НАИЛУЧШИЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ С ВЕСОМ ЯКОБИ

Хамдамов Ш.Дж.

к.физ.-мат.н., доцент Худжандскиий государственный университет имени академика Б.Гафурова, г. Худжанд, Таджикистан, sher762004@mail.ru

Аннотация: Настоящая работа посвящена отысканию наилучших квадратурных формул вида

$$\int_a^b q_{\alpha,\beta}(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k) + R_n(f),$$

с весом Якоби $q_{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, $\alpha,\beta > -1$ для классов функций малой гладкости.

Ключевые слова: оптималная квадратурная формула, модул непрерывности, весовая функция Якоби- функций малой гладкости.

BEST SQUARE FORMULAS FOR INTEGRALS WITH JACOB WEIGHT

Sh.Hamdamov

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Dotsent of the Khujand State University named after B.Gafurov, Khujand, Tajikistan, sher762004@mail.ru

Abstract: A quadrature formula of the form

$$\int_a^b q_{\alpha,\beta}(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k) + R_n(f),$$

With the Jacobi weight $q_{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, $\alpha,\beta > -1$ for which the optimal quadrature formulas on the class of functions of small smoothness are found.

Keywords: optimal quadrature formula - modulus of continuity - Jacobi weight function - small smoothness.w

Задача приближённого вычисления определённых интегралов возникла сразу после создания Ньютоном и Лейбницом теории интегрального исчисления. С тех пор возникло множество приближённых методов вычисления определённых интегралов. Указанная задача и сегодня является одной из наиболее актуальных задач вычислительной математики.

Многообразие методов приближённого интегрирования привело к известным экстремальным задачам отыскания наилучших (оптимальных) квадратурных формул постановка которой дана А.Н.Колмогоровым, а первые результаты были получены С.М.Никольским и А.Сардом в середине прошлого века. После этого отыскание оптимальных квадратурных формул стало наиболее важное проблемы приближённого анализа. Наиболее важные результаты по оптимальным квадратур для основных классов функций, используемых в теории приближения, приведены в дополнение к известной монографии С.М.Никольского [1]. Там же отмечается что указанная задача отыскании оптимальных квадратур более полно решена в одномерном случае, а в многомерном случае решена в редких случаях, а для некоторых многомерных интегралах вовсе не рассматривалась. А также отмечается, что значительно менее развита теория построения весовых наилучших квадратурных формул. Настоящая работа посвящена отысканию наилучших квадратурных формул с весом Якоби.

В данной работе рассматриваем квадратурную формулу вида

$$\int_a^b q(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} p_k f(x_k) + R_n(f), \qquad (1)$$

в которой весовая функция $q(x)$ неотрицательна на интервале (a,b) и интегрируема по Риману, $X = \{x_k : a = x_0 < x_1 ... < x_{n-1} < x_n = b\}$ — некоторый вектор узлов, $P = \{p_k\}_{k=0}^{n}$ — некоторый вектор коэффициентов, а $R_n(f) := R_n(f;q,X,P)$ — погрешность квадратурной формулы (1) на функции $f(x)$.

Если М— некоторый класс функций $\{f(x)\}$, определенных на отрезке $[a,b]$, то через

$$R_n(M;q,X,P) = sup\{|R_n(f;q,X,P)|: f \in M\} \qquad (2)$$

обозначим погрешность квадратурной формулы (1) на классе функций М, и пусть Р — множество векторов коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=0}^{n}$, и векторов узлов $X = \{x_k\}_{k=0}^{n}$, для которых квадратурная формула (1) имеет смысл.

Требуется при заданной положительной весовой функции $q(x)$ найти величину (см., например [2], [3]):

$$\varepsilon_n(\mathrm{M};q) = \inf\{R_n(\mathrm{M};q,X,P) : (X,P) \subset \mathrm{P}\}. \qquad (3)$$

Если существует вектор узлов $X^\circ = \{x_k^\circ\} \subset \mathcal{P}$ и вектор коэффициентов $P^\circ = \{p_k^\circ\} \subset \mathcal{P}$ таких, для которых в равенстве (3) достигается нижняя грань, то есть если $\varepsilon_n(\mathrm{M},q) = R_n(\mathrm{M};q,X^\circ,P^\circ)$, то квадратурная формула (1) называется *наилучшей* или *оптимальной квадратурной формулой* на классе функций М, а векторы X° и P° соответственно *наилучшие узлы* и *наилучшие коэффициенты* квадратурной формулы (1).

Аналогичном образом, пусть требуется найти величину

$$\varepsilon_n(\mathrm{M};q,X) = \inf\{R_n(\mathrm{M};q;X,P) : P \subset \mathcal{P}\}. \qquad (4)$$

Если существует вектор коэффициентов $P^\circ = \{p^\circ_k\} \subset \mathrm{P}$ такой, для которого в (4) достигается нижняя грань, то есть если

$$\varepsilon_n(\mathrm{M};q,X) = R_n(\mathrm{M};q;X,P^\circ),$$

то квадратурная формула (1) называется наилучшей по коэффициентам квадратурной формулой при фиксированных узлах $X = \{x_k\}_{k=0}^{n}$, а вектор $P^\circ = \{p_k^\circ\}_{k=0}^{n}$ — наилучший вектор коэффициентов для класса функций М.

Всюду далее, в качестве М введем в рассмотрение следующие классы функций, заданные своими гладкостенными свойствами на отрезке $[a,b]$.

$H^\omega[a,b]$ — класс функций $f(x)$, определенных на отрезке $[a,b]$ и для любых двух точек $x',x'' \in [a,b]$ удовлетворяющих условию $|f(x') - f(x'')| \le \omega(|x'-x''|)$, где $\omega(x)$ — заданный модуль непрерывности, то есть положительная полуаддитивная возрастающая функция, такая что $\omega(0) = 0$. В частности, при $\omega(x) = Kx^{\alpha}, \ 0 < \alpha \le 1$ получаем класс Гельдера $KH^{\alpha}[a,b]$ - функций $f(x)$, которые для любых $x',x'' \in [a,b]$ удовлетворяют условию

$$|f(x') - f(x'')| \le K|x' - x''|^{\alpha}, \ \ 0 < \alpha \le 1. \qquad (5)$$

В частности, $KH^{1}[a,b]$ — класс функций Липщица, которое из (5) получается при $\alpha = 1$;

$W^{(r)}L_p[a,b]$ $(1 \le p \le \infty$; $W^{(0)}L_p[a,b] \equiv L_p[a,b])$ — класс функций $f(x)$, заданных и определенных на отрезке $[a,b]$, у которых производная $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно-непрерывна на отрезке $[a,b]$, существует кусочно-непрерывная производная $f^{(r)}(x) \in L_p[a,b]$, для которой

$$\|f^{(r)}\|_p := \|f^{(r)}\|_{L_p} = \left(\int\limits_a^b |f^{(r)}(x)|^p dx \right)^{1/p} \le 1.$$

При $r = 1$, класс $W^{(1)}L_p[a,b]$, $(1 \le p \le \infty)$ называются классами функций малой гладкости.

Пусть $[a,b]$ любой конечный отрезок и на нем задана положительная суммируемая весовая функция Якоби $q_{\alpha,\beta}(x) = (b - x)^{\alpha}(x - a)^{\beta}$, $\alpha > -1, \beta > -1$.

При изучении интегралов

$$\int\limits_a^b (b-x)^{\alpha}(x-a)^{\beta} \ f(x)dx$$

и для практического применения, как обычно, приводят отрезок интегрирования $[a,b]$ к стандартному отрезку $[-1,1]$ линейным преобразованием

$$x = (a + b)/2 + t(b - a)/2, \ -1 \le t \le 1.$$

Будем считать, что такое приведение выполнено и ограничимся рассмотрением интеграла

$$\int\limits_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \ f(x)dx \overset{def}{=} \int\limits_{-1}^{1} q_{\alpha,\beta}(x) f(x)dx. \qquad (6)$$

Интегралу (6) сопоставим квадратурную формулу

$$\int_{-1}^{1} q_{\alpha,\beta}(x) f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k) + R_n(f). \qquad (7)$$

Настоящая работа посвящена отысканию наилучших квадратурных формул вида (7) с весом Якоби $q_{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, $\alpha,\beta > -1$ для классов функций малой гладкости $W^{(1)}L[-1;1]$, то есть, для которых

$$\|f'\|_{L[-1;1]} = \int\limits_{-1}^{1} |f'(x)|dx \le 1.$$

Имеет место следующая

Теорема. *Пусть* $\alpha,\beta > -1$. *Тогда среди всех квадратурных формул вида (7) наилучшей для класса* $W^{(1)}L[-1,1]$ *является квадратурная формула,* *вектор коэффициентов которой имеет вид*

$$P=\left\{p_k\,,p_k=2^{\alpha+\beta+1}\,\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\cdot\frac{1}{n}\right\}_{k=1}^{n}, \qquad (8)$$

где $\Gamma(u)$ *— гамма функция Эйлера, а узлы определяются из системы равенств*

$$\int_{x_k}^{1}q_{\alpha,\beta}(x)dx=2^{\alpha+\beta+1}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\cdot\frac{2n-2k+1}{2n},k=\overline{1,n}. \qquad (9)$$

Для погрешности наилучшей квадратурной формулы на всем классе $W^{(1)}L[-1,1]$ *справедлива оценка*

$$\mathcal{E}_n(W^{(1)}L[-1,1];q_{\alpha,\beta}(x))=2^{\alpha+\beta+1}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\cdot\frac{1}{n}. \qquad (10)$$

Из теоремы вытекают следующие утверждения.

Следствие 1. *Пусть* $\alpha>-1$, $\beta=0$. *Тогда среди всех квадратурных формул вида*

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}\,f(x)dx=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)+R_n(f)$$

наилучшей на классе $W^{(1)}L[-1,1]$ *является квадратурная формула, векторы коэффициентов и узлов которой имеют вид*

$$P=\left\{p_k:p_k=\frac{2^{\alpha+1}}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{n}\right\}_{k=1}^{n},$$

$$X=\left\{x_k:x_k=1-2\left(1-\frac{2k-1}{2n}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}\right\}_{k=1}^{n}. \qquad (11)$$

При этом для погрешности наилучшей квадратурной формулы на всем классе справедлива оценка

$$\mathcal{E}_n(W^{(1)}L[-1,1],(1-x)^{\alpha})=\frac{2^{\alpha+1}}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{n}.$$

Следствие 2. *Пусть* $\alpha=0$, $\beta>-1$. *Тогда среди всех квадратурных формул вида*

$$\int_{-1}^{1}(1+x)^{\beta}\,f(x)dx=\sum_{k=1}^{n}p_k\,f(x_k)+R_n(f) \qquad (12)$$

наилучшей на классе $W^{(1)}L[-1,1]$ *является квадратурная формула, векторы коэффициентов и узлов которой имеют вид*

$$P=\left\{p_k:p_k=\frac{2^{\beta+1}}{\beta+1}\cdot\frac{1}{n}\right\}_{k=1}^{n},$$

$$X=\left\{x_k:x_k=2\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}-1\right\}_{k=1}^{n}..$$

При этом для погрешности квадратурной формулы (12) на всем классе *верна оценка*

$$\varepsilon_n(W^{(1)}L[-1,1],(1+x)^{\beta}) = \frac{2^{\beta+1}}{\beta+1}\cdot\frac{1}{n}..$$

Следствие 3. *Пусть* $\alpha = \beta = \frac{1}{2}..$ *Тогда наилучшая квадратурная формула имеет вид*

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,f(x)dx = \frac{\pi}{2n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f(\overset{\circ}{x}_k) + R_n(f),,$$

узлы которой определяются из системы равенств

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{(2k-1)\pi}{4n},\ k = \overline{1,n}.$$

При этом для погрешности формулы (7) на всем классе $W^{(1)}L[-1,1]$ *верна оценка*

$$\varepsilon_n(W^{(1)}L[-1,1],\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{4n}.$$

Такой же результат имеет место для весовой функции $q(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot(1+x)^{-\frac{1}{2}}$, когда $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}$.

В заключение отметим, что аналогичные задачи для криволинейных интегралов первого рода ранее рассмотрена в работах [4;5].

Список использованных источников:

1. Никольский С.М. Квадратурные формулы. – М.: Наука. 1988. 256 с.
2. Хамдамов Ш.Дж. Об оценке погрешности наилучших квадратурных формул на некоторых классах функций. // ДАН РТ, 2010, т. 53, №5, с.333-337.
3. Шабозов М.Ш., Сабоиев Р.С., Хамдамов Ш.Дж. Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2009. Т. 52. С. 23.
4. Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Наилучшие квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности. // Вестник Санкт-Петербургского госуниверситета, 2015, Сер. 1, т. 2(60), вып.4, С. 563-575.
5. Тухлиев К. Наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых. // Известия ТулГУ, Естественные науки, 2013. Вып. 2. Ч 1. с. 50-57.