

**УДК 532.516:539.3**

**Могилевич Лев Ильич**

Поволжский филиал Московского государственного  
университета путей сообщения

Россия, Саратов

Профессор кафедры «Высшая и прикладная математика»

E-mail: mogilevich@sgu.ru

**Попов Виктор Сергеевич**

Саратовский государственный технический  
университет имени Гагарина Ю.А.

Россия, Саратов

Профессор кафедры «Прикладная математика и системный анализ»

E-mail: vic\_p@bk.ru

**Динамика упругой стенки канала с вязкой жидкостью, установленной  
на упругом основании**

В работе рассматривается задача о колебаниях стенки плоского канала установленного на упругом основании Винклера. Канал заполнен вязкой несжимаемой жидкостью. Приведен пример расчета гидроупругих колебаний стенки. Выполнено при поддержке гранта РФФИ 15-01-01604-а.

Ключевые слова: гидроупругость, вязкая жидкость, колебания, основание Винклера

**Mogilevich Lev Ilich**

Volga Region Branch of Moscow State  
University of Means of Communication

Russian Federation, Saratov

Professor of Department of Higher and Applied Mathematics

E-mail: mogilevich@sgu.ru

**Popov Victor Sergeevich**

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov  
Russian Federation, Saratov

Professor of Department of Applied Mathematics and System Analysis

E-mail: vic\_p@bk.ru

**Elastic Channel Wall Dynamics with Viscous Liquid on Elastic Foundation**

The problem of elastic channel wall oscillation on Winkler foundation is carried out. The channel is filled with a viscous incompressible liquid. The example of calculation of hydroelastic channel wall oscillation is done. The research, described in this paper, was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research (The RFFI Grant 15-01-01604a).

Key words: hydroelasticity, viscous liquid, oscillations, Winkler foundation

**Вступление и обзор литературы.** Задачи взаимодействия жидкости с ограничивающими ее стенками рассмотрены в [1-25]. В [1] рассмотрены задачи взаимодействия упругих и вязкоупругих пластин с идеальной жидкостью для исследования динамики и устойчивости упругих или вязкоупругих элементов датчиков давления. Задача об изгибных колебаниях стенки канала как балки-полоски, взаимодействующей с идеальной жидкостью, заполняющей канал рассмотрена в [2], и на ее базе выполнено исследование причин возникновения вибрационной кавитации в жидкости. В [3] исследованы колебания-балки полоски, погруженной в идеальную несжимаемую жидкость со свободной поверхностью. В [4] исследованы колебания консольно-закрепленной пластины, находящейся в неограниченном объеме вязкой несжимаемой жидкости с изначальным заданием линеаризованных граничных условий на невозмущенной поверхности пластины. С другой стороны, в [5] исследованы хаотические колебания пластины при ее взаимодействии с потоком идеальной несжимаемой жидкости. Исследованию демпфирования гармонически вибрирующей бесконечно длиной балки-полоски на слое вязкой сжимаемой и несжимаемой жидкости посвящены работы [6-8]. Исследование взаимодействия вибрирующих дисков со слоем вязкой несжимаемой жидкости, находящейся между ними, выполнено в работе [9]. При этом показано, что упругие колебания стенок канала на резонансных частотах приводят к изменению давления в жидкости на несколько порядков и являются основной причиной вибрационной кавитации. В [10] рассмотрена аналогичная задача для двух вибрирующих пластин. Вибрация круглой пластины на свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости рассмотрена в [11]. Колебания круглой

пластины, погруженной в воду со свободной поверхностью, исследовано в [12]. В [13] выполнено исследование гидроупругих колебаний балки в потоке вязкой жидкости. В работе [14] поставлена и аналитически решена в плоской постановке задача изгибных гидроупругих колебаний однородной пластины, образующей стенку щелевого канала с пульсирующим слоем вязкой несжимаемой жидкости при заданном гармоническом законе пульсации давления на одном торце. В работе [15] предложена математическая модель для исследования параметров потока вязкой жидкости в щелевом канале с упруго закрепленной стенкой, а в работе [16] рассмотрена аналогичная проблема для канала вторая стенка которого является упругой пластиной. Следует здесь также отметить работы [17-24], в которых рассмотрены различные аспекты динамики взаимодействия слоя вязкой несжимаемой жидкости с упругими элементами различных конструкций (трубопроводов, приборов навигации, двигателей внутреннего сгорания с водяным охлаждением, демпферов).

Можно отметить, что в указанных выше работах не рассмотрены гидроупругие колебания пластин, установленных на упругом основании. В работе [25] рассмотрено взаимодействие мембраны на упругом основании с идеальной несжимаемой жидкостью. В предлагаемой работе рассматривается задача динамики взаимодействия упругой пластины на основании Винклера с пульсирующим слоем вязкой несжимаемой жидкости.

**Постановка задачи и ее решение.** Рассмотрим плоский канал (см. рис.1) стенка 1, которого – пластина-полоска, установленная на упругое основание Винклера и шарнирно опертая на торцах. Ширина канала  $b \gg \ell$ . Толщина пластины  $h_0$ , толщина слоя жидкости  $\delta_0 \ll \ell$ . Стенка 2 канала абсолютно жесткая и неподвижная относительно основания. В канале находится пульсирующий слой вязкой жидкости, под действием которого пластина 1 совершает изгибные колебания с амплитудой  $w_m \ll \delta_0$ . На торцах канала имеет место свободное истечение в ту же жидкость, в которой поддерживается заданный закон пульсации давления  $p_0 + p(\omega t)$ , где  $p(\omega t) = p_m f(\omega t)$ ,  $f = e^{i\omega t}$ ,  $\omega$  - частота,  $t$  - время,  $p_0$  - статическое давление. Расположим декартову систему координат в центре срединной поверхности пластины.

Уравнение изгибных колебаний стенки канала имеет вид

$$D \partial^4 w / \partial x^4 + \kappa w + \rho_0 h_0 \partial^2 w / \partial t^2 = q, \quad (1)$$

где  $D$ ,  $\rho_0$  – цилиндрическая жесткость пластины и плотность ее материала;  $\kappa$  – коэффициент постели;  $q = -p + 2\rho\nu \partial u_z / \partial z$  – напряжение, действующее на пластину со стороны жидкости [26];  $\rho$  – плотность жидкости;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости жидкости.

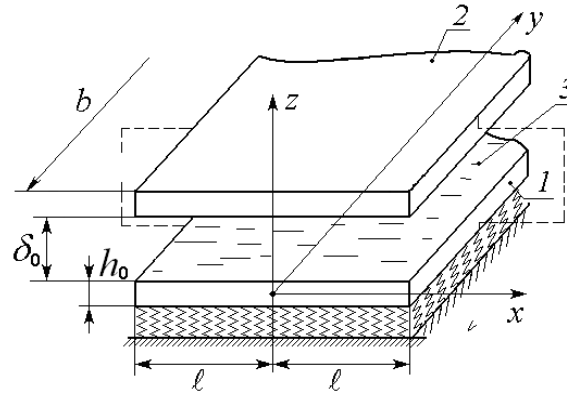


Рис.1

Введем безразмерные переменные и малые параметры:

$$\psi = \delta_0 / l \ll 1, \quad \lambda = w_m / \delta_0 \ll 1, \quad \text{Re} = \delta_0^2 \omega / \nu, \quad \tau = \omega t, \quad \xi = x / l, \quad \zeta = z / \delta_0; \quad (2)$$

$$u_z = w_m \omega U_\zeta; \quad u_x = w_m \omega U_\xi / \psi; \quad p = p_0 + p(\tau) + \rho \nu w_m \omega (\delta_0 \psi^2)^{-1} P, \quad w = w_m W,$$

где  $\psi$ ,  $\lambda$ ,  $\text{Re}$  – параметры, характеризующие задачу;  $U_\xi, U_\theta, U_\zeta$  – безразмерные компоненты вектора скорости жидкости;  $P$  – безразмерное давление жидкости;  $W$  – безразмерный прогиб.

Рассматривая движение вязкой жидкости в тонком зазоре [14-17] с учетом (2) в нулевом приближении по  $\psi$  и  $\lambda$  получены уравнения динамики тонкого слоя вязкой жидкости

$$\text{Re} \frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} = -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0, \quad (3)$$

и напряжение, действующее на пластину  $q = -p_0 - p(\tau) - \rho \nu w_m \omega (\delta_0 \psi^2)^{-1} P$ .

Граничные условия уравнений (1) и (3) – условия прилипания вязкой жидкости к стенкам, свободного истечения ее на торцах

$$U_\xi = U_\zeta = 0, \quad \text{при } \xi = 1, \quad U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \partial W / \partial \tau \quad \text{при } \zeta = 0; \quad P = 0 \quad \text{при } \zeta = \pm 1, \quad (4)$$

и шарнирного опирания упругой стенки на торцах

$$W = \partial^2 W / \partial \xi^2 = 0 \quad \text{при } \zeta = \pm 1. \quad (5)$$

Решая уравнения динамики жидкости (3) с граничными условиями (4)

для режима установившихся гармонических колебаний определяется давление

$$P = \int_{\xi}^1 \int \left( \operatorname{Re} \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + 12\gamma \frac{\partial W}{\partial \tau} \right) d\xi d\xi + \frac{1}{2} (\xi - 1) \int_{-1}^1 \int \left( \operatorname{Re} \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + 12\gamma \frac{\partial W}{\partial \tau} \right) d\xi d\xi, \quad (6)$$

здесь  $\alpha(\omega)$ ,  $\gamma(\omega)$  - частотозависимые коэффициенты, определенные в [9,14-17].

Учитывая краевые условия (5), представим решение (1) в виде ряда:

$$w = w_m W = w_m \sum_{k=1}^{\infty} (R_k(\tau) + R_k^0) \cos((2k-1)\pi\xi)/2. \quad (7)$$

Верхний индекс 0 в (7) соответствует решению, при постоянном давлении  $p_0$ .

Подставляя выражение для  $q$ , (6), (7) в (1) и решая его, для режима установившихся гармонических колебаний, определяется прогиб в виде

$$w = p_0 \frac{2\ell^4}{D} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cos((2k-1)\pi\xi/2)}{1 + (\kappa/D)(2\ell/(2k-1)\pi)^4} \left( \frac{2}{(2k-1)\pi} \right)^5 \right] + p_m A(\xi, \omega) \exp[i(\tau + \varphi(\xi, \omega))], \quad (8)$$

где  $A(\xi, \omega) = \sqrt{C(\xi, \omega)^2 + G(\xi, \omega)^2}$ ,  $\varphi(\xi, \omega) = \operatorname{arctg}(C(\xi, \omega)/G(\xi, \omega))$ ,

$$C(\xi, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1} A_k}{(2k-1)\pi D} \cos \frac{2k-1}{2} \pi \xi, \quad G(\xi, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1} B_k}{(2k-1)\pi D} \cos \frac{2k-1}{2} \pi \xi,$$

$$A_k = -a_{2k} (a_{1k}^2 + a_{2k}^2)^{-1}, \quad B_k = a_{1k} (a_{1k}^2 + a_{2k}^2)^{-1}, \quad a_{2k} = 2K_k \omega / D, \quad 2K_k = 12\gamma \omega (\alpha \operatorname{Re})^{-1} M_k,$$

$$a_{1k} = D^{-1} \left[ \left( \frac{(2k-1)\pi}{2\ell} \right)^4 D + \kappa - (\rho_0 h_0 + M_k) \omega^2 \right], \quad M_k = \frac{\rho v}{\delta_0 \omega^2} \left( \frac{2}{(2k-1)\pi} \right)^2 \frac{\alpha \operatorname{Re}}{\omega}.$$

В (8) функция  $A(\xi, \omega)$  является частотозависимой функцией распределения относительных амплитуд прогиба пластины вдоль канала. Таким образом, исследуя функцию  $A(\xi, \omega)$  можно изучать гидроупругие колебания стенки канала, установленного на основании Винклера. В качестве примера (см. рис.2), приведем результаты расчета  $A(\xi, \omega)$  для канала с параметрами:  $\ell = 0,1$  м,  $R/\delta = 10^2$ ,  $\delta/\ell = 2 \cdot 10^{-2}$ ,  $m = 7,5$  кг,  $n = 8,6 \cdot 10^8$  кг/с<sup>2</sup>,  $\rho = 1,84 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 2,5 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с,  $\kappa = 10^8$  Н/м<sup>3</sup>.

На рис.2а представлен расчет с учетом одного члена ряда, на рис.2б – с учетом 2-х членов ряда, а на рис.2в – с учетом 3-х членов ряда.

**Заключение и выводы.** Построенная частотозависимая функция распределения относительных амплитуд прогиба позволяет исследовать изгибные гидроупругие колебания стенки канала, установленного на упругом основании. Приведенные результаты расчетов показывают, что прогибы стенки канала существенно возрастают на резонансных частотах,

а для практических расчетов достаточно учета первых двух членов полученного решения в виде разложения в ряд. С увеличением резонансной частоты амплитуда колебаний стенки резко падает. Проведенные расчеты показали, что с увеличением жесткости основания происходит сдвиг резонансных частот в область высоких частот и снижение амплитуд колебаний. Построенная математическая модель может применяться для исследования динамических процессов в щелевых каналах, содержащих вязкую несжимаемую жидкость.

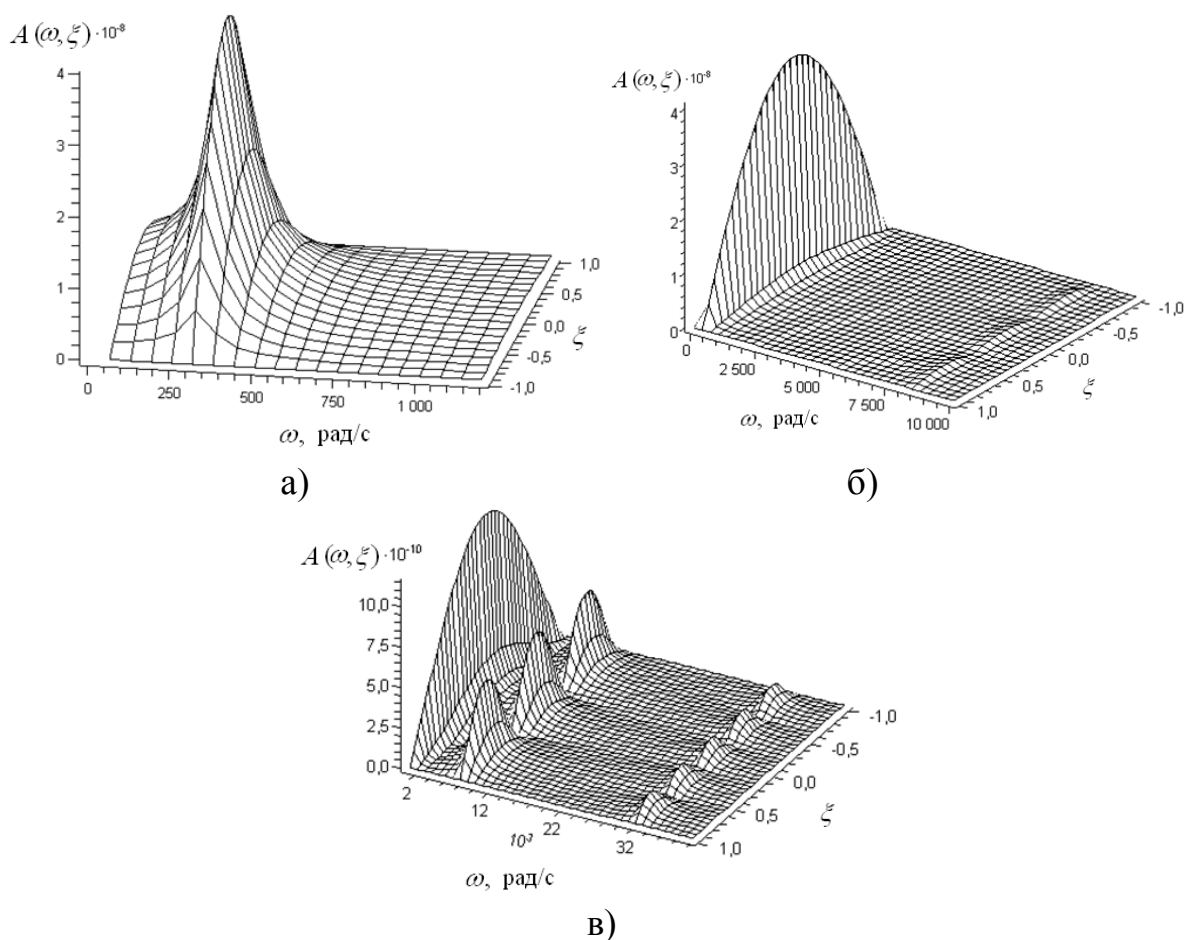


Рис.2.

*Выполнено при поддержке гранта РФФИ 15-01-01604-а.*

### Литература:

1. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Покладова Ю.В., Горбоконенко В.Д. Математическое моделирование механической системы «трубопровод - датчик давления». Ульяновск, 2008.
2. Индейцев Д.А., Полипанов И.С., Соколов С.К. Расчет кавитационного ресурса втулки судовых двигателей // Проблемы

машиностроения и надежности машин. 1994. №4. С.59-64.

3. Haddara M. R. and Cao S. A Study of the Dynamic Response of Submerged Rectangular Flat Plates // Marine Structures. 9. 1996. P. 913-933

4. Cassio T. Faria, Daniel J. Inman Modeling energy transport in a cantilevered Euler–Bernoulli beam actively vibrating in Newtonian fluid // Mechanical Systems and Signal Processing. 45. 2014. P. 317-329.

5. Avramov K. V. and Strel'nikova E. A. Chaotic oscillations of plates interacting on both sides with a fluid flow // International Applied Mechanics. Vol. 50. № 3. 2014. P.303-309

6. Enelund M. Vibration and damping of a plate on a viscous fluid layer. Proceeding of the 13th International Modal Analysis Conference (IMAC). 1995. P.261-267

7. Önsay T. Effects of layer thickness on the vibration response of a plate-fluid layer system // Journal of Sound and Vibration. 1993. Vol. 163. P. 231-259

8. Önsay T. Dynamic interactions between the bending vibration of a plate and a fluid layer attenuator // Journal of Sound and Vibration. 1994. Vol. 178. P. 289-313

9. Могилевич Л.И., Попов В.С. Исследование взаимодействия слоя вязкой несжимаемой жидкости со стенками канала, образованного соосными вибрирующими дисками // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2011. №3. С. 42-55.

10. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Динамика взаимодействия упругих элементов вибромашины со сдвливаемым слоем жидкости, находящимся между ними // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 4. С. 23-32.

11. Amabili M. Vibrations of Circular Plates Resting on a Sloshing Liquid: Solution of the Fully Coupled Problem // Journal of Sound and Vibration. 2001. Vol. 245, Iss. 2, P. 261-283

12. Askari E., Jeong K.-H., Amabili M., Hydroelastic Vibration of Circular Plates Immersed in a Liquid-filled Container with Free Surface // Journal of Sound and Vibration. 2013. Vol. 332, Iss. 12. P. 3064-3085

13. Akcabay D.T., Young Y.L., Hydroelastic Response and Energy Harvesting Potential of Flexible Piezoelectric Beams in Viscous Flow // Physics of Fluids. 2012, Vol.24. Iss. 5.

14. Агеев Р.В., Кузнецова Е.Л., Куликов Н.И., Могилевич Л.И., Попов В.С. Математическая модель движения пульсирующего слоя вязкой жидкости в канале с упругой стенкой // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2014. № 3. С. 17-35.

15. Ageev R.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Kondratov D.V. Mathematical model of pulsating viscous liquid layer movement in a flat channel with elastically fixed wall // Applied Mathematical Sciences. 2014. Т. 8. № 157-160. С. 7899-7908.

16. Агеев Р.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Движение вязкой жидкости в плоском канале, образованном вибрирующим штампом и шарнирно опертой пластиной // Труды МАИ. 2014. № 78.

17. Могилевич Л.И., Попова А.А., Попов В.С. Динамика взаимодействия упругой цилиндрической оболочки с ламинарным потоком жидкости внутри нее применительно к трубопроводному транспорту // Наука и техника транспорта. 2007. № 2. С. 64-72.

18. Попова А.А. Математическое моделирование процессов взаимодействия вязкой жидкости с тонкостенными ребристыми элементами гидродинамических демпферов и трубопроводов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Саратовский государственный технический университет. Саратов, 2008. 174 с.

19. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Колебания гильзы цилиндра двигателя внутреннего сгорания с водяным охлаждением под действием ударных нагрузок со стороны поршневой группы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 3. С. 100-106.

20. Попова А.А. Математическое моделирование динамических процессов в виброопоре с упругими элементами конструкции // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2007. Т. 1. № 4. С. 25-31.

21. Могилевич Л.И., Попова А.А. Динамическая задача гидроупругости виброопоры с упругой ребристой пластиной // Наука и техника транспорта. 2007. № 4. С. 55-61.

22. Попова А.А. Математическое моделирование процессов взаимодействия вязкой жидкости с тонкостенными ребристыми



элементами гидродинамических демпферов и трубопроводов: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. Саратов, 2008. 32 с.

23. Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Упругогидродинамика машин и приборов на транспорте - М.: РГОТУПС, 2007. 168 с

24. Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Возмущающие моменты в поплавковом гироскопе с упругим корпусом прибора на вибрирующем основании // Известия РАН. Механика твердого тела. 2005. №3. С. 11-21.

25. Алексеев В.В., Индейцев Д.А., Мочалова Ю.А. Резонансные колебания упругой мембраны на дне бассейна с тяжелой жидкостью // Журнал технической физики. 1999. Т. 69. № 8. С. 37-42.

26. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840с.