УПРАВЛЯЕМАЯ ПОЛУМАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Ю.А. Кочура [1]***, Г.А. Алексанян*** [2]

1) студентка Армавирского механико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия yulya31913@mail.ru

2) к.п.н., доцент Армавирского механико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, floop2010@mail.ru

Аннотация: в данной статье рассматривается управляемые полумарковские модели технического обслуживания.

Ключевые слова: управляемые полумарковские модели технического обслуживания, марковские однородные рандомизированные стратеги.

OPERATED SEMI-MARKOV MAINTENANCE MODEL

Y. A. Kochura [1]***, G.A. Aleksanyan*** [2]

1) student of the Armavir Mechanics and Technology Institute (branch) of Kuban State Technological University, Armavir, Russia, *yulya31913@mail.ru*

2) Ph.D., Associate Professor of the Armavir Mechanics and Technology Institute (branch) of the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Kuban State Technological University", Armavir, Russia, floop2010@mail.ru

Abstract: This article discusses controlled semi-Markov maintenance models.

Keywords: controlled semi-Markov maintenance models, Markov homogeneous randomized strategists.

В стохастических моделях объектами управления являются случайные процессы – марковские или полумарковские с конечным числом состояний, правила управления определяются стратегиями управления, критерием качества управления является функционал, построенный на траектории управляемого случайного процесса, а цели исследования заключаются в определении оптимальной стратегии управления.

Рассмотрим управляемую полумарковская модель технического обслуживания.

Пусть задана система, у которой время безотказной работы ξраспределено по закону $F(x)=P\{\xi<x\}$. Предположим, что появившийся

при функционировании системы отказ самостоятельно обнаруживается мгновенно.

В начальный момент $t_0=0$ начинается эксплуатация системы и назначается плановое предупредительное обновление системы через время $\eta\geq 0$, распределенное по закону $G(x)=P\{\eta<x\}$, $G(0)=0$. Назначение плановых предупредительных обновлений системы через случайное время означает введение рандомизации в процесс принятия решений, то есть в тот момент, когда нужно принимать решение, строится реализация τслучайной величины η $(\eta=\tau)$,распределенной по закону $G(x)$, и плановое предупредительное обновление системы проводится через время τ.

Если к назначенному моменту η система не отказала (произошло событие$\{\eta<\xi\}$), то в момент ηначинается плановое предупредительное обновление системы, которое по предположению полностью обновляет систему. Обозначим длительность этого планового предупредительного (профилактического) обновления через γ_1, а $F_1(x)=P\{\gamma_1<x\}$ есть функция распределения этой длительности.

Если к до назначенного момент η система отказала (произошло событие $\{\eta\geq\xi\}$), то отказ обнаружился мгновенно и в момент ξначинается внеплановое аварийное обновление системы. Длительность этой восстановительной работы обозначим через γ_2, а закон распределения обозначим через $F_2(x)=P\{\gamma_2<x\}$.

После проведения возможных восстановительных работ, когда по предположению система полностью обновляется, осуществляется перепланирование момента проведения следующей предупредительной восстановительной работы и весь процесс обслуживания повторяется заново.

Выбор показателей качества функционирования зависит от решаемых технической системой задач. Мы приведем исследование описанной стратегии технического обслуживания по коэффициенту готовности – математическому ожиданию доли времени, которое система провела в работоспособном состоянии.

Математическая задача сводится к следующим подзадачам:

– выписать выражения для коэффициента готовности в зависимости от исходных характеристик, в частности, установить зависимость коэффициента готовности от распределения $G(x)$, определяющего периодичность проведения плановых предупредительных обновлений системы;

– исследовать на экстремум коэффициент готовности по множеству допустимых распределений $G(x)$ и определить оптимальное распределение $G_0(x)$, при котором коэффициент готовности принимает наилучшее (оптимальное) значение (заметим, что допустимым назовем распределение, при котором показатель качества функционирования существует).

Теперь, после описания эволюции системы во времени, описания процесса принятия решений (назначения сроков проведения плановых предупредительных восстановительных работ) и постановки задачи, реализуем этапы исследования.

Из *физического описания процесса функционирования* следует:

– решения принимаются в моменты, когда система обновлена после окончания любой возможной восстановительной работы;

– каждое решение заключается в определении сроков проведения плановых восстановительных работ (одно решение отличается от другого тем, что отличаются сроки проведения плановых восстановительных работ);

– при принятии решения задействован механизм рандомизации (случайный эксперимент);

– правило принятие решений не зависит от календарного времени.

Из всего этого делаются следующие выводы:

ВЫВОД 1. Множество решений, которые можно принимать в момент окончания восстановительных работ, совпадает с множеством положительных чисел $U=R_{+}=[0,+\infty)$*, определяющих время через которое начнется плановая предупредительная профилактика.*

ВЫВОД 2. Рассматривается множество марковских однородных рандомизированных стратегий. Такая стратегия задается функцией распределения времени через которое начнется плановая предупредительная профилактика. В наших обозначениях это время равно η *и, следовательно, стратегия определяется распределением* $G(x)=P\{\eta<x\}$.

Построим процесса, описывающий эволюцию технической системы во времени, и проведем анализ его свойств.

Введем в рассмотрение случайный процесс $\xi(t)$, характеризующий состояние системы в произвольный момент времени t, положив

$\xi(t)=e_0$, если в момент t система работает;

$\xi(t)=e_1$, если в момент t в системе проводится плановое предупредительное обновление системы;

$\xi(t)=e_2$, если в момент tв системе проводится внеплановое аварийное обновление системы.

Диаграмма переходов процесса $\xi(t)$ при описанной выше стратегии технического обслуживания приведена на рисунке 1.

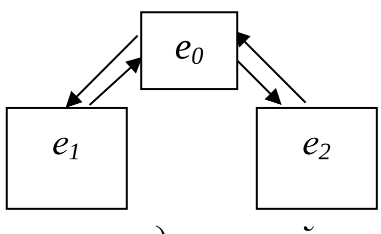

Рис. 1. Диаграмма переходов случайного процесса $\xi(t)$

Далее исследуем свойства определенного выше процесса $\xi(t)$.

Прежде всего, отметим, что процесс $\xi(t)$ принимает значения из конечного множества $E=\{e_0,e_1,e_2\}$. Траектории этого процесса суть ступенчатые функции.

Отметим еще одно важное свойство процесса $\xi(t)$. В силу того, что в момент перехода в состояние e_0 система полностью обновлена и производится перепланирование момента последующего предупредительного обновления системы, будущее течение процесса $\xi(t)$ в момент перехода в состояние e_0небудет зависеть от прошлого, т.е. эти моменты перехода в состояниеe_0 будут моментами регенерации (марковские моменты). Моменты начала восстановительных работ также являются марковскими моментами, так как будущее зависит только от того какая восстановительная работа проводится. Следовательно, процесс $\xi(t)$ будет полумарковским. Этим свойством процесса мы воспользуемся при определении аналитических выражений для стационарного коэффициента готовности – доли времени, которую процесс проводит в работоспособном состоянии [3]. Из описания процесса функционирования и проведения восстановительных работ следует, что времена пребывания процесса в соответствующих состояниях есть функции случайных величин $\xi,\eta,\gamma_1,\gamma_3$, и равны

$$X_0 = \min(\xi,\eta),\ X_1 = \gamma_1,\ X_2 = \gamma_2 \quad (1)$$

где через X_iобозначено время пребывания в состоянии e_i.

Таким образом, если использовать обозначения главы 5, получаем распределения времени пребывания в различных состояниях

$$F_0(x) = P\{\min(\xi,\eta) < x\} = 1 - P\{\min(\xi,\eta) \geq x\} =$$
$$= 1 - P\{\xi \geq x, \eta \geq x\} = 1 - [1 - F(x)][1 - G(x)],$$
$$F_1(x) = P\{\gamma_1 < x\}, \quad F_2(x) = P\{\gamma_2 < x\}.$$

Из последних равенств определяются математические ожидания:

$$m_0 = M\min(\xi,\eta) = \int_0^\infty [1 - F(x)][1 - G(x)]dx,$$

$$m_1 = M\gamma_1 = \int_0^\infty [1 - F_1(x)]dx,\ m_2 = M\gamma_2 = \int_0^\infty [1 - F_2(x)]dx. \quad (2)$$

Здесь мы воспользовались равенством для математического ожидания положительной случайной величины.

Заметим, что управление осуществляется только в состоянии $i=0$, в наших обозначениях $G_0(x) = G(x)$, а в остальных состояниях ядро управляемого процесса не зависит от управления.

В соответствии с определением полумарковского ядра управляемого полумарковского процесса для рассматриваемого случая получаем

$$Q_{01}(t,x)=P\{\eta<\xi,\eta<t/\eta=x\}=\begin{cases}1-F(x), & x<t,\\ 0, & x\ge t,\end{cases}$$

$$Q_{02}(t,x)=P\{\eta>\xi,\xi<t/\eta=x\}=\begin{cases}0, & x<t,\\ F(t), & x\ge t,\end{cases} \qquad (3)$$

$$Q_{10}(t,x)=F_1(t), \quad Q_{20}(t,x)=F_2(t).$$

Для полумарковского ядра получаем

$$Q_{01}(t)=\int_0^t[1-F(x)]dG(x),$$

$$Q_{02}(t)=\int_0^t F(x)dG(x)+F(t)[1-G(t)]=\int_0^t[1-G(x)]dF(x)$$

$$Q_{10}(t,x)=F_1(t),\ Q_{20}(t,x)=F_2(t). \qquad (4)$$

Вероятности переходов вложенной церии Маркова:

$$p_{01}=P\{\eta<\xi\}=\int_0^\infty[1-F(x)]dG(x),$$

$$p_{02}=P\{\eta\ge\xi\}=\int_0^\infty F(x)dG(x),$$

$$p_{10}=p_{20}=1. \qquad (5)$$

При определении целевого функционала - *коэффициента готовности* как доли времени, проведенной системой в работоспособном состоянии, считаем, что процесс функционирования длиться бесконечно долго. Поэтому можно воспользоваться предельными характеристиками, приведенными в [2].

Напомним, что в [2] приведена зависимость предела (целевого функционала) S, определяющего цели управления, от исходных выше характеристик

$$S=\frac{\sum_{i\in E}\sigma_i\pi_i}{\sum_{i\in E}m_i\pi_i}. \qquad (6)$$

m_i полное время пребывания процесса в состоянии iопределяется равенством

$$m_i=\sum_{j\in E}\int_0^\infty\int_0^\infty t\,dQ_{ij}(t,x)dG_i(x), \qquad (7)$$

стационарное распределение вероятностей состояний вложенной цепи Маркова π_i удовлетворяет системе алгебраических уравнений

$$\pi_i = \sum_{j\in E} p_{ji}\pi_j, \ i \in E \qquad (8)$$

а σ_i - математическое ожидание дохода за полное время пребывания процесса в состоянии *i*. Это математическое ожидание определяется по формуле

$$\sigma_i = \sum_{j\in E}\int_0^\infty\int_0^\infty R_{ij}(t,x)dQ_{ij}(t,x)dG_i(x). \qquad (9)$$

В соотношении (9) обозначено через $R_{ij}(t,x)$ – математическое ожидание дохода при условии, что процесс пребывает в течение времени *t* в состоянии *i*, перешел в состояние *j* и принято решение *x*. Когда исследуется доля времени, Проведенного в работоспособном состоянии, то в процессе функционирования накапливается время, если состояние процесса соответствует состоянию работоспособности, и никакого накопления нет, если состояние процесса соответствует состоянию неработоспособности. В нашем примере $i=0$, есть состояние работоспособности, а остальные состояния - состояния неработоспособности. Поэтому получаем равенства

$$R_{0j}(t,x) = \begin{cases} t, & j=2, \\ x, & j=1, \end{cases} \quad R_{i0}(t,x) = 0, \ i = 1,2.$$

Тогда из (9) и (3) получаем

$$\sigma_0 = M\min(\xi,\eta) = \int_0^\infty\int_0^x [1-F(y)]dydG(x) = \int [1-F(x)][1-G(x)]dx,$$

$$\sigma_i = 0, \ i = 1,2. \qquad (10)$$

Решая алгебраическую систему уравнения (8) для переходных вероятностей (5), получаем с учетом нормировки

$$\pi_0 = \frac{1}{2}, \ \pi_1 = \frac{1}{2}p_{01} = \frac{1}{2}\int_0^\infty [1-F(x)]dG(x),$$

$$\pi_2 = \frac{1}{2}p_{02} = \frac{1}{2}\int_0^\infty F(x)dG(x). \qquad (11)$$

Подставляя соотношения (2), (10) и (11) в (6), получаем выражение для коэффициента готовности через исходные характеристики

$$K_Г = \frac{\int_0^\infty [1-F(x)][1-G(x)]dx}{\int_0^\infty [1-F(x)][1-G(x)]dx + \int_0^\infty [1-F_1(y)]dy\int_0^\infty F(x)dG(x) + \int_0^\infty [1-F_2(y)]dy\int_0^\infty [1-F(x)]dG(x)}$$

Коэффициент готовности является дробно-линейным функционалом относительно функции *G(x)*, определяющей марковскую однородную рандомизированную стратегию технического обслуживания.

Оптимальная периодичность плановых обновлений системы при оптимизации коэффициента готовности (дробно-линейного функционала) может быть детерминированной. Доказательство этого факта приведено в [1]. Оптимальная стратегия технического обслуживания определяется в классе детерминированных стратегий. Расширение класса стратегий и переход к рандомизированным стратегиям не улучшает качество технического обслуживания. Подставляем в последнее равенство вырожденное распределение

$$G(x)=\begin{cases}0, & x<\tau,\\ 1, & x\ge\tau,\end{cases}$$

Получаем исследуемый коэффициент готовности как функцию от τ

$$K_{\Gamma}=\frac{\int_0^{\tau}[1-F(x)]dx}{\int_0^{\tau}[1-F(x)]dx+F(\tau)\int_0^{\infty}[1-F_1(y)]dy+[1-F(\tau)]\int_0^{\infty}[1-F_2(y)]dy} \qquad (12)$$

Оптимальная периодичность плановых обновлений системы определяется как точка τ_0, в которой достигается максимум функции (12) и каждый раз при принятии решения о сроках проведения очередного планового обновления системы нужно назначать его через время τ_0.

Дифференцируя функцию (12) и, приравнивая производную нулю, получаем уравнение

$$\frac{M\gamma_1}{M\gamma_2-M\gamma_1}=-F(\tau)+\lambda(\tau)\int_0^{\tau}[1-F(x)]dx, \qquad (13)$$

корни которого определяют точки локальных максимумов функции (12).

Таким образом, можно сформулировать последовательность действий при поиске оптимальной стратегии проведения плановых предупредительных профилактик.

Опишем методику определения оптимальных периодов проведения плановых предупредительных обновлений системы.

Необходимые исходные данные для расчета:

– функция распределения времени безотказной работы системы $F(x)$;

– математическое ожидание времени безотказной работы системы $M\xi$;

– интенсивность отказов системы $\lambda(x)$;

– математическое ожидание времени планового предупредительного обновления системы $M\gamma_1$;

– математическое ожидание времени внепланового аварийного обновления системы $M\gamma_2$.

Оптимальный период проведения плановых предупредительных обновлений системы τ_0, максимизирующий стационарный коэффициент готовности, определяется как корень уравнения

$$\frac{M\gamma_1}{M\gamma_2 - M\gamma_1} = -F(\tau) + \lambda(\tau)\int_0^{\tau}[1 - F(x)]dx.$$

Если это уравнение имеет один корень τ_0, то

$$\max K_{\Gamma}(\tau) = K_{\Gamma}(\tau_0) = \frac{1}{1 + (M\gamma_2 - M\gamma_1)\lambda(\tau_0)}.$$

Если это уравнение не имеет корней, то $\tau_0=\infty$ и

$$\max K_{\Gamma}(\tau) = K_{\Gamma}(\infty) = \frac{M\xi}{M\xi + M\gamma_2}.$$

Если это уравнение имеет несколько корней τ_k, $k=1,2,\dots,s$, то в качестве оптимального периода τ_0 надо взять либо то τ_m, для которого $\min_{k=(1,2,\dots,s)}\lambda(\tau_k)=\lambda(\tau_m)$, если выполняется неравенство $\lambda(\tau_m)M\xi[M\gamma_2 - M\gamma_1]<M\gamma_2$, либо считать $\tau_0=\infty$, если выполняется противоположное неравенство.

Некоторые замечания к методике:

– рассматриваемая стратегия технического обслуживания может быть использована только для систем, в которых происходит мгновенная индикация появившегося отказа;

– для определения оптимальных периодов проведения плановых восстановительных работ необходимо решать выписанное выше уравнение (рекомендуется решать это уравнение графически, с этой целью оно выписано в виде, удобном для такого решения: справа стоит функция времени, слева - постоянная величина и определяются точки пересечения этой функцией заданного уровня);

– если построение графика функции, стоящей в правой части уравнения трудоемко, то рекомендуется непосредственно строить зависимость исследуемого показателя от периода проведения плановых предупредительных восстановительных работ и определять точку, в которой достигается абсолютный максимум (или минимум) исследуемого показателя;

– если время безотказной работы системы подчиняется экспоненциальному закону с параметром λ

$$P\{\xi<x\}=F(x)=1-\exp(-\lambda x),\ x\geq 0,$$

то функция, стоящая в правой части решаемых уравнений, постоянна и уравнение не имеет корней, проведение плановых предупредительных восстановительных работ нецелесообразно;

– во всех случаях, когда абсолютные экстремумы исследуемых функций достигаются при $\tau_0=\infty$, оптимальная стратегия становится *пассивной*, в которой плановые предупредительные восстановительных работ не проводится, так как их проведение только ухудшит качество технического обслуживания.

Список использованных источников:

1. Горовенко Л.А. Технологии использования QUICK RESPONSE в информационно-образовательной среде технического вуза // Технологии, экономика и управление: анализ мировых и отечественных тенденций и перспектив развития Сборник статей Всероссийской научно-практической конференции. отв. ред.: Н. А. Овчаренко, Т. В. Лохова.. 2018. С. 109-113.
2. Бондар М.Д., Паврозин А.В. 3D-Моделирование // ПРИКЛАДНЫЕ ВОПРОСЫ ТОЧНЫХ НАУК Материалы I Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов, преподавателей. 2017. С. 242-244.
3. Горовенко, Л. А. Создание информационной образовательной среды на базе платформы Google Класс и виртуальной доски Miro / Л. А. Горовенко, Г. А. Алексанян, О. П. Ровенская // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки. – 2020. – № 4(271). – С. 95-101.