УДК 532.516:539.3

Блинков Юрий Анатольевич
ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный
университет имени Н.Г. Чернышевского»
Россия, Саратов
заведующий кафедрой «Математического и компьютерного
моделирования»
E-mail: blinkovua@info.sgu.ru
Месянжин Артем Вячеславович
ОАО «Конструкторское бюро промышленной автоматики»
Россия, Саратов
ведущий математик
E-mail: a.v.mesyanzhin@gmail.com
Могилевич Лев Ильич
Поволжский филиал Московского государственного
университета путей сообщения
Россия, Саратов
Профессор кафедры «Высшая и прикладная математика»
E-mail: mogilevich@sgu.ru

Моделирование нелинейных волн в оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость при воздействии упругой окружающей среды в нормальном и тангенциальном направлении

Успехи в исследовании нелинейных волновых процессов в акустических волноводах, связанные с теорией солитонов, позволили провести анализ распространения нелинейных уединенных волн деформаций в упругих и нелинейно-упругих цилиндрических оболочках без взаимодействия с жидкостью с позиции теории солитонов. Настоящее исследование посвящено анализу распространения нелинейных волн деформации в упругих цилиндрических оболочках, содержащей вязкую несжимаемую жидкость и окруженных упругой средой. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 16-01-00175-а.

Ключевые слова: нелинейные волны, вязкая несжимаемая жидкость, цилиндрические упругие оболочки, окружающая упругая среда.

Blinkov Yury Anatolyevich
Federal State-Funded Educational Institution of Higher Professional Education Saratov State University
Russian Federation, Saratov
Head of Department of Mathematical and Computer Modelling
E-mail: blinkovua@info.sgu.ru
Mesyanzhin Artem Vuacheslavovich
Industrial Automatics Design Bureau JSC
Russian Federation, Saratov
Leading Mathematician
E-mail: a.v.mesyanzhin@gmail.com
Mogilevich Lev Ilich
Volga Region Branch of Moscow State University of Means of Communication
Russian Federation, Saratov
Professor of Department of Higher and Applied Mathematics
E-mail: mogilevich@sgu.ru

Modelling of Nonlinear Waves in the Shell Containing a Viscous Incompressible Fluid in the Influence of Elastic Surrounded Medium on the Normal and Tangential Directions

The advances in the study of nonlinear wave propagation in acoustic waveguides, associated with the theory of solitons, enable the analysis nonlinear solitary waves of the spread in elastic deformations and nonlinear elastic cylindrical shells in course interaction with the liquid from point of view of solitons theory. The present study focuses on the analysis of nonlinear waves elastic deformation of the cylindrical shell, containing viscous incompressible fluid and surrounded by an elastic medium.

The research, described in this paper, was financially supported by the Russian Foundation for Fundamental Investigation (The RFFI Grant 16-01-00175-a)

Key words: nonlinear waves, viscous incompressible liquid, elastic cylindrical shells, surrounded by an elastic media.

1. Волновые процессы в упругих, вязкоупругих и нелинейных вязкоупругих оболочках не взаимодействующих с вязкой жидкостью рассмотрены в [1].

Получим соответствующее уравнение с помощью асимптотических методов малых параметров для решения связанной задачи гидроупругости, включающей уравнения динамики геометрически нелинейной упругой оболочки, окруженной упругой средой и уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости с соответствующими граничными условиями.

Рассмотрим бесконечно длинную упругую цилиндрическую оболочку, внутри которой находится вязкая несжимаемая жидкость.

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат r, Θ, x записываются в случае осесимметричного течения в виде [2]

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x\frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \nu\left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2}\right),\\
&\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \nu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}\right)\\
&\frac{\partial V_r}{\partial t} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

На границе с оболочкой выполняются условия прилипания жидкости в подходе Лагранжа

$$\frac{\partial U}{\partial t} = V_x + U\frac{\partial V_x}{\partial x} - W\frac{\partial V_x}{\partial r}, \quad -\frac{\partial W}{\partial t} = V_r + U\frac{\partial V_r}{\partial x} - W\frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad \text{при} \quad r = R - W \tag{2}$$

здесь t – время; V_r, V_x – проекции вектора скорости на оси цилиндрической системы координат; p – давление; ρ – плотность; ν – кинематический коэффициент вязкости; U – продольное упругое перемещение оболочки по оси x; W – прогиб оболочки, положительный к центру кривизны; R_1 – внутренний радиус оболочки; R – радиус срединной поверхности оболочки; h_0 – толщина оболочки ($h_0 = 2\,(R - R_1)$) и $h_0 << R$.

Записывая уравнения движения элемента цилиндрической оболочки в перемещениях для модели Кирхгофа-Лява считаем материал упругим

с зависимостью интенсивности напряжений σ_i от интенсивности деформаций e_i [3]

$$\sigma_i = Ee_i \tag{3}$$

здесь E – модуль Юнга.

Уравнение динамики геометрически нелинейной оболочки с учетом (3) записываются в виде

$$\begin{aligned}
&\tfrac{Eh_0}{1-\mu_0^2}\tfrac{\partial}{\partial x}\left\{\tfrac{\partial U}{\partial x}+\tfrac{1}{2}\left[\left(\tfrac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\tfrac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right]+\tfrac{h_0^2}{24}\left(\tfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2-\mu_0\tfrac{W}{R}\right\}-\\
&\qquad -\rho_0 h_0\tfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\left[k_3\frac{R^2\rho_0 h_0 c_0^2}{l^4}U\mp k_4\frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{R^2 l^2}U^3\right]=-q_x;\\
&\tfrac{Eh_0}{1-\mu_0^2}\left\langle\tfrac{h_0^2}{12}\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\tfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}\left(1+\tfrac{\partial U}{\partial x}\right)\right]-\left\{\tfrac{\mu_0}{R}\tfrac{\partial U}{\partial x}+\tfrac{1}{2}\tfrac{\mu_0}{R}\left[\left(\tfrac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\tfrac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\tfrac{h_0^2}{12}\left(\tfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2\right]-\tfrac{W}{R^2}\right\}-\right.\\
&\qquad -\tfrac{\partial}{\partial x}\left\{\tfrac{\partial W}{\partial x}\left\{\tfrac{\partial U}{\partial x}+\tfrac{1}{2}\left[\left(\tfrac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\tfrac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right]+\tfrac{h_0^2}{24}\left(\tfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2-\right.\right.\\
&\qquad \left.\left.\left.-\mu_0\tfrac{W}{R}\right\}\right\}\right\rangle+\rho_0 h_0\tfrac{\partial^2 W}{\partial t^2}+k_1\tfrac{\rho_0 h_0 c_0^2}{l^2}W=q_n;
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь ρ_0 – плотность материала оболочки; μ_0 – коэффициент Пуассона; $\sqrt{E/\left[\rho_0\left(1-\mu_0^2\right)\right]}=c_0$ – скорость звука в материале оболочки; l – длина волны, q_x, q_n – напряжения со стороны жидкости, находящиеся внутри оболочки. Выражения в уравнениях системы (4)

$$-k_3\frac{R^2\rho_0 h_0 c_0^2}{l^4}U\pm k_4\frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{R^2 l^2}U^3,\quad k_1\frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{l^2}W \tag{5}$$

характеризует реакцию упругой среды в которой расположена труба кругового сечения Власова–Леонтьева.

Выражение $-k_3\frac{R^2\rho_0 h_0 c_0^2}{l^4}U\pm k_4\dfrac{\rho_0 h_0 c_0^2}{R^2 l^2}U^3$ реакция на продольное перемещение, а слагаемые $k_1\frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{l^2}W$ – реакция на сдавливание (сжатие). Коэффициенты k_1, k_3, k_4 – определены в [4, 5].

Поверхностные напряжения со стороны жидкости снесенные на невозмущенную поверхность оболочки ($W << R$) определяются формулами

$$q_x=\left[\rho\nu\left(\frac{\partial V_x}{\partial r}+\frac{\partial V_r}{\partial x}\right)\right]_{r=R},\quad q_n=\left[-p+2\rho\nu\frac{\partial V_r}{\partial r}\right]_{r=R} \tag{6}$$

2. Принимая за характерную длину l – длину волны, перейдем к

безразмерным переменным для исследования уравнений (4)

$$W = w_m u_3, \quad U = u_m u_1, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0 \left(1 - \mu_0^2\right)}}. \quad (7)$$

Положим

$$\begin{gathered} \frac{u_m}{l} = \varepsilon = o\left(1\right), \quad \frac{w_m}{R} = O\left(\varepsilon\right), \quad \frac{R}{l} = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right), \quad \frac{h_0}{R} = O\left(\varepsilon\right), \\ \frac{E}{m} = O\left(\varepsilon\right), \quad k_1 = O\left(1\right), \quad k_3 = O\left(1\right), \quad k_4 = O\left(1\right) \end{gathered} \quad (8)$$

где $\varepsilon << 1$ – малый параметр задачи (4).

Применим метод асимптотических разложений вводя независимые переменные в виде

$$\xi = x^* - ct, \quad \tau = \varepsilon t^* \quad (9)$$

где c – безразмерная неизвестная скорость волны, τ – внутренняя переменная, а зависимые переменные в виде разложения по малому параметру ε

$$u_1 = u_{10} + \varepsilon u_{11} + \ldots, \quad u_3 = u_{30} + \varepsilon u_{31} + \ldots. \quad (10)$$

Подставляя (7), (9), (10) в уравнения (4) с учетом оценок (8) получим в нулевом приближении по ε линейную систему уравнений

$$\begin{gathered} -\mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} + \frac{w_m l}{u_m R} u_{30} = 0, \\ \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R} \frac{\partial u_{30}}{\partial \xi} - c^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} = 0, \end{gathered}$$

из которой следует связь

$$\frac{w_m l}{u_m R} u_{30} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \quad (11)$$

и определяется безразмерная скорость волны

$$c^2 = 1 - \mu_0^2 \quad (12)$$

Из следующего приближения по ε, учитывая (11) и (12) находится урав-

нение, являющееся составным, для u_{10}

$$\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi\partial\tau} + \frac{u_m}{l\varepsilon}\frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{R^2}{l^2}\frac{\mu_0^2\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}\frac{\partial^4 u_{10}}{\partial\xi^4} + \frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1-\mu_0^2}}\frac{k_1}{\varepsilon}\frac{R^2}{l^2}\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2} - \\ - \frac{k_3}{\varepsilon}\frac{R^2}{l^2}u_{10} \pm \frac{k_4}{\varepsilon}\frac{u_m^2}{R^2}u_{10}^3 = -\frac{1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}}\frac{l^2}{\varepsilon u_m\rho_0 h_0 c_0^2}\left[q_x - \mu_0\frac{R}{l}\frac{\partial q_n}{\partial\xi}\right] \tag{13}$$

3. Для определения правой части уравнения (13) введем безразмерные переменные и параметры

$$V_r = w_m\frac{c_0}{l}v_r, \quad V_x = w_m\frac{c_0}{R_1}v_x, \quad r^* = \frac{r}{R}, \quad t^* = \frac{c_0}{l}t, \quad x^* = \frac{x}{l}, \\ p = \frac{\rho\nu c_0 l w_m}{R^3}P, \quad \psi = \frac{R}{l} = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right), \quad \lambda = \frac{w_m}{R} = O\left(\varepsilon\right). \tag{14}$$

Подставляя (14) в уравнение гидродинамики (1) и граничные условия (2), представим безразмерные скорости и давление в виде разложения по малому параметру λ

$$v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \ldots, \quad v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \ldots, \quad P = P^0 + \lambda P^1 + \ldots \tag{15}$$

В нулевом приближении по ψ ($\psi = 0$ – гидродинамическая теория смазки), считая $\psi\frac{R_1 c_0}{\nu} << 1$ – ползущие течения [6] и в нулевом приближении по λ получаем уравнения гидродинамики (классические уравнения гидродинамической теории смазки)

$$\frac{\partial p^0}{\partial r^*} = 0; \quad \frac{\partial p^0}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*}\right); \quad \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* v_r^0\right) + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0 \tag{16}$$

и граничные условия

$$r^*\frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} = 0, \quad r^*\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = 0 \quad \text{при} \quad r^* = 0 \\ v_r^0 = -\frac{\partial u_3}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = -\frac{u_m R}{w_m l}\frac{\partial u_1}{\partial t^*} \quad \text{при} \quad r^* = 1 \tag{17}$$

Из решения задачи (16), (17) следует, что

$$
\begin{aligned}
&P^0 = 16 \int \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R}{w_m l} \frac{\partial u_1}{\partial t^*} - \int \frac{\partial u_3}{\partial t^*} dx^* \right] dx^* \\
&\left. \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = \frac{r^*}{2} \cdot \left. \frac{\partial p^0}{\partial x^*} \right|_{r^*=1} = 8 \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R}{w_m l} \frac{\partial u_1}{\partial t^*} - \int \frac{\partial u_3}{\partial t^*} dx^* \right]
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Учитывая, что были введены переменные (9), (10) и, имея соотношения (11), (12), из (18) получим

$$
\begin{aligned}
&P^0 = 8\sqrt{1-\mu_0^2} \frac{u_m R}{w_m l} \left[2\mu_0 - 1 \right] u_{10}, \\
&\left. \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = 4\sqrt{1-\mu_0^2} \frac{u_m R}{w_m l} \left[2\mu_0 - 1 \right] \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

С принятой точностью по ε, ψ, λ из (6) найдем

$$
q_x = \lambda \frac{\nu}{R c_0} \rho c_0^2 \left. \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \right|_{r^*=1}, \quad q_n = -\frac{\lambda}{\psi} \frac{\nu}{R_1 c_0} \rho c_0^2 P^0
$$

и, следовательно, выражение в правой части уравнения (13) принимает вид

$$
q_x - \mu_0 \frac{R}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} = -4\sqrt{1-\mu_0^2} \frac{\nu}{R c_0} \rho c_0^2 \frac{u_m}{l} \left[1 - 4\mu_0^2 \right] \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \tag{20}
$$

Подставляя (20) в уравнение (13) окончательно получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{u_m}{l\varepsilon} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} + \frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{k_1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - \\
&\qquad - \frac{k_3}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} u_{10} \pm \frac{k_4}{\varepsilon} \frac{u_m^2}{R^2} u_{10}^3 = 2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\nu}{R c_0} \left[1 - 4\mu_0^2 \right] \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Легко видеть, что замена

$$
\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = c_1 \varphi, \quad \eta = c_2 \xi, \quad \tau = c_3 \tilde{t} \tag{22}
$$

позволяет записать уравнение (21) в виде

$$
\varphi_{\tilde{t}} + 6\varphi\varphi_\eta + \varphi_{\eta\eta\eta} + s_2 \varphi_\eta - s\varphi - \int \varphi \, d\eta \pm s_6 \left(\int \varphi \, d\eta \right)^3 = 0 \tag{23}
$$

Постоянные c_1, c_2, c_3 определяются при подстановке (22) в (21) и имеют вид

$$c_3 = \sigma_7^{1/4}\sigma_5^{3/4}; \quad c_2 = \sigma_7^{-1/4}\sigma_5^{1/4}; \quad c_1 = \sigma_0^{-1}\sigma_7^{1/2}\sigma_5^{1/2}; \tag{24}$$

при этом вводится обозначение

$$s_2 = \sigma_2\frac{c_2^2}{\sigma_5}, \quad s = \sigma\frac{c_2}{\sigma_5}, \quad s_6 = \sigma_6\frac{c_1^2}{c_2^2\sigma_5} \tag{25}$$

где

$$6\sigma_0 = \frac{u_m}{l\varepsilon}\frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}, \quad \sigma_2 = \frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1-\mu_0^2}}\frac{k_1}{\varepsilon}\frac{R^2}{l^2}, \quad \sigma_5 = \frac{k_3}{\varepsilon}\frac{R^2}{l^2}, \quad \sigma_6 = \frac{k_4}{\varepsilon}\frac{u_m^2}{R^2},$$
$$\sigma_7 = \frac{1}{\varepsilon}\frac{R^2}{l^2}\frac{\mu_0^2\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}, \quad \sigma = 2\frac{\rho l}{\rho_0 h_0}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\nu}{Rc_0}\left[1-4\mu_0^2\right].$$

Отметим, что $s > 0$ при $\mu_0 < \frac{1}{2}$ – неорганические материалы, $s < 0$ при $\mu_0 > \frac{1}{2}$ – живые организмы и $s = 0$ при $\mu_0 = \frac{1}{2}$ – несжимаемый материал, такой как резина, или при отсутствии жидкости.

При отсутствии жидкости $s = 0$ получим из (23) уравнение

$$\varphi_{\tilde{t}} + 6\varphi\varphi_\eta + \varphi_{\eta\eta\eta} + s_2\varphi_\eta - \int \varphi\, d\eta + s_6\left(\int \varphi\, d\eta\right)^3 = 0, \tag{26}$$

которое имеет точное решение в виде солитона

$$\varphi = \frac{1}{2s_6}\cosh^{-2}\left\{\frac{1}{2\sqrt{s_6}}\left[\eta - \left(\frac{1}{s_6} + 2s_6 + s_2\right)\tilde{t}\right]\right\}. \tag{27}$$

Численный расчет уравнения (23) с начальным условием в виде решения (27) при $\tilde{t} = 0$ показал, что влияние окружающий среды в продольном направление приводит к более медленному росту амплитуды волны при $\mu_0 < \frac{1}{2}$ и более медленному затуханию волны при $\mu_0 > \frac{1}{2}$, чем при отсутствии влияния окружающей среды в продольном направление

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 16-01-00175-а

Список литературы

1. Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 1995. — Т. 3, № 1. — С. 52–58.

2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.: Дрофа, 2003. — С. 840.

3. Каузерер К. Нелинейная механика. — М.: Иностранная литература, 1961. — С. 240.

4. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. — М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1960. — С. 490.

5. Михасев Г. И., Шейко А. Н. О влиянии параметра упругой нелокальности на собственные частоты колебаний углеродной нанотрубки в упругой среде // Труды БГТУ, Сер. Физ.-ма. наук и информат. — 2012. — Т. 153, № 6. — С. 41–44.

6. Солитон в стенке нанотрубки и стоксово течение в ней / В. С. Попов, О. А. Родыгина, С. А. Чивилихин, В. В. Гусаров // Письма в ЖТФ. — 2010. — Т. 36, № 18. — С. 48–54.