УДК 514.742.43

ЛИНЕЙНАЯ КОМБИНАЦИЯ КООРДИНАТ, НУЛЕВЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, СКРЫТЫЕ ВЕКТОРЫ

LINEAR COMBINATION OF COORDINATES, ZERO VECTOR OPERATORS, HIDDEN VECTORS

Ключевые слова: вектор, оператор, поверхностный, координаты, градиент, дивергенция, ротор, ортоположительный, ортоотрицательный.

Keywords: vector, operator, surface coordinates, gradient, divergence, rotor, ort, positive, negative.

Аннотация

Вводится понятие о линейной комбинации координат и ее делении на вектор, нулевом и мнимом нулевом векторных операторах, псевдовекторах и комбинированных векторах. Приведен ряд разложений с использованием введенных операций.

Annotation

We introduce the notion of a linear combination of coordinates and its division by a vector zero and zero imaginary vector operators, pseudo and combined vectors. Is a series of expansions using these operations.

Попов Игорь Павлович

Курганская государственная сельскохозяйственная академия им. Т.С. Мальцева, Россия, Курган

старший преподаватель кафедры технических систем в агробизнесе

ip.popow@yandex.ru

Popov Igor Pavlovich

Kurgan State Agricultural Academy T.S. Maltseva, Rossia, Kurgan

Введение

Работа посвящена рассмотрению ряда операций на пространстве гладких функций и векторных полей в $\mathbb{R}^3$ [1–3]. Используются векторный дифференциальный поверхностный оператор [4–6], поверхностный градиент, производная по произвольной поверхности, поверхностные дивергенция и ротор, являющиеся аналогами соответствующих величин первого порядка. Названные операции относятся к поверхностному дифференцированию, которое можно рассматривать в качестве обратной задачи к поверхностному интегрированию. Перечисленные операции могут использоваться для получения разложений ряда векторных представлений второго порядка, часть которых имеет аналоги первого порядка.

1 Линейная комбинация координат

В результате операций над векторными функциями, например, скалярного произведения, взятия дивергенции и т.п. появляются скалярные функции вида

$$W_C = \left(W_x + W_y + W_z\right)_C. \tag{1}$$

Такая функция является *линейной комбинацией координат*. Ее особенностью является то, что подобные, входящие в состав слагаемых W_x, W_y, W_z, не приведены.

Пример 1.1.

$$W_C = \mathbf{F} \tilde{\cdot} \mathbf{G} = (xy^2z\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} + y\mathbf{k}) \tilde{\cdot} (z\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \left(xy^2z^2 + xy^2z^2 + yz\right)_C$$

– линейная комбинация координат, а

$$W = 2xy^2z^2 + yz$$

– линейной комбинацией координат не является.

Здесь и далее волнистой чертой «~» помечена операция, результатом которой является сумма с неприведенными слагаемыми.

Может быть введена операция *деления линейной комбинации координат на вектор*.

$$\mathbf{F} = \frac{W_C}{\mathbf{G}} = W_C \cdot \mathbf{G}^{-1} = \frac{\left(W_x + W_y + W_z\right)_C}{G_x\mathbf{i} + G_y\mathbf{j} + G_z\mathbf{k}} = \frac{W_x}{G_x}\mathbf{i} + \frac{W_y}{G_y}\mathbf{j} + \frac{W_z}{G_z}\mathbf{k}. \tag{2}$$

Действительно,

$$F_xG_x = W_x,\; F_yG_y = W_y,\; F_zG_z = W_z,$$

$$F_x = \frac{W_x}{G_x},\; F_y = \frac{W_y}{G_y},\; F_z = \frac{W_z}{G_z},$$

$$\left(\frac{W_x}{G_x}\mathbf{i} + \frac{W_y}{G_y}\mathbf{j} + \frac{W_z}{G_z}\mathbf{k}\right) \cdot \left(G_x\mathbf{i} + G_y\mathbf{j} + G_z\mathbf{k}\right) = W_C.$$

W_C, в отличие от W, содержит информацию, достаточную для восстановления одного из векторов-сомножителей при известном другом.

$$\frac{\mathbf{F} \tilde{\cdot} \mathbf{G}}{\mathbf{G}} = \frac{\left(F_xG_x + F_yG_y + F_zG_z\right)_C}{G_x\mathbf{i} + G_y\mathbf{j} + G_z\mathbf{k}} = \frac{F_xG_x}{G_x}\mathbf{i} + \frac{F_yG_y}{G_y}\mathbf{j} + \frac{F_zG_z}{G_z}\mathbf{k} = \mathbf{F}.$$

Пример 1.2. См. данные примера 6.1.

$$\mathbf{F} = \frac{\left(xy^2z^2 + xy^2z^2 + yz\right)_C}{z\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}} = \frac{xy^2z^2}{z}\mathbf{i} + \frac{xy^2z^2}{xy}\mathbf{j} + \frac{yz}{z}\mathbf{k} = xy^2z\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} + y\mathbf{k}.$$

Линейную комбинацию координат можно делить на любой вектор, а не только на один из сомножителей, которые ее образовали

$$\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}}{\mathbf{H}}=\frac{\left(F_xG_x+F_yG_y+F_zG_z\right)_C}{H_x\mathbf{i}+H_y\mathbf{j}+H_z\mathbf{k}}=\frac{F_xG_x}{H_x}\mathbf{i}+\frac{F_yG_y}{H_y}\mathbf{j}+\frac{F_zG_z}{H_z}\mathbf{k}.$$

Пример 1.3.

$$\mathbf{F}=\frac{\left(xy^2z^2+xy^2z^2+yz\right)_C}{0,5x^2y^2\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+yz\mathbf{k}}=\frac{xy^2z^2}{0,5x^2y^2}\mathbf{i}+\frac{xy^2z^2}{yz}\mathbf{j}+\frac{yz}{yz}\mathbf{k}=\frac{2z^2}{x}\mathbf{i}+xyz\mathbf{j}+\mathbf{k}.$$

Замечание. В общем виде линейная комбинация координат имеет вид

$$W_C^*=\left(\alpha W_x+\beta W_y+\gamma W_z\right)_C,$$

где α, β, γ - постоянные коэффициенты. Последнее выражение может быть получено из (1) следующим образом

$$W_C^*=\frac{W_C}{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}\cdot\left(\alpha\mathbf{i}+\beta\mathbf{j}+\gamma\mathbf{k}\right)=\left(W_x\mathbf{i}+W_y\mathbf{j}+W_z\mathbf{k}\right)\cdot\left(\alpha\mathbf{i}+\beta\mathbf{j}+\gamma\mathbf{k}\right)=\left(\alpha W_x+\beta W_y+\gamma W_z\right)_C.$$

2. Нулевой векторный оператор

Может быть рассмотрена следующая задача. Имеются две линейные комбинации координат W_C и V_C. Найти формулы, связывающие W_C и V_C с выражениями $\left(W_xV_x+W_yV_y+W_zV_z\right)_C$ и $\left(W_xV_y+W_yV_z+W_zV_x\right)_C$.

Для решения этих и подобных задач может быть введен нулевой векторный оператор

$$\nabla_0=\frac{\partial^0}{\partial x^0}\mathbf{i}+\frac{\partial^0}{\partial y^0}\mathbf{j}+\frac{\partial^0}{\partial z^0}\mathbf{k}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}.$$

Некоторые свойства.

$$\nabla_0U=U\mathbf{i}+U\mathbf{j}+U\mathbf{k}.$$

Эта величина может рассматриваться как *нулевой градиент* $\mathbf{G}_0$ функции U.

$$\mathbf{G}_0=\mathrm{grad}_0U=\nabla_0U.$$

$$\nabla_0\cdot\mathbf{F}=F_C=\left(F_x+F_y+F_z\right)_C.$$

Эта величина может рассматриваться как *нулевая дивергенция* векторного поля $\mathbf{F}$.

$$\mathrm{div}_0\mathbf{F}=\nabla_0\cdot\mathbf{F}.$$

$$\nabla_0\times\mathbf{F}=\left(F_z-F_y\right)\mathbf{i}+\left(F_x-F_z\right)\mathbf{j}+\left(F_y-F_x\right)\mathbf{k}.$$

Эта величина может рассматриваться как *нулевой ротор* векторного поля $\mathbf{F}$.

$$\mathrm{rot}_0\mathbf{F}=\nabla_0\times\mathbf{F}.$$

$$\nabla_0 \cdot (\nabla_0 \times \mathbf{F}) = \mathrm{div}_0(\mathrm{rot}_0\, \mathbf{F}) \equiv 0 .$$

Из (2)

$$\frac{W_C}{\nabla_0} = \nabla_0^{-1} \cdot \left(W_x + W_y + W_z \right)_C = W_x \mathbf{i} + W_y \mathbf{j} + W_z \mathbf{k} = \mathbf{W} .$$

$$\nabla_0 \mathbin{\tilde{\cdot}} \left(\nabla_0^{-1} \cdot W_C \right) = W_C .$$

$$\nabla_0^{-1} \cdot \left(\nabla_0 \mathbin{\tilde{\cdot}} \mathbf{F} \right) = \mathbf{F} .$$

$$\nabla_0^{-1} \cdot \left(\nabla_0 \mathbin{\tilde{\cdot}} \nabla_0 \right) = \nabla_0 .$$

$$\nabla_0 \cdot \nabla_S = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} .$$

$$\nabla_0^{-1} \cdot (\nabla_0 \mathbin{\tilde{\cdot}} \nabla_S) = \nabla_S .$$

$$\nabla_0 \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} .$$

$$\nabla_0^{-1} \cdot (\nabla_0 \mathbin{\tilde{\cdot}} \nabla) = \nabla .$$

$$\nabla_0^{-1} \cdot \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{i} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathbf{j} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{k} .$$

$$\nabla_0 \cdot (\nabla_0^{-1} \cdot \Delta) = \Delta .$$

$$\nabla_0 \times_{\mathrm{I}} \nabla_0 = \nabla_0 \times_{\mathrm{II}} \nabla_0 = \frac{\nabla_0 \times^* \nabla_0}{2} = \nabla_0 .$$

Возвращаясь к задаче, приведенной в начале параграфа,

$$\left(W_x V_x + W_y V_y + W_z V_z \right)_C = \left(\nabla_0^{-1} \cdot W_C \right) \mathbin{\tilde{\cdot}} \left(\nabla_0^{-1} \cdot V_C \right),$$

$$\left(W_x V_y + W_y V_z + W_z V_x \right)_C = \nabla_0 \mathbin{\tilde{\cdot}} \left[\left(\nabla_0^{-1} \cdot W_C \right) \times_{\mathrm{I}} \left(\nabla_0^{-1} \cdot V_C \right) \right].$$

Таким образом, применение нулевого векторного оператора позволяет решать подобные задачи.

Представление полного дифференциала функции с помощью векторных операторов

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz = (\nabla W) \cdot (\nabla_0^{-1} \cdot dS_1) .$$

Здесь dS_1 – полный дифференциал элементарной симметрической функции

$$S_1 \equiv x + y + z .$$

С помощью нулевого векторного оператора можно, например, преобразовать вектор в линейную комбинацию координат, выполнить некие операции, а затем результат преобразовать обратно в вектор. И наоборот, сначала линейную комбинацию координат преобразовать в вектор, выполнить векторные операции, а результат преобразовать в линейную комбинацию координат.

3. Мнимый нулевой векторный оператор

Может быть рассмотрена следующая задача. Имеются линейная комбинация координат W_C и вектор $\mathbf{F}$. Найти формулу, связывающую W_C и $\mathbf{F}$ с выражением $F_x W_y \mathbf{i} + F_y W_z \mathbf{j} + F_z W_x \mathbf{k}$. Для решения подобных задач может быть введен мнимый нулевой векторный оператор

$$\{\nabla_0\} = \left\{ \frac{\partial^0}{\partial x^0} \mathbf{i} \right\} + \left\{ \frac{\partial^0}{\partial y^0} \mathbf{j} \right\} + \left\{ \frac{\partial^0}{\partial z^0} \mathbf{k} \right\} = \{\mathbf{i}\} + \{\mathbf{j}\} + \{\mathbf{k}\}.$$

Его главное отличие от оператора ∇_0 заключается в том, что псевдоорты (мнимые орты) $\{\mathbf{i}\}$, $\{\mathbf{j}\}$, $\{\mathbf{k}\}$ с ортами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ не взаимодействуют, а взаимодействуют только с псевдоортами. Поэтому правила применения оператора $\{\nabla_0\}$ по отношению к векторам такие же, как и оператора ∇_0 в отношении линейных комбинаций координат.

Некоторые свойства $\{\nabla_0\}$.

$$\{\nabla_0\} U = U\{\mathbf{i}\} + U\{\mathbf{j}\} + U\{\mathbf{k}\}.$$

Эта величина может рассматриваться в качестве *мнимого нулевого градиента* $\{\mathbf{G}_0\}$ функции U.

$$\{\mathbf{G}_0\} = \{\mathrm{grad}_0 U\} = \{\nabla_0\} U .$$

$$\frac{W_C}{\{\nabla_0\}} = \{\nabla_0^{-1}\} \cdot \left(W_x + W_y + W_z \right)_C = W_x\{\mathbf{i}\} + W_y\{\mathbf{j}\} + W_z\{\mathbf{k}\}.$$

$$\{\nabla_0\} \tilde{\cdot} \left(\{\nabla_0^{-1}\} \cdot W_C \right) = W_C .$$

$$\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \left(\{\nabla_0\} \tilde{\cdot} \{\nabla_0\} \right) = \{\nabla_0\} .$$

$$\frac{\mathbf{F}}{\{\nabla_0\}} = \{\nabla_0^{-1}\} \cdot \mathbf{F} = F_x \mathbf{i}\{\mathbf{i}\} + F_y \mathbf{j}\{\mathbf{j}\} + F_z \mathbf{k}\{\mathbf{k}\}.$$

$$\{\nabla_0\} \cdot \left(\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \mathbf{F} \right) = \mathbf{F} .$$

$$\{\nabla_0\} \times \left(\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \mathbf{F} \right) = \left(F_z \mathbf{k} - F_y \mathbf{j} \right)\{\mathbf{i}\} + \left(F_x \mathbf{i} - F_z \mathbf{k} \right)\{\mathbf{j}\} + \left(F_y \mathbf{j} - F_x \mathbf{i} \right)\{\mathbf{k}\}.$$

$$\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \nabla_S = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \mathbf{i}\{\mathbf{i}\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \mathbf{j}\{\mathbf{j}\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mathbf{k}\{\mathbf{k}\}.$$

$$\{\nabla_0\} \cdot \left(\{\nabla_0^{-1}\} \cdot \nabla_S \right) = \nabla_S .$$

$$\{\nabla_0\}\times\left(\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\nabla_S\right)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\mathbf{k}-\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\mathbf{j}\right)\{\mathbf{i}\}+\left(\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\mathbf{i}-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\mathbf{k}\right)\{\mathbf{j}\}+\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\mathbf{j}-\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\mathbf{i}\right)\{\mathbf{k}\}.$$

$$\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}\{\mathbf{i}\}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}\{\mathbf{j}\}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\{\mathbf{k}\}.$$

$$\{\nabla_0\}\cdot\left(\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\nabla\right)=\nabla.$$

$$\{\nabla_0\}\times\left(\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\nabla\right)=\left(\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}-\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}\right)\{\mathbf{i}\}+\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}-\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\{\mathbf{j}\}+\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}-\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}\right)\{\mathbf{k}\}.$$

$$\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{\mathbf{i}\}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{\mathbf{j}\}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\{\mathbf{k}\}.$$

$$\{\nabla_0\}\cdot(\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\Delta)=\Delta.$$

$$\{\nabla_0\}\cdot\left[\{\nabla_0\}\times\left(\{\nabla_0^{-1}\}\cdot W_C\right)\right]=0.$$

$$\{\nabla_0\}\times_{\mathrm{I}}\{\nabla_0\}=\{\nabla_0\}\times_{\mathrm{II}}\{\nabla_0\}=\frac{\{\nabla_0\}\times^*\{\nabla_0\}}{2}=\{\nabla_0\}.$$

Возвращаясь к задаче, приведенной в начале параграфа,

$$F_xW_y\mathbf{i}+F_yW_z\mathbf{j}+F_zW_x\mathbf{k}=\{\nabla_0\}\cdot\left[\left(\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\mathbf{F}\right)\times_{\mathrm{I}}\left(\{\nabla_0^{-1}\}\mathbin{\tilde{\cdot}}W_C\right)\right].$$

Таким образом, применение мнимого нулевого векторного оператора позволяет решать подобные задачи. Другими словами, применение $\{\nabla_0\}$ позволяет сохранить орты исходного вектора.

4. Скрытые и комбинированные векторы

Применение мнимого векторного оператора приводит к появлению скрытых векторов [7]. В частности, $\{\mathbf{i}\}$, $\{\mathbf{j}\}$, $\{\mathbf{k}\}$ являются скрытыми ортами.

Определение 4.1. *Скрытый вектор* – это скаляр, в котором содержится информация о *включенном* в него векторе.

Скрытый вектор может быть обозначен следующим образом:

$$A^{\{\mathbf{P}\}}=A\left\{\frac{\mathbf{P}}{P}\right\}=\frac{A}{P}\left\{P_x\mathbf{i}+P_y\mathbf{j}+P_z\mathbf{k}\right\}.$$

Из представленных выше выражений значительная часть является *комбинированными векторами*, т.е. сочетаниями векторов и скрытых векторов.

Комбинированный вектор может быть обозначен следующим образом:

$$\mathbf{B}_{\mathbf{F}}^{\{\mathbf{P}\}}=B\left\{\frac{\mathbf{P}}{P}\right\}\frac{\mathbf{F}}{F}.$$

Нижний индекс содержит информацию о направлении вектора, верхний индекс – информацию о направлении скрытого вектора.

При выполнении операций с комбинированными векторами орты взаимодействуют с ортами, а скрытые орты – со скрытыми ортами. Орты и скрытые орты между собой не взаимодействуют.

При умножении комбинированного вектора на другой комбинированный вектор могут использоваться следующие четыре формы записи операций умножения:

$$«\{\cdot\}\cdot», «\{\cdot\}\times», «\{\times\}\cdot», «\{\times\}\times».$$

Действие знака произведения, расположенного в скобках, распространяется на скрыто-векторные составляющие комбинированных векторов, а расположенного за скобками – на векторные.

Пример.

$$\left(W_x\{\mathbf{i}\}\mathbf{j}+W_y\{\mathbf{j}\}\mathbf{k}+W_z\{\mathbf{k}\}\mathbf{i}\right)\{\cdot\}\times\left(V_x\{\mathbf{i}\}\mathbf{k}+V_y\{\mathbf{j}\}\mathbf{i}+V_z\{\mathbf{k}\}\mathbf{j}\right)=W_xV_x\mathbf{i}+W_yV_y\mathbf{j}+W_zV_z\mathbf{k}\,.$$

При перемножении скрытого вектора и комбинированного вектора нет необходимости размещения знака произведения в скобки. Очевидно, что знак произведения « $\cdot$» или «$\times$» в этом случае распространяется на скрыто-векторные составляющие.

Величина

$$\mathrm{div}_0\{\mathbf{F}\}=\{\nabla_0\}\tilde{\cdot}\{\mathbf{F}\}=\left(F_x+F_y+F_z\right)_C$$

может рассматриваться в качестве *мнимой нулевой дивергенции* скрытого векторного поля $\{\mathbf{F}\}$. Она совпадает с *нулевой дивергенцией* векторного поля $\mathbf{F}$.

Величина

$$\mathrm{rot}_0\{\mathbf{F}\}=\{\nabla_0\}\times\{\mathbf{F}\}=\left(F_z-F_y\right)\{\mathbf{i}\}+\left(F_x-F_z\right)\{\mathbf{j}\}+\left(F_y-F_x\right)\{\mathbf{k}\}$$

может рассматриваться как *мнимый нулевой ротор* скрытого векторного поля $\{\mathbf{F}\}$.

$$\{\nabla_0\}\cdot(\{\nabla_0\}\times\{\mathbf{F}\})=\mathrm{div}_0\{(\mathrm{rot}_0\{\mathbf{F}\})\}\equiv 0\,.$$

С помощью мнимого (скрытого) нулевого векторного оператора можно преобразовать вектор в комбинированный вектор, выполнить некие операции, а затем результат преобразовать обратно в вектор. И наоборот, сначала комбинированный вектор преобразовать в вектор, выполнить векторные операции, а результат преобразовать в комбинированный вектор.

5. Некоторые формулы (продолжение)

$$\nabla_S\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}\right)=\nabla_0^{-1}\cdot\left\{\left[\nabla_0^{-1}\cdot\left(\nabla_S\,\tilde{\cdot}\,\mathbf{F}\right)\right]\tilde{\cdot}\,\mathbf{G}+\left[\nabla_0^{-1}\cdot\left(\nabla_S\,\tilde{\cdot}\,\mathbf{G}\right)\right]\tilde{\cdot}\,\mathbf{F}\right\}+\mathbf{G}\times_{\mathrm{I}}\left(\nabla_S\times\mathbf{F}\right)+$$

$$+\mathbf{F}\times_{\mathrm{I}}\left(\nabla_S\times\mathbf{G}\right)+\left(\nabla\times_{\mathrm{I}}\mathbf{F}\right)\times_{\mathrm{I}}\left(\nabla\times_{\mathrm{II}}\mathbf{G}\right)+\left(\nabla\times_{\mathrm{I}}\mathbf{G}\right)\times_{\mathrm{I}}\left(\nabla\times_{\mathrm{II}}\mathbf{F}\right)+$$

$$+\left\{\nabla_0\right\}\cdot\left\{\left[\left\{\nabla_0^{-1}\right\}\cdot\left(\nabla\tilde{\cdot}\mathbf{F}\right)\right]\times_{\mathrm{I}}\left[\left\{\nabla_0^{-1}\right\}\cdot\left(\nabla\times\mathbf{G}\right)\right]+\left[\left\{\nabla_0^{-1}\right\}\cdot\left(\nabla\tilde{\cdot}\mathbf{G}\right)\right]\times_{\mathrm{I}}\left[\left\{\nabla_0^{-1}\right\}\cdot\left(\nabla\times\mathbf{F}\right)\right]\right\}.$$

$$\nabla_S\cdot\left(\mathbf{F}\times\mathbf{G}\right)=\mathbf{G}\cdot(\nabla_S\times\mathbf{F})-\mathbf{F}\cdot(\nabla_S\times\mathbf{G})-(\nabla\times_{\mathrm{I}}\mathbf{F})\cdot(\nabla\times_{\mathrm{II}}\mathbf{G})+(\nabla\times_{\mathrm{II}}\mathbf{F})\cdot(\nabla\times_{\mathrm{I}}\mathbf{G})+$$

$$+\nabla_0\cdot\left\{\left[\nabla_0^{-1}\cdot(\nabla\tilde{\cdot}\mathbf{F})\right]\times\left[\nabla_0^{-1}\cdot(\nabla\tilde{\cdot}\mathbf{G})\right]\right\}.$$

$$(\mathbf{G}\cdot\nabla_S)W\mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathbf{G}\cdot\nabla_S W)+W(\mathbf{G}\cdot\nabla_S)\mathbf{F}+\left\{\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\left[\mathbf{G}\times^*(\nabla W)\right]\right\}\cdot\left[\{\nabla_0^{-1}\}\cdot(\nabla\tilde{\cdot}\mathbf{F})\right]+$$

$$+\left[\mathbf{G}\times^*(\nabla W)\right]\times_{\mathrm{II}}(\nabla\times\mathbf{F}).$$

При этом

$$\left\{\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\left[\mathbf{G}\times^*(\nabla W)\right]\right\}\cdot\left[\{\nabla_0^{-1}\}\cdot(\nabla\tilde{\cdot}\mathbf{F})\right]=\nabla_0^{-1}\cdot\left\{\left[\mathbf{G}\times^*(\nabla W)\right]\tilde{\cdot}\left[\nabla_0^{-1}\cdot(\nabla\tilde{\cdot}\mathbf{F})\right]\right\}.$$

$$\left[\mathbf{G}\times^*(\nabla W)\right]\times_{\mathrm{II}}(\nabla\times\mathbf{F})=\left[\mathbf{G}\times_{\mathrm{I}}(\nabla W)\right]\times_{\mathrm{II}}(\nabla\times\mathbf{F})+\left[\mathbf{G}\times_{\mathrm{II}}(\nabla W)\right]\times_{\mathrm{II}}(\nabla\times\mathbf{F}).$$

$$\nabla_S\times(W\mathbf{F})=\nabla_S W\times\mathbf{F}+W\nabla_S\times\mathbf{F}+\left[\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\left(\nabla W\right)\right]\cdot\left\{\{\nabla_0\}\times\left[\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\left(\nabla\tilde{\cdot}\mathbf{F}\right)\right]\right\}+$$

$$(\nabla\times_{\mathrm{I}}\mathbf{F})\times_{\mathrm{I}}\nabla W+\nabla W\times_{\mathrm{II}}(\nabla\times_{\mathrm{II}}\mathbf{F}).$$

$$\nabla_S\times(\mathbf{F}\times\mathbf{G})=(\mathbf{G}\cdot\nabla_S)\mathbf{F}-\mathbf{G}(\nabla_S\cdot\mathbf{F})-(\mathbf{F}\cdot\nabla_S)\mathbf{G}+\mathbf{F}(\nabla_S\cdot\mathbf{G})+$$

$$+\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\left(\nabla\tilde{\cdot}\mathbf{F}\right)\cdot\left[\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\left(\nabla\times^*\mathbf{G}\right)\right]-\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\left(\nabla\cdot^*\mathbf{G}\right)\cdot\left[\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\left(\nabla\times^*\mathbf{F}\right)\right]+$$

$$(\nabla\times_{\mathrm{I}}\mathbf{F})\times(\nabla\times_{\mathrm{I}}\mathbf{G})-(\nabla\times_{\mathrm{II}}\mathbf{F})\times(\nabla\times_{\mathrm{II}}\mathbf{G}).$$

$$(\mathbf{G}\cdot\nabla_S)\mathbf{F}=\left(\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\mathbf{G}\right)\cdot\left(\{\nabla_0^{-1}\}\cdot\nabla_S\cdot\mathbf{F}\right)+\mathbf{G}\times_{\mathrm{II}}\left(\nabla_S\times\mathbf{F}\right)=$$

$$=\nabla_0^{-1}\cdot\left\{\mathbf{G}\tilde{\cdot}\left[\nabla_0^{-1}\cdot\left(\nabla_S\tilde{\cdot}\mathbf{F}\right)\right]\right\}+\mathbf{G}\times_{\mathrm{II}}\left(\nabla_S\times\mathbf{F}\right).$$

$$\Delta_S\left(VW\right)=(\Delta_S V)W+(\Delta_S W)V+4(\nabla_S V)\cdot(\nabla_S W)+2\nabla V\cdot\left(\nabla\times^*\nabla_S W\right)+$$

$$+2\nabla W\cdot\left(\nabla\times^*\nabla_S V\right)+\nabla_0\cdot\left[\left(\nabla_0^{-1}\cdot\Delta V\right)\times^*\left(\nabla_0^{-1}\cdot\Delta W\right)\right].$$

Без применения «расщепления» векторных произведений на слагаемые, сопряжения векторов, использования линейной комбинации координат, ее деления на вектор, введения нулевого и мнимого нулевого векторных операторов, скрытых векторов и комбинированных векторов получить представленные выше разложения было бы невозможно.

Замечание. Несмотря на то, что в некоторых приведенных разложениях использован мнимый (скрытый) оператор $\{\nabla_0\}$, разложения сами по себе являются «чистыми» скалярами или векторами.

11. Некоторые физические интерпретации

Если в некоторой области среды (поля) объемом V определена функция мощности, сконцентрированной в этой области,

$$P(x,y,z) = \iiint_V p dv = \int_{z_0}^{z} dz \int_{y_0}^{y} dy \int_{x_0}^{x} p(x,y,z) dx ,$$

где $p(x,y,z)$ – объемная плотность мощности, то поверхностный градиент от этой функции представляет собой вектор Умова (вектор Умова-Пойнтинга для электромагнитного поля), т.е. вектор скорости движения энергии через единицу поверхности.

$$\mathbf{U} = \mathrm{grad}_S P(x,y,z) = \nabla_S P(x,y,z) .$$

Производная функции мощности $P(x,y,z)$ по некоторой поверхности с единичным вектором нормали $\mathbf{n}$ представляет собой количество энергии, проходящей через единицу площади этой поверхности в единицу времени.

$$\frac{d_S^2 P}{d\sigma} = \mathrm{grad}_S P \cdot \mathbf{n} = \nabla_S P \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} .$$

Пусть в некоторой области поля гравитации (или электростатического поля) для пробной массы (или электрического заряда) определена функция пространственного распределения сил $\mathbf{F}(x,y,z)$, действующих на нее (на него) со стороны поля [8–12]. Тогда поверхностная дивергенция векторного поля $\mathbf{F}(x,y,z)$ представляет собой объемную плотность энергии гравитационного (или электростатического) поля в рассматриваемой точке.

$$\mathrm{div}_S \mathbf{F} = \nabla_S \cdot \mathbf{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta V} .$$

Если для излучающего диполя с электрическим моментом $\mathbf{p}_e$ известна функция пространственного распределения производной напряженности электрического поля по времени $d\mathbf{E}/dt\,(x,y,z)$, то величина $A_1|\mathbf{p}_e|\mathrm{rot}_S\, d\mathbf{E}/dt$ представляет собой вектор Умова-Пойнтинга в рассматриваемой точке.

$$A|\mathbf{p}_e|\mathrm{rot}_S \frac{d\mathbf{E}}{dt} = A|\mathbf{p}_e|\nabla_S \times \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \mathbf{U}(x,y,z),$$

где A – безразмерный коэффициент.

Заключение

Основным результатом работы является «расщепление» векторного произведения на две части – ортоположительную и ортоотрицательную. Это позволяет, в частности, в случае векторного произведения вектора на себя самого из нулевой величины, которой является это произведение, «извлечь» две ненулевые. Применение этого приема к векторному произведению оператора Гамильтона (набла) на себя самого приводит к появлению векторного дифференциального смешанного оператора второго порядка, являющегося ключевым элементом при определении понятий поверхностного векторного анализа – поверхностного градиента, поверхностной производной по направлению, поверхностных дивергенции и ротора.

Введенные элементы поверхностного векторного анализа, в частности, расширяют арсенал средств для исследования физических полей, в том числе, определения вектора Умова как поверхностного градиента от функции мощности, объемной плотности энергии силового поля как поверхностного дивергенции от функции пространственного распределения сил и т.д.

Список используемых источников:

1. Popov, I.P. (2018) A method of recovery of functions from its gradient. Software of systems in the industrial and social fields, 6 (1): 8-11. https://doi.org/10.18503/2306-2053-2018-6-1-8-11
2. Popov I.P. Scalar and vector division and derivatives vectors // Applied mathematics and control sciences. 2018. no. 2. P. 43–55.
3. Popov, I.P. (2017) Scalar and vector derivatives of vector fields and their application to problems of mechanics. Software of systems in the industrial and social fields, 5 (1): 2-7.
4. Popov I.P. Vector differential surface operator // British journal of innovation in science and technology. 2017. Vol 2. no. 6. P. 25–31.
5. Popov, I.P. (2017) Surface, zero and zero imaginary operators NABLA. Software of systems in the industrial and social fields, 5 (2): 2-11.

6. Popov I.P. Zero vector differential operators // British journal of innovation in science and technology. 2018. Vol 3. no. 1. P. 17–24.
7. Popov I.P. Combined vectors and magnetic charge // Applied Physics and Mathematics. 2018. no. 6. P. 12–20. DOI: 10.25791/pfim.06.2018.329
8. Popov I.P. Mathematical modeling of the formal analogy of electromagnetic field // Applied mathematics and control sciences. 2016. no. 4. P. 36–60.
9. Popov I.P. A wave chain formed by the two monochromatic de Broglie waves // British journal of innovation in science and technology. 2017. Vol 2. no. 4. P. 27–31.
10. Popov I.P. Application of symbolic (complex) method for calculation of complicated mechanical systems under harmonic exposure // Applied Physics and Mathematics. 2019. no. 4. P. 14–24. DOI: 10.25791/pfim.04.2019.828
11. Popov I.P. Modeling of the privileged reference systems // Applied mathematics and control sciences. 2019. no. 1. P. 63–69. DOI: 10.15593/2499-9873/2019.1.04
12. Popov I.P. (2019) Vector multiplication of two vectors in four-dimensional Euclidean space with applied aspects, 7 (1): 11-17.