НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ЧАСТИЧНЫМИ СУММАМИ ФУРЬЕ-БЕССЕЛЯ

К.Н. Муродов

к.ф.м.н., доцент, Худжандского государственного университета имени академика Бободжона Гафурова, г. Худжанд, Таджикистан, kn-murodov@mail.ru

Аннотация: В статье рассматривается задача приближения дифференцируемых функции двух переменных круговыми" суммами Фурье-Бесселя в гильбертовом пространстве с весом xy.

Ключевые слова: функция Бесселя, наилучшее приближение, оператор обобщённого сдвига, двойной ряд Фурье-Бесселя, обобщённый модуль непрерывности k –го порядка.

APPROXIMATIONS OF FUNCTIONS OF TWO VARIABLES BY FOURIER-BESSEL SUMS

K.N. Murodov

Ph.D., Associate Professor, Academician Bobojon Gafurov Khujand State University, Khujand, Tajikistan, kn-murodov@mail.ru

Abstract: The article deals with the problem of approximating the differentiable functions of two variables by circular" amounts Fourier-Bessel in a Hilbert space with weight xy.

Key words: Bessel function, the best approximation, generalized shift operator, double Fourier-Bessel series, generalized modulus of continuity k-th order.

В последнее время наблюдается весьма интенсивное применение специальных функций в задачах численного анализа и математической статистики [1]. При решении указанных задач в качестве аппарата приближения используются обобщённые полиномы по системе ортогональных функции Бесселя. Это приводит к отысканию оптимальных оценок аппроксимации функций посредством частных сумм рядов Фурье по ортогональным разложениям указанных специальных функций. Вопросы приближения функций одной переменной суммами Фурье-Бесселя рассмотрены работах [2-5]. Здесь решаются аналогичные задачи для приближения функций двух переменных «круговыми» суммами Фурье-Бесселя.

Пусть $L_2 := L_2(Q; xy)$ – пространство функций $f : Q \to R,$ квадратично суммируемых с весом xy в квадрате $Q = [0,1]\times[0,1]$ и конечной нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2(Q)} = \left(\iint\limits_{Q)} xyf^2(x,y)dxdy \right)^{1/2}$$

Всюду, далее через $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$ обозначим соответственно нули функций Бесселя $J_p(t)$ и $J_q(t)$ – первого рода порядков p и q, расположенные в порядке возрастания, то есть

$$J_p(\lambda_n) = 0, \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \cdots,$$

$$J_q(\mu_m) = 0, \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_m < \mu_{m+1} < \cdots.$$

Хорошо известно (см., напр.[1]), что система функций

$$J_p(\lambda_n x) J_q(\mu_m y),\ n, m = 1, 2, \cdots$$

является полной ортогональной системой в пространстве L_2. Без умаления общности и без введения новых обозначений будем предполагать, что эта система является ортонормальной. Для функции $f \in L_2$ вводим в рассмотрение двойные ряды Фурье–Бесселя

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}(f) J_p(\lambda_n x) J_q(\mu_m y), \tag{1}$$

где

$$c_{nm}(f) = \iint_{(Q)} xyf(x,y) J_p(\lambda_n x) J_q(\mu_m y) dxdy.$$

Равенство

$$S_R(f; xy) = \sum_{(n,m)\in\gamma(R)} c_{nm}(f) J_p(\lambda_n x) J_q(\mu_m y),$$

где $\gamma(R) = \{(n,m) : 0 < \lambda_n^2 + \mu_m^2 < R^2, n, m \in N, R << 1\}$, называют “круговыми” частными суммами ряда (1).

Символом P_R обозначим множество полиномов вида

$$P_R(x,y) = \sum_{(n,m)\in\gamma(R)} a_{nm}(f) J_p(\lambda_n x) J_q(\mu_m y)$$

и равенством

$$E_R(f)_2 = \inf\{\|f - P_R\|_2 : P_R \in P_R\}$$

определим величину наилучшего приближения функции $f \in L_2$ элементами множества P_R. Нетрудно проверить, что

$$E_R^2(f)_2 = \|f - S_R(f)\|_2 = \sum_{(n,m)\in\bar{\gamma}(R)} c_{nm}^2(f), \tag{2}$$

где $\bar{\gamma}(R) = (N \times N) \setminus \gamma(R).$

Введём в рассмотрение функцию

$$T(x,u;y,\vartheta;h) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} J_p(\lambda_n x) J_p(\lambda_n u) J_q(\mu_m y) J_q(\mu_m \vartheta) h^{\lambda_n + \mu_m},$$

где $h \in (0,1)$ и сходимость ряда в правой части понимается в смысле сходимости в пространстве $L_2(Q \times Q; xyu\vartheta)$.

Рассмотрим следующий оператор в L_2:

$$F_h f(x,y) = \iint_{(Q)} u\vartheta f(u,\vartheta) T(x,u;y,\vartheta;1-h) du d\vartheta,$$

который называется оператором обобщёного сдвига.

Определим, как и в классическом случае, конечные разности первого и высших порядков функции $f \in L_2$ равенствами

$$\Delta_h f = F_h f - f = (F_h - E) f,$$

$$\Delta_h^k f = \Delta_h(\Delta_h^{k-1} f) = (F_h - E)^k f = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} F_h^k(f),$$

где

$$F_h^0 f = Ef = f, F_h^i f = F_h(F_h^{i-1} f), i = \overline{1,k}, k \in N$$

и E – единичный оператор в L_2. Пусть

$$D = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} - \frac{p^2}{x^2} - \frac{q^2}{y^2}$$

– дифференциальный оператор Бесселя второго порядка, для которого

$$DJ_p(\lambda_n x) J_q(\mu_m y) = -(\lambda_n^2 + \mu_m^2) J_p(\lambda_n x) J_q(\mu_m y)$$

и, в силу линейности и однородности оператора D, из последнего равенства при любом $r \in N$ имеем

$$D^r J_p(\lambda_n x) J_q(\mu_m y) = D^{r-1}\left(DJ_p(\lambda_n x) J_q(\mu_m y)\right) =$$
$$= (-1)^r (\lambda_n^2 + \mu_m^2)^r J_p(\lambda_n x) J_q(\mu_m y).$$

Выражение

$$\Omega_k(f;\delta) = sup\left\{\left\|\Delta_h^k f(\cdot)\right\| : 0 < h \le \delta\right\} \tag{3}$$

будем называть обобщённым модулем непрерывности k–го порядка функции $f \in L_2$.

Через $L_2^{(2r)} := L_2^{(2r)}(D)$ обозначим класс функций $f \in L_2$, у которых частные производные

$$\frac{\partial^k}{\partial x_i \partial y_j} f(x,y),\ i + j = k,\ k \in N$$

существуют, принадлежат L_2, и таких, для которых $D^r f \in L_2$, а через $W^{(r)}L_2$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(2r)}$, таких, для которых $\left\|D^r f\right\|_2 \le 1, r \in N.$

Имеет место следующая

Теорема 1. *При любых* $r, s \in N, r > s$ *и достаточно большого* R *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(2r)}} \frac{E_R(D^s f)_2}{E_R\left(D^r f\right)_2} = \frac{1}{R^{2(r-s)}}. \tag{4}$$

Далее, при любых $r, s \in N,\ r > s$ и достаточно большом $R,$ положим

$$E_R^{(s)}(W^{(r)}L_2) = \sup\left\{E_R(D^s f)_2 : f \in W^{(r)}L_2\right\}.$$

В этих обозначениях имеет место следующая

Теорема 2. *При любых* $s, r \in N,\ r > s$ *и достаточно большом* R *справедливо равенство*

$$E_R^{(s)}(W^{(r)}L_2) = \frac{1}{R^{2(r-s)}}. \tag{5}$$

Теорема 3. *Пусть* $r, s \in N, r > s.$ *Тогда для произвольной функции* $f \in L_2, D^r f \ne const$ *справедливо точное на* L_2 *неравенство*

$$\left\|D^{s} f\right\|_{2} \leq\left\|D^{r} f\right\|_{2}^{s/r}\ \|f\|_{2}^{1-s/r}. \qquad (6)$$

Из теоремы 3 вытекает

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы* 3 *имеет место точное неравенство*

$$E_{R}(D^{s} f)_{2} \leq (E_{R}(D^{s} f)_{2})^{s/r}(E_{R}(f)_{2})^{1-s/r}, \qquad (7)$$

которое обращается в равенство для $f_{0}(x, y)=J_{p}(\lambda_{n} x) J_{q}(\mu_{m} y) \in L_{2}^{(2r)}$, где $\lambda_{n}^{2}+\mu_{m}^{2}=R^{2}$.

Теорема 4. *Пусть* $n, s, r \in N, r>s$ *и* R *достаточна большое число. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in W^{(r)} L_{2}} \frac{E_{R}(D^{s} f)_{2}}{\left(E_{R}(f)_{2}\right)^{1-s/r}}=1. \qquad (8)$$

Для характеристики гладкости (3) имеет место следующее утверждение

Теорема 5. *Для любых* $k \in N$, $r, s \in Z_{+}, h \in(0,1)$ *и достаточно большого* R $(R<<1)$ *справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_{2}^{(2r)} \\ D^{r} f \neq const}} \frac{R^{2(r-s)} E_{R}(D^{s} f)_{2}}{\Omega_{k}\left(D^{r} f ; h\right)_{2}}=\frac{1}{[1-(1-h)^{R^{2}}]^{k}}. \qquad (9)$$

Следствие 2. *В условиях теоремы* 5 *имеет место предельное равенство*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{\substack{f \in L_{2}^{(2r)} \\ D^{r} f \neq const}} \frac{R^{2(r-s)} E_{R}(D^{s} f)_{2}}{\Omega_{k}\left(D^{r} f ; R^{-2}\right)_{2}}=\left(1-\frac{1}{e}\right)^{-k}.$$

Отметим, что аналогичные экстремальные задачи в пространстве Бергмана рассмотрены в [6].

Список использованных источников:

1. Алексанян, Г. А. Исследование функций, заданных на множестве изолированных точек / Г. А. Алексанян, А. А. Аничков // Прикладные вопросы точных наук: Материалы III Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов, преподавателей – Армавир: РИО АГПУ, 2019. – С. 219-222.
2. Шабозов М.Ш., Тухлиев К., Муродов К.Н. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье-Бесселя и значения n-поперечников некоторых классов функций. – Проблемы вычислительной и прикладной математики, 2015 – №2 – С. 39-47.
3. Тухлиев К., Муродов К.Н. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье - Бесселя и значения K–функционалов – Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2015 – №4(161) – С. 16-26
4. Тухлиев К., Муродов К. Н. Точные верхние грани наилучших приближений суммами Фурье-Бесселя в пространстве $l_{2,\nu}$ и значения

поперечников некоторых классов функций – Изв. АН РТ. Отд.физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2017 – №2(167) – С. 17-29.
5. Муродов К.Н. О приближении функций суммами Фурье-Бесселя и значение поперечников функциональных классов – ДАН РТ. 2017 – т.60 – №1-2 – С. 20-25.
6. Тухлиев Д.К. Об одновеременном полиномиальном приближении функций и их производных в пространстве Бергмана // Изв. АН РТ., Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. №2. 2019. С.14-18.