ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ ЧАСТНЫМИ СУММАМИ РЯДОВ ФУРЬЕ–ЧЕБЫШЁВА В ПРОСТРАНСТВЕ $L_{2,\mu}$

Бекназаров Дж.Х.

к.ф.м.н., доцент, Худжандского государственного университета имени академика Бободжона Гафурова, г. Худжанд, Таджикистан,
beknzarov-jurabek@mail.ru

Аннотация: Рассматривается задача вычисления точной верхней грани наилучшего полиномиального приближения некоторых классов дифференцируемых функций, принадлежащих гильбертовому пространству с весом Чебышёва.

Ключевые слова: наилучшее полиномиальное приближение, обобщённый модуль непрерывности, константа Джексона–Стечкина, коэффициенты Фурье–Чебышёва, n -поперечники.

APPROXIMATIONS OF SOME CLASSES OF FUNCTIONS BY PRIVATE SUMS OF FOURIER – CHEBYSHEV SERIES IN SPACE $L_{2,\mu}$

J.Kh. Beknazarov

Ph.D., Associate Professor, Academician Bobojon Gafurov Khujand State University, Khujand, Tajikistan, beknzarov-jurabek@mail.ru

Abstract: We consider the problem of computing the exact upper bound of the best polynomial approximation of certain classes of differentiable functions belonging to the Hilbert space with Chebyshev weight.

Key words: best polynomial approximation, a generalized modulus of continuity, the Jackson – Stechkin constant, the Fourier – Chebyshev, n -widths.

В работе найдены точные значения верхних граней отклонения некоторых классов функций от их частных сумм рядов Фурье–Чебышёва в гильбертовом пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]:=L_2(\mu(x);[-1,1])$ с весом Чебышёва $\mu(x)=1/\sqrt{1-x^2}$ суммируемых с квадратом функций $f:[-1;1]\to\mathbb{R}:=(-\infty,+\infty)$ и конечной нормой

$$\|f\|_{L_{2,\mu}[-1,1]}=\left(\int_{-1}^{1}\mu(x)f^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

Введём обозначения: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+=\mathbb{N}\cup\{0\}$,

$\mathrm{R}_+ := (0,\infty)$ – множество всех положительных чисел. Следуя работе [1], в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$ рассмотрим оператор

$$F_h f(x) = \frac{1}{2}\left[f\left(x\cosh + \sqrt{1-x^2}\sin h \right) + f\left(x\cosh - \sqrt{1-x^2}\sin h \right) \right], \tag{1}$$

который будем называть *оператором обобщённого сдвига,* и введём в рассмотрение конечные разности первого и высших порядков равенствами

$$\Delta_h^1(f;x) = F_h f(x) - f(x) = (F_h - \mathrm{I}) f(x),$$

$$\Delta_h^m(f;x) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1}(f;\cdot);x) = (F_h - \mathrm{I})^m f(x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k} F_h^k f(x),$$

где $F_h^0 f(x) \equiv f(x), F_h^k f(x) = F_h(F_h^{k-1} f(x)), k = 1,2,\ldots,m; m \in \mathrm{N}$ и I – единичный оператор в пространстве L_2.

Определим обобщённый модуль непрерывности m-го порядка равенством

$$\Omega_m(f;t)_{L_{2,\mu}[-1,1]} = \sup\{\| \Delta_h^m(f;.) \|_{L_{2,\mu}[-1,1]} : |h| \le t\}. \tag{2}$$

Пусть далее

$$T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad T_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(k\arccos x), k = 1,2,\ldots \tag{3}$$

– ортонормированная система многочленов Чебышёва первого рода в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$. Тогда, как хорошо известно [2],

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) T_k(x) \tag{4}$$

есть ряд Фурье–Чебышёва функции $f \in L_{2,\mu}[-1,1]$, а

$$c_k(f) = \int_{-1}^{1} \mu(x) f(x) T_k(x) dx \tag{5}$$

– коэффициенты Фурье-Чебышёва. Равенство в (4) понимается в смысле сходимости в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$.

Пусть теперь $D = (1-x^2)\dfrac{d^2}{dx^2} - x\dfrac{d}{dx}$ – дифференциальный оператор второго порядка. Операторы высших порядков определим последовательно, полагая $D^r = D(D^{r-1} f), (r = 2,3,\ldots)$. Известно [3], что многочлены (3) удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)T_k''(x) - xT_k'(x) + k^2 T_k(x) = 0, \tag{6}$$

а потому из (6) следуют равенства

$$DT_k(x) = -k^2 T_k(x), \ldots, D^r T_k(x) = (-1)^r k^{2r} T_k(x). \tag{7}$$

В [1] показано, что для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}[-1,1]$, коэффициенты Фурье-Чебышёва (5) ряда (4) удовлетворяют соотношениям

$$c_k(f) = (-1)^r k^{-2r} c_k(D^r f), k = 1,2,\ldots, \tag{8}$$

$$c_k(F_h f) = \cos kh \cdot c_k(f), k = 1,2,\ldots, \tag{9}$$

где функция $F_h f$ – определена равенством (1).

Обозначим через $L_{2,\mu}^{(2r)}[-1,1]\,(r \in \mathbb{Z}_+, L_{2,\mu}^{(0)}[-1,1] = L_{2,\mu}[-1,1])$ – множество функций $f \in L_{2,\mu}[-1,1]$, у которых производная $D^r f$ принадлежит пространству $L_{2,\mu}[-1,1]$. Всюду далее вместо $L_{2,\mu}[-1,1], L_{2,\mu}^{(2r)}[-1,1]$, $\| f \|_{L_{2,\mu}[-1,1]}$, соответственно, будем писать $L_{2,\mu}, L_{2,\mu}^{(2r)}, \| f \|_{2,\mu}$.

Пользуясь соотношениями (7) – (9) и равенством Парсеваля, из (4) для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ легко получить равенство [1]

$$\| \Delta_h^m(D^r f) \|_{2,\mu}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (1-\cos kh)^{2m} k^{4r} c_k^2(f). \tag{10}$$

Учитывая соотношение (10), модуль непрерывности (2) запишем в виде

$$\Omega_m^2(D^r f; t)_{2,\mu} = \sup\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k^{4r} c_k^2(f)(1-\cos kh)^{2m} : |h| \le t \right\}. \tag{11}$$

Из равенства (11) вытекает, что при любом $n \ge 2, n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\Omega_m^2(D^r f; t)_{2,\mu} \ge \sum_{k=n}^{\infty} (1-\cos kt)^{2m} k^{4r} c_k^2(f). \tag{12}$$

Пусть

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} = \inf\{\| f - p_{n-1} \|_{2.\mu} : p_{n-1} \in P_{n-1}\} \tag{13}$$

– наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\mu}$ элементами подпространства P_{n-1}.

Из [3] известно, что среди всех элементов $p_n \in P_{n-1}$ частичная сумма

$$S_{n-1}(f; x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) T_k(x)$$

ряда (4) доставляет минимум величине (13). При этом

$$\mathsf{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}=\| f-S_{n-1}(f)\|_{2,\mu}=\left(\sum_{k=n}^{\infty}c_k^2(f)\right)^{1/2}. \tag{14}$$

Из (14), учитывая равенство (8), для произвольной $f\in L_{2,\mu}^{(2r)}$ получаем

$$\mathsf{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\le n^{-2r}\mathsf{E}_{n-1}(D^r f)_{2,\mu}. \tag{15}$$

Неравенство (15) обращается в равенство для функции $f_0(x)=T_n(x)$, принадлежащей множеству $L_{2,\mu}^{(2r)}$, поскольку $\mathsf{E}_{n-1}(f_0)_{2,\mu}=1$, $\mathsf{E}_{n-1}(D^r f_0)_{2,\mu}=n^{2r}$.

Пусть
$$\chi_{n,m,r}\left(\Omega_m;\pi/n\right)_{L_{2,\mu}} = \sup_{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}}\frac{n^{2r}\mathsf{E}_{n-1}(f)_{L_{2,\mu}}}{\Omega_m(D^r f;\pi/n)_{L_{2,\mu}}}$$

– точная константа в неравенстве типа Джексона–Стечкина

$$\mathsf{E}_{n-1}(f)_{L_{2,\mu}}\le \chi n^{-2r}\Omega_m(D^r f;\pi/n)_{L_{2,\mu}}.$$

Всюду далее введём обозначение

$$\Omega_m^{1/m}(D^r f;\tau):=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\Omega_m^{1/m}(D^r f;h)dh. \tag{16}$$

Теорема 1. *Пусть* $m,n\in\mathsf{N}, r\in\mathsf{Z}_+, f\in L_2^{(2r)}$ *и* $0<t\le\pi/n.$ *Тогда справедливы равенства*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f^{(r)}\ne const}}\frac{n^{2r}\| f-S_{n-1}(f)\|}{\left(\frac{1}{t}\int_0^t\Omega_m^{1/m}(D^r f;h)dh\right)^m}=\left(1-\frac{Si(nh)}{nh}\right)^{-m}, \tag{17}$$

где
$$Si(x)=\int_0^x\frac{\sin u}{u}du$$

– интегральный синус. Существует функция $f_0\in L_2^{(2r)}$, *реализующая в (17) верхнюю грань.*

Теорема 2. *Для произвольной* $t\in(0,\pi/n]$ *справедливо неравенство*

$$\frac{2^m}{n^{2r}(nt)^{2m}}\le\sup_{f\in L_2^{(2r)}}\frac{\mathsf{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\Omega_m(D^r f;t)_{2,\mu}}\le\frac{2^m}{n^{2r}}\left(\frac{1}{(nt)^2}+\frac{1}{2}\right)^m. \tag{18}$$

Из (18), в частности, для константы Джексона–Стечкина имеет место двусторонняя оценка

$$\left(\frac{2}{\pi^2}\right)^m \cdot \frac{1}{n^{2r}} \le \chi_{n,m,r}(\Omega_m;\pi/n)_{2,\mu} \le \frac{2^m}{n^{2r}}\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{2}\right)^m. \tag{19}$$

Пусть $\Phi(t)$ – непрерывная неубывающая положительная в области $[0,+\infty)$ функция такая, что $\Phi(0)=0$.

Через $W_{m,h}^{(r)}(D,\Phi), m,n\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{Z}_+=\mathbb{N}\cup\{0\}, 0<h\le\pi/n$ обозначим класс функций $f\in L_2^{(2r)}$, для которых при любом $h\in\mathbb{R}_+$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{h}\int_0^h \Omega_m^{1/m}(D^r f;\tau)d\tau \le \Phi(h).$$

В этих обозначениях справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{Z}_+$ *и* $0<h\le\pi/n.$ *Тогда справедливо равенство*

$$\mathsf{E}_{n-1}(W_{m,h}^{(r)}(D,\Phi)) = \frac{1}{n^{2r}}\left(1-\frac{Si(nh)}{nh}\right)^{-m}\Phi^m(h). \tag{20}$$

В завершение этой статьи отметим, что аналогичные экстремальные задачи, когда в качестве аппарата приближении используются другие системы функций рассмотрены в [4 - 6].

Список использованных источников:

1. Шабозов М.Ш., Тухлиев К. K -функционалы и точные значения n -поперечников некоторых классов из $L_2((1-x^2)^{-1/2};[-1,1])$. – Изв. ТулГУ. Естест. науки, 2014, вып.1, ч. 1, с. 83-97.
2. Бекназаров Дж.Х. Верхние грани отклонения некоторых классов функций от их частных сумм рядов Фурье-Чебышёва в пространстве L_2 // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2015. 1(158). С. 20-32.
3. Бекназаров Дж.Х. О наилучшем приближении функций суммами Фурье-Чебышёва и поперечники некоторых классов функций // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2016. 3(164). С. 15-25.
4. Тухлиев К. Наилучшие среднеквадратические приближения целыми функциями и значения средних поперечников некоторых функциональных классов // Вестн. Томского гос. пед. ун-та (TSPU Bulletin), 2015, вып. 2(155), с. 229-231.
5. Шабозов М.Ш., Тухлиев К., Муродов К.Н. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье-Бесселя и значения n -поперечников некоторых классов функций. //Проблемы вычислительной и прикладной математики, 2015, №2, с. 39-47.

6. Алексанян, Г. А. Исследование функций, заданных на множестве изолированных точек / Г. А. Алексанян, А. А. Аничков // Прикладные вопросы точных наук: Материалы III Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов, преподавателей – Армавир: РИО АГПУ, 2019. – С. 219-222.