рода, меняют ориентацию плоскости). Снова нужно рассмотреть два случая.

1.1. Пусть обе карты лежат «лицом» вверх, тогда движение ψ – собственное. Тип движения можно однозначно определить по его действию на три точки общего положения, но если заранее известен род движения, то достаточно двух точек. Следовательно, если отрезки AB и $A'B'$ параллельны (рисунок 3), то ψ – параллельный перенос и поэтому не имеет неподвижных точек. В противном случае ψ – поворот. Центр поворота O является его неподвижной точкой, он находится на пересечении серединных перпендикуляров к отрезкам AA' и BB' (рисунок 4). Понятно, что точка O может не принадлежать прямоугольникам $ABCD$ и $A'B'C'D'$, в этом случае у карт нет неподвижной точки.

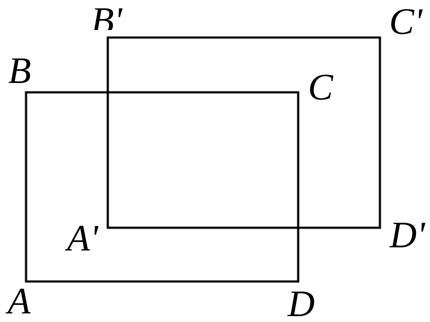

Рисунок 3

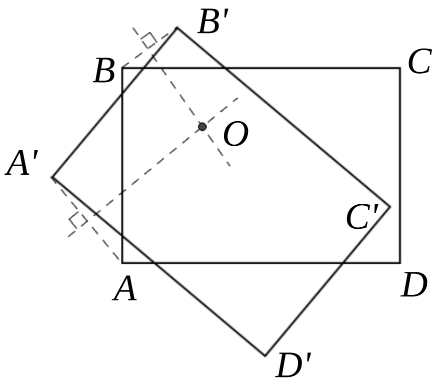

Рисунок 4

1.2. Одна карта лежит «лицом» вверх, а другая – «лицом» вниз. В этом случае движение ψ является несобственным, а значит, осевой или скользящей симметрией. Так как при осевой симметрии ось является серединным перпендикуляром к отрезку, образованному любой точкой и ее образом, убедимся, совпадают ли серединные перпендикуляры l и l' к отрезкам AA' и BB'. Если совпадают, то ψ – осевая симметрия с осью l, а любая точка на l является неподвижной точкой ψ (рисунок 5). Поэтому неподвижными точками карт будут все точки отрезка прямой l, лежащего в прямоугольнике $ABCD$. Если l и l' не совпадают, то ψ – скользящая симметрия, которая не имеет неподвижных точек.

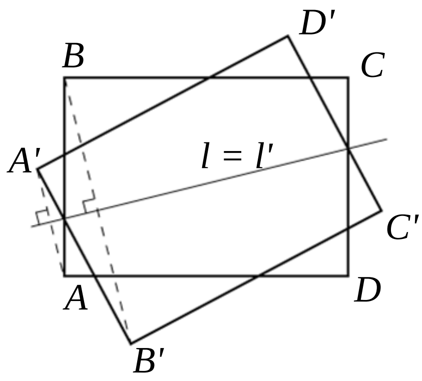

Рисунок 5

2. Пусть теперь карты имеют разный масштаб, например, F больше F'. В этом случае F в F' переводит некоторое преобразование подобия с коэффициентом $k = A'B' / AB$. Как известно ([5, стр. 81]), любое преобразование подобия с коэффициентом, отличным от единицы, имеет единственную неподвижную точку, обозначим ее через O. Для нахождения точки O будем использовать окружность Аполлония – геометрическое место точек плоскости, отношение расстояний от которых до двух заданных точек есть величина постоянная, не равная единице. Из соотношений $OA' = k\,OA$, $OB' = k\,OB$, $OC' = k\,OC$ следует, что точка O должна принадлежать каждой из трех окружностей, определяемых парами точек A и A', B и B', C и C', а также коэффициентом k. Эти окружности легко строятся с помощью циркуля и линейки, а точка их пересечения является искомой точкой O (рисунок 6). Заметим, что в этих рассуждениях не имеет значения, лежат ли обе карты «лицом» вверх или одна вверх, а другая – вниз. В действительности можно ограничиться построением любых двух из трех окружностей Аполлония, например, для пар A и A', B и B'. Для определения, какая из двух точек пересечения является искомой, нужно воспользоваться тем фактом, что треугольники AOB и $A'OB'$ должны иметь одну ориентацию, если обе карты лежат «лицом» вверх, и разную ориентацию, если одна карта лежит «лицом» вверх, а одна – вниз.

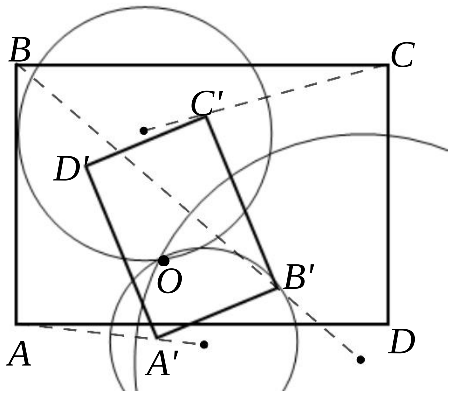

Рисунок 6

В заключение докажем утверждение первоначальной задачи, что если меньшая карта лежит целиком внутри большей, то они имеют неподвижную точку. От противного, пусть их неподвижной точки не существует, это значит, что O – неподвижная точка подобия ψ, переводящего F в F', – не принадлежит F'. Тогда, очевидно, она не может принадлежать и F, ведь точка внутри карты переходит в точку внутри карты. Остается рассмотреть случай, когда O лежит вне F. Пусть M – ближайшая к O точка прямоугольника $ABCD$, $\psi(M) = M'$ (рисунок 7). Тогда $OM' \geq OM$, но вместе с этим должно выполняться равенство $OM' = k\,OM$, где $k < 1$ – коэффициент подобия ψ. Получили противоречие, которое и доказывает утверждение.

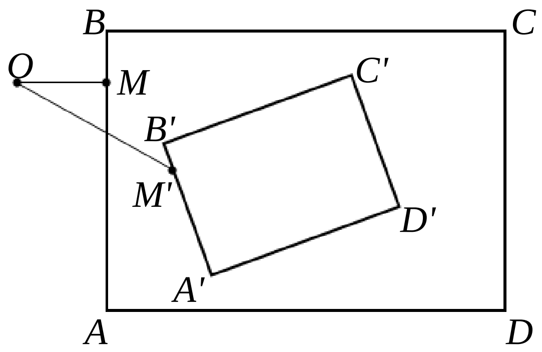

Рисунок 7

Библиографические ссылки

1. Канель-Белов А.Я. Как решают нестандартные задачи / А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи ; под ред. В. О. Бугаенко. – 5-е изд., испр. – М. : Изд-во МЦНМО, 2009. – 94 с.
2. Горовенко Л.А. О развитии математической культуры студентов инженерного вуза // Прикладные вопросы точных наук Материалы III Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов, преподавателей. - Армавир: РИО АГПУ, 2019. - С. 280-282.
3. Часов К.В., Горовенко Л.А. Математическая культура как неотъемлемая составляющая информационной образовательной среды инженерно-технического вуза: монография/ К.В. Часов, Л.А. Горовенко; Армавирский механико-технологический институт.- Армавир: РИО АГПУ, 2019. - 188 с.
4. Алексанян, Г. А. Исследование функций, заданных на множестве изолированных точек / Г. А. Алексанян, А. А. Аничков // Прикладные вопросы точных наук: Материалы III Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов, преподавателей – Армавир: РИО АГПУ, 2019. – С. 219-222.
5. Атанасян, Л. С. Геометрия : в 2 ч. / Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев. – М. : Просвещение, 1986. – Ч. 1. – 336 с.