НАИЛУЧШИЕ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ В ПРОСТРАНСТВЕ ГИЛЬБЕРТА

Тухлиев К.

д.ф.-м.н., профессор Худжандского государственного университета имени Б.Гафурова, г. Худжанд, Таджикистан, kamaridin.t54@mail.ru

Аннотация: Найдены точные неравенства между величиной наилучших приближений f ∈ L_2(R) и интегралами, содержащими специальные модули непрерывности m-го порядка, связанные с оператором Стеклова.

Ключевые слова: наилучшие приближения – модуль непрерывности m-го порядка – целая функция экспоненциального типа.

THE BEST ROOT-MEAN-SQUARE APPROXIMATIONS BY INTEGER FUNCTIONS IN THE GILBERT SPACE

K.Tukhliev

Doktor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Khujand State University named after B.Gafurov, Khujand, Tajikistan, kamaridin.t54@mail.ru

Abstract: The exact inequalities between the magnitudes of best approximation f ∈ L_2(R) and integrals with the special modules of continuity of m order related to Stecklov's operator founded.

Key words: the best approximation – modulus of continuity of m-order – entire function of exponential type.

Известно, что начало исследований, связанных с аппроксимацией на всей оси, было положено С.Н.Бернштейном, который ввёл понятие наилучшего приближения функции, заданной на бесконечном интервале посредством целых функций конечной степени и создал теорию приближения на всей оси $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$. Пусть $L_p(\mathbb{R})\;(1\le p\le\infty,\;\mathbb{R}:=(-\infty,+\infty))$ – пространство измеримых и суммируемых в p-й степени на всей оси $\mathbb{R}$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R})}:=\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}<\infty\;(1\le p<\infty).$$

При этом $L_\infty(\mathbb{R})$ – пространство измеримых и ограниченных на $\mathbb{R}$

функций с нормой $\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})} := vraisup\{|f(x)|: x\in\mathbb{R}\}$; $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}\cup\{0\}$; $\mathbb{R}_+$ – множество положительных чисел вещественной оси. Через $L_p^{(r)}(\mathbb{R})$ $(1\le p\le\infty,\ r\in\mathbb{Z}_+; L_p^{(0)}(\mathbb{R}) = L_p(\mathbb{R}))$ обозначим множество функций $f\in L_p^{(r)}(\mathbb{R})$, у которых производные $(r-1)$ -го порядка $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывны, а производные r -го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству $L_p(\mathbb{R}), 1\le p\le\infty$. Всюду далее, как в [1], структурные свойства функции $f\in L_p(\mathbb{R})$ характеризуем скоростью стремления к нулю обобщённым модулем непрерывности m -го порядка r -й производной

$$\Omega_m(f;t)_p = \sup\{\|\Delta_h^m(f;\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R})} : h\in(0,t]\},$$

где

$$\Delta_h^m(f;x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}S_h^k f(x),\ f\in L_p(\mathbb{R}),$$

$$S_h^0 f(x) = f(x), S_h^k f(x) = S_h\left(S_h^{k-1}f(x)\right), k=\overline{1,m};\ m\in\mathbb{N};\quad S_h f(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt, h>0$$

– средние Стеклова функции $f\in L_p(\mathbb{R})$.

Символом $B_{\sigma,p}(0<\sigma<\infty,\ 1\le p\le\infty)$ будем обозначать сужение на $\mathbb{R}$ множества всех функций экспоненциального типа σ, принадлежащих пространству $L_p(\mathbb{R})$. Величину

$$A_\sigma(f)_p := \inf\{\|f-g_\sigma\|_p : g_\sigma\in B_{\sigma,p}\}, 1\le p\le\infty$$

называют наилучшим приближением функции $f\in L_p(\mathbb{R})$ элементами подпространства $B_{\sigma,p}$ $(\sigma\in\mathbb{R}_+, 1\le p\le\infty)$.

Введём следующую экстремальную характеристику

$$M_{\sigma,m,r,q}(\psi;t) := \sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{A_\sigma(f)_2}{\left(\int_0^t \Omega_m^q(f^{(r)};\tau)_2\psi(\tau)d\tau\right)^{1/q}},$$

где $r\in\mathbb{Z}_+; m\in\mathbb{N}; t,\sigma\in\mathbb{R}_+; 0<q\le 2$; ψ – неотрицательная измеримая суммируемая на отрезке $[0,t]$ функция, не эквивалентная нулю. Этот величина достоточно хорошо изучена в работах [1-4].

Теорема 1. *Пусть* $m\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{Z}_+, \sigma\in\mathbb{R}_+, 0<t<\pi/\sigma, 0<q\le 2$ *и* ψ *– некоторая неотрицательная измеримая суммируемая на отрезке* $[0,t]$ *функция, тождественно не равная нулю. Тогда выполняются неравенства*

$$\{a_{m,r,q}(\psi;t,\sigma)\}^{-1} \le M_{\sigma,m,r,q}(\psi;t) \le \left\{\inf_{\sigma\le u<\infty} a_{m,r,q}(\psi;t,u)\right\}^{-1},$$

где

$$a_{m,r,q}(\psi;t,u)=\left(u^{rq}\int_0^t\left(1-\frac{\sin u\tau}{u\tau}\right)^{mq}\psi(\tau)d\tau\right)^{1/q},u\geq\sigma.$$

Из теоремы 1 вытекают следующие

Следствие 1. *Пусть выполнены все условия теоремы и, кроме того, весовая функция* $\psi\geq 0$ *является суммируемой на отрезке* $[0,t]$. *Тогда при любом* $0<t\leq 3\pi/(4\sigma)$ *справедливо равенство*

$$M_{\sigma,m,r,q}(\psi;t)=\{a_{m,r,q}(\psi;t,\sigma)\}^{-1}:=\sigma^{-r}\left(\int_0^t\left(1-\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^{mq}\psi(\tau)d\tau\right)^{-1/q}.$$

Следствие 2. *Если в утверждении следствия 1 полагать* $q=1/m,\ \ m\in\mathbb{N}$, $\psi(\tau)\equiv 1$ *и* $\psi(\tau)\equiv\tau$, *то соответственно получаем равенства:*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})}\frac{t^m\sigma^r A_\sigma(f)_{L_2(\mathbb{R})}}{\left(\int_0^t\Omega_m^{1/m}(f^{(r)};\tau)d\tau\right)^m}=\left(\frac{\sigma t}{\sigma t-Si(\sigma t)}\right)^m,\sigma\in\mathbb{R}_+,$$

где $Si(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}$ *– интегральный синус;*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})}\frac{t^{2m}\sigma^r A_\sigma(f)_{L_2(\mathbb{R})}}{\left(\int_0^t\tau\Omega_m^{1/m}(f^{(r)};\tau)d\tau\right)^m}=2^m\left\{1-\left(\frac{2}{\sigma t}\sin\frac{\sigma t}{2}\right)^2\right\}^{-m}.$$

Если введём новую экстремальную характеристику

$$\tilde{M}_{\sigma,m,r,p}(g;a)=\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})}\frac{\sigma^r A_\sigma(f)_2}{\left(\int_0^a\Omega_m^p(f^{(r)};\tau/\sigma)g(\tau)d\tau\right)^{1/p}},$$

тогда имеет место следующие:

Следствие 3. *Пусть* $m\in\mathbb{N},r\in\mathbb{Z}_+,0<p\leq 2$ *и* $g(\tau)$ *– некоторая неотрицательная измеримая суммируемая на отрезке* $[0,a]$ *функция, где* $a\in(0,\pi]$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\{a_{m,r,p}(g;a,1)\}^{-1}\leq\tilde{M}_{\sigma,m,r,p}(g;a)\leq\left\{\inf_{x\geq 1}a_{m,r,p}(g;a,x)\right\}^{-1}.$$

При этом, если

$$\inf_{x\geq 1}a_{m,r,p}(g;a,x)=a_{m,r,p}(g;a,1),$$

то имеет место равенство $\tilde{M}_{\sigma,m,r,p}(g;a)=\dfrac{1}{a_{m,r,p}(g;a,1)}$.

Теорема 2. *Пусть* $m\in\mathbb{N},r\in\mathbb{Z}_+,0<p\leq 2,\ \ \sigma\in\mathbb{R}_+,\ \ 0<h\leq 3\pi/(4\sigma),\ \ \psi(\tau)$ *– некоторая суммируемая на отрезке* $[0,t]$ *функция, тождественно не равная нулю. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})}\frac{\sigma^s A_\sigma(f^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})}}{\left(\int\limits_0^t \Omega_m^p(f^{(r)};\tau)\psi(\tau)d\tau\right)^{1/p}}=\left(\int\limits_0^t\left(1-\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^{mp}\psi(\tau)d\tau\right)^{-1/p},$$

где $s=0,1,2,\ldots,r.$

Отметим, что аналогичные задачи в пространстве Бергмана рассмотрены в работе [5].

Список использованных источников:

1. Тухлиев К. О наилучших приближениях целыми функциями в пространстве $L_2(\mathbb{R}).I.$// Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2013. 3(152). С.19-29.
2. Тухлиев К. О наилучших приближениях целыми функциями в пространстве $L_2(\mathbb{R}).II.$// Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2014. 3(156). С.7-19.
3. Тухлиев К. О некоторых экстремальных задачах наилучших приближений целыми функциями. // Вестн. Томского гос. пед. ун-та. 2015. Вып. 2(155). С.213-220.
4. Тухлиев К. Наилучшие среднеквадратические приближения целыми функциями и значения средних поперечников некоторых функциональных классов. // Вестн. Томского гос. пед. ун-та. 2015. Вып. 2(155). С.229-231.
5. Тухлиев Д.К. О точных константах в прямых и обратных теоремах в пространстве Бергмана // ДАН РТ. 2018. Т.61. №6. С.517-523.