**УДК 532.516:539.3**

**Блинков Юрий Анатольевич**
ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный
университет имени Н.Г. Чернышевского»
Россия, Саратов
заведующий кафедрой «Математического и компьютерного
моделирования»
E-mail: blinkovua@info.sgu.ru
**Блинкова Анастасия Юрьевна**
ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный технический
университет имени Гагарина Ю.А.»
Россия, Саратов
Ассистент кафедры «Прикладная математика и системный анализ»
E-mail: anblinkova26@gmail.com
**Могилевич Лев Ильич**
Поволжский филиал Московского государственного
университета путей сообщения
Россия, Саратов
Профессор кафедры «Высшая и прикладная математика»
E-mail: mogilevich@sgu.ru

# Моделирование нелинейных волн дисперсии в оболочке при воздействие упругой окружающий среды

Настоящее исследование посвящено анализу распространения нелинейных волн деформаций в упругих цилиндрических оболочках, окруженных упругой средой. Представлено новое точное решение в виде солитона на пьедестале уравнения Гарднера. Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 13-01-00177-а, 16-01-00175-а.

Ключевые слова: нелинейные волны, цилиндрические упругие оболочки, окружающая упругая среда.

**Blinkov Yury Anatolyevich**
Federal State-Funded Educational Institution of Higher Professional
Education Saratov State University
Russian Federation, Saratov
Head of Department of Mathematical and Computer Modelling
E-mail: blinkovua@info.sgu.ru
**Blinkova Anastasija Yuryevna**
Yuri Gagarin State Technical University of Saratov
Russian Federation, Saratov
Assistant of Department of Applied Mathematics and System Analysis
E-mail: anblinkova26@gmail.com
**Mogilevich Lev Ilich**
Volga Region Branch of Moscow State
University of Means of Communication
Russian Federation, Saratov
Professor of Department of Higher and Applied Mathematics
E-mail: mogilevich@sgu.ru

## Modeling of Nonlinear Wave Dispersion in the Shell under the of the Influence Elastic Surrounded Medium

The present research focuses on the analysis of nonlinear wave propagation in elastic deforund cylindrical shells, surrounded by an elastic medium. The new exact solution in the form of a soliton on the pedestal of Gardner equation is presented. The research, described in this paper, was financially supported by the Russian Foundation for Fundamental Investigation (The RFFI Grants 13-01-00177-a, 16-01-00175-a).

Key words: nonlinear waves, elastic cylindrical shells, surrounded by an elastic media.

**1.** Волновые процессы в упругих, вязкоупругих и нелинейных вязко-упругих оболочках были рассмотрены в [1].

Получим соответствующее уравнение с помощью асимптотических методов малого параметра для решения задачи динамики геометрически и физически нелинейной теории упругих оболочек, окруженных упругой средой.

Записывая уравнения движения элемента цилиндрической оболочки в перемещениях для модели Кирхгофа-Лява считаем материал нелинейно-упругим с кубической зависимостью интенсивности напряжений $\sigma_i$ от интенсивности деформаций $e_i$ [2]

$$\sigma_i = Ee_i \mp me_i^3 \tag{1}$$

здесь $E$ – модуль Юнга; $m$ – константа материала, определяемая из опытов на растяжение или сжатие.

Уравнение динамики геометрически и физически нелинейной оболочки с учетом (1) записываются в виде

$$\begin{aligned}
&\tfrac{Eh_0}{1-\mu_0^2}\tfrac{\partial}{\partial x}\left\langle\left\{\tfrac{\partial U}{\partial x}+\tfrac{1}{2}\left[\left(\tfrac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\tfrac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right]+\tfrac{h_0^2}{24}\left(\tfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2-\mu_0\tfrac{W}{R}\right\}\times\right.\\
&\qquad\left.\times\left\{1\mp\left[\tfrac{4}{3}\tfrac{m}{E}\left(\tfrac{\partial U}{\partial x}-\tfrac{W}{R}\right)^2+\tfrac{\partial U}{\partial x}\tfrac{W}{R}\right]\right\}\right\rangle-\rho_0 h_0\tfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0;\\
&\tfrac{Eh_0}{1-\mu_0^2}\left\langle\tfrac{h_0^2}{12}\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\tfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}\left(1+\tfrac{\partial U}{\partial x}\right)\right]-\left\{\tfrac{\mu_0}{R}\tfrac{\partial U}{\partial x}+\tfrac{1}{2}\tfrac{\mu_0}{R}\left[\left(\tfrac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\tfrac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\tfrac{h_0^2}{12}\left(\tfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2\right]-\tfrac{W}{R^2}\right\}\times\right.\\
&\times\left\{1\pm\left[\tfrac{4}{3}\tfrac{m}{E}\left(\tfrac{\partial U}{\partial x}-\tfrac{W}{R}\right)^2+\tfrac{\partial U}{\partial x}\tfrac{W}{R}\right]\right\}-\tfrac{\partial}{\partial x}\left\{\tfrac{\partial W}{\partial x}\left\{\tfrac{\partial U}{\partial x}+\tfrac{1}{2}\left[\left(\tfrac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\tfrac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right]+\tfrac{h_0^2}{24}\left(\tfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2-\right.\right.\\
&\left.\left.\left.-\mu_0\tfrac{W}{R}\right\}\left\{1\mp\left[\tfrac{4}{3}\tfrac{m}{E}\left(\tfrac{\partial U}{\partial x}-\tfrac{W}{R}\right)^2+\tfrac{\partial U}{\partial x}\tfrac{W}{R}\right]\right\}\right\}\right\rangle+\rho_0 h_0\tfrac{\partial^2 W}{\partial t^2}+\\
&\qquad+\left[k_1\tfrac{\rho_0 h_0 c_0^2}{l^2}W\mp k_2\tfrac{l^2\rho_0 h_0 c_0^2}{R^6}W^3-2t_1\rho_0 h_0 c_0^2\tfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}+m_0\rho_0 h_0\tfrac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right]=0;
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь$\rho_0$ – плотность материала оболочки; $\mu_0$ – коэффициент Пуассона; $\sqrt{E/\left[\rho_0\left(1-\mu_0^2\right)\right]}=c_0$ – скорость звука в материале оболочки; $l$ – длина волны,

$$k_1\frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{l^2}W\mp k_2\frac{l^2\rho_0 h_0 c_0^2}{R^6}W^3-2t_1\rho_0 h_0 c_0^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+m_0\rho_0 h_0\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \tag{3}$$

характеризует реакцию упругой среды в которой расположена труба кругового сечения Власова–Леонтьева.

Выражение $k_1\frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{l^2}W\mp k_2\frac{l^2\rho_0 h_0 c_0^2}{R^6}W^3$ – реакция на сдавливание (сжатие), $-2t_1\rho_0 h_0 c_0^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ – реакция на сдвиг, $m_0\rho_0 h_0\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ – инерционная реакция. Коэффициенты $k_1$, $k_2$, $t_1$, $m_0$ – определены в [3, 4].

**2**. Принимая за характерную длину $l$ – длину волны, перейдем к безразмерным переменным для исследования уравнений (2)

$$W = w_m u_3, \quad U = u_m u_1, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0 \left(1 - \mu_0^2\right)}}. \tag{4}$$

Положим

$$\begin{gathered} \frac{u_m}{l} = \varepsilon = o\left(1\right), \quad \frac{w_m}{R} = O\left(\varepsilon\right), \quad \frac{R}{l} = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right), \quad \frac{h_0}{R} = O\left(\varepsilon\right), \\ \frac{E}{m} = O\left(\varepsilon\right), \quad k_1 = O\left(1\right), \quad k_2 = O\left(1\right), \quad t_1 = O\left(1\right), \quad m_0 = O\left(1\right) \end{gathered} \tag{5}$$

где $\varepsilon << 1$ – малый параметр задачи (2).

Применим метод асимптотических разложений вводя независимые переменные в виде

$$\xi = x^* - ct, \quad \tau = \varepsilon t^* \tag{6}$$

где $c$ – безразмерная неизвестная скорость волны, $\tau$ – внутренняя переменная, а зависимые переменные в виде разложения по малому параметру $\varepsilon$

$$u_1 = u_{10} + \varepsilon u_{11} + \ldots, \quad u_3 = u_{30} + \varepsilon u_{31} + \ldots. \tag{7}$$

Подставляя (4), (6), (7) в уравнения (2) с учетом оценок (5) получим в нулевом приближении по $\varepsilon$ линейную систему уравнений

$$\begin{gathered} -\mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} + \frac{w_m l}{u_m R} u_{30} = 0, \\ \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R} \frac{\partial u_{30}}{\partial \xi} - c^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} = 0, \end{gathered}$$

из которой следует связь

$$\frac{w_m l}{u_m R} u_{30} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \tag{8}$$

и определяется безразмерная скорость волны

$$c^2 = 1 - \mu_0^2 \tag{9}$$

Из следующего приближения по $\varepsilon$, учитывая (8) и (9) находится уравнение, являющееся составным, для $u_{10}$

$$\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi\partial\tau}+\frac{u_m}{l\varepsilon}\frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2}+\left\{\frac{1}{\varepsilon}\frac{R^2}{l^2}\frac{\mu_0^2\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}\left[1+m_0\right]-\frac{\mu_0^2}{\sqrt{1-\mu_0^2}}\frac{t_1}{\varepsilon}\frac{R^2}{l^2}\right\}\frac{\partial^4 u_{10}}{\partial\xi^4}-$$
$$-\left[\pm\frac{2m}{E\varepsilon}\sqrt{1-\mu_0^2}\left(1-\mu_0+\mu_0^2\right)\left(\frac{u_m}{l}\right)^2\pm\frac{3\mu_0^4k_2l^2}{2\sqrt{1-\mu_0^2}\varepsilon R^2}\left(\frac{w_m^2}{R^2}\right)\right]\left(\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}\right)^2\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2}+$$
$$+\frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1-\mu_0^2}}\frac{k_1}{\varepsilon}\frac{R^2}{l^2}\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2}=0. \qquad (10)$$

Легко видеть, что замена

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}=c_1\varphi,\quad \eta=c_2\xi,\quad \tau=c_3\tilde{t} \qquad (11)$$

позволяет записать уравнение (10) в виде

$$\varphi_{\tilde{t}}+6\varphi\varphi_\eta+\varphi_{\eta\eta\eta}\mp 6\varphi^2\varphi_\eta+s_2\varphi_\eta=0 \qquad (12)$$

Постоянные $c_1$, $c_2$, $c_3$ определяются при подстановке (11) в (10) и имеют вид

$$c_1=\frac{\sigma_0}{\sigma_1};\quad c_2=\frac{\sigma_0}{\sigma_1^{1/2}\sigma_3^{1/2}};\quad c_3=\frac{\sigma_0^3}{\sigma_1^{3/2}\sigma_3^{1/2}}; \qquad (13)$$

при этом вводится обозначение

$$s_2=\frac{\sigma_0\sigma_2}{\sigma_1^{1/2}\sigma_3^{1/2}}, \qquad (14)$$

где

$$6\sigma_0=\frac{u_m}{l\varepsilon}\frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2},\quad 6\sigma_1=\left[\pm\frac{2m}{E\varepsilon}\sqrt{1-\mu_0^2}\left(1-\mu_0+\mu_0^2\right)\left(\frac{u_m}{l}\right)^2\pm\frac{3\mu_0^4k_2w_m^2l^2}{2\sqrt{1-\mu_0^2}\varepsilon R^4}\right],$$
$$\sigma_2=\frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1-\mu_0^2}}\frac{k_1}{\varepsilon}\frac{R^2}{l^2},\quad \sigma_3=\left\{\frac{1}{\varepsilon}\frac{R^2}{l^2}\frac{\mu_0^2\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}\left[1+m_0\right]-\frac{\mu_0^2}{\sqrt{1-\mu_0^2}}\frac{t_1}{\varepsilon}\frac{R^2}{l^2}\right\}. \qquad (15)$$

Уравнение (12) имеет точное решение в виде солитона на пьедестале

$$\varphi = D + \frac{k^2}{(1 \mp 2D) \pm \sqrt{(1 \mp 2D)^2 \mp k^2}\cosh(k\left[\eta - (k^2 + s_2 + 6D \mp 6D^2)\tilde{t}\right])} \tag{16}$$

обобщающие решение Слюняева–Пелиновского [5] и которое получается при $D = 0$.

**Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 13-01-00177-а, 16-01-00175-а.**

# Список литературы

1. Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 1995. — Т. 3, № 1. — С. 52–58.

2. Каузерер К. Нелинейная механика. — М.: Иностранная литература, 1961. — С. 240.

3. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. — М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1960. — С. 490.

4. Михасев Г. И., Шейко А. Н. О влиянии параметра упругой нелокальности на собственные частоты колебаний углеродной нанотрубки в упругой среде // Труды БГТУ, Сер. Физ.-ма. наук и информат. — 2012. — Т. 153, № 6. — С. 41–44.

5. Слюняев А. В., Пелиновский Е. Н. Динамика солитонов большой амплитуды // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. — 1999. — Т. 116, № 1. — С. 318–335.